

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

ФОМІН ВОЛОДИМИР МИХАЙЛОВИЧ



УДК 624.012.45.042

**НЕЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ РОЗРАХУНКОВІ МОДЕЛІ
ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КАРКАСНИХ БУДІВЕЛЬ І СПОРУД З УРАХУВАННЯМ
ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ**

05.23.01 - Будівельні конструкції, будівлі та споруди.

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Одеса – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Одеській державній академії будівництва та архітектури, Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант: доктор технічних наук, професор, **Сур'янінов Микола Георгійович**, завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури Міністерства освіти і науки України.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор **Ватуля Гліб Леонідович**, проректор з наукової роботи, професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту Міністерства освіти і науки України, м. Харків;

доктор технічних наук, професор, **Горик Олексій Володимирович**, завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії Міністерства освіти і науки України, м. Полтава;

доктор технічних наук, професор, **Гришин Андрій Володимирович**, завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки Одеського національного морського університету Міністерства освіти і науки України, м. Одеса.

Захист відбудеться «02» липня 2019 р. о 12³⁰ на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 41.085.01 при Одеській державній академії будівництва та архітектури за адресою: 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Одеської державної академії будівництва та архітектури за адресою: 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.

Автореферат розісланий «31» травня 2019 р.

Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради Д 41.085.01, к.т.н., доцент



Кровяков С.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Обґрунтування вибору теми дослідження. Інтенсивне будівництво висотних каркасних будинків і споруд вимагає вдосконалення методів їх статичного і динамічного розрахунку, що враховують все різноманіття чинників, які впливають на напружено-деформований стан.

Найбільш складним, і тому менш вивченим є динамічний розрахунок, який враховує цілий спектр різних впливів, найважливішими з яких є сейсмічні, ударні та вибухові. Забезпечення безпеки споруд при дії динамічних (зокрема сейсмічних) впливів відноситься в даний час до числа найбільш актуальних і важливих завдань державної політики в галузі національної безпеки. Ця проблема вивчалася Міжвідомчою комісією з питань науково-технологічної безпеки при Раді національної безпеки і оборони України, в результаті чого в квітні 2008 року нею був прийнятий документ «Про стан забезпечення сейсмічної безпеки та проблем розвитку сейсмостійкого будівництва в Україні».

Будівельна галузь в Одесі розвивається дуже бурхливо, зводиться багато дорогих об'єктів, руйнування яких від динамічних впливів є серйозною економічною і соціальною втратою для міста, області та й країни в цілому. Результати впливу динамічних навантажень на будівлі та споруди, що фіксуються за останні десятиліття, свідчать, що сучасні норми і методи проектування не забезпечують достатньої надійності.

Будівельні норми, розроблені останнім часом у багатьох країнах, допускають можливість роботи матеріалу конструкцій за межами пружності. Проектування споруд в розрахунку на те, що при сильних динамічних впливах конструкції будуть працювати тільки в пружній стадії, є економічно недоцільним, оскільки воно пов'язано з перевитратою матеріалів. При розрахунках передбачається нелінійна поведінка конструкцій, і навіть допускаються руйнування окремих елементів, які будуть компенсовані пластичними деформаціями інших елементів. Тому розрахунки конструкцій з урахуванням пластичного і нелінійного поведіння матеріалів вимагають застосування більш складних математичних моделей і теорій.

В останні десятиліття почали застосовувати прямий динамічний розрахунок, заснований на наборі акселерограм з урахуванням нелінійної роботи і пластичних властивостей матеріалів. Діючі програмні комплекси з нелінійного динамічного розрахунку конструкцій засновані на методі скінчених елементів, який на кожному кроці розрахунку каркасних залізобетонних конструкцій при багатоциклових навантаженнях пов'язаний з необхідністю розв'язку алгебраїчних систем рівнянь дуже великої розмірності, що призводить до тимчасових витрат і нагромадження похибок. Для багатоповерхових залізобетонних каркасних будинків досі не реалізований динамічний розрахунок з урахуванням нелінійної поведінки матеріалів і виникнення залишкових деформацій при знакозмінних багатоциклових навантаженнях в умовах складного навантаження, що вимагає застосування асоційованого закону пластичної течії. Тому виникає необхідність в застосуванні альтернативних методів, наприклад, методів малого параметра та граничних елементів, для побудови яких необхідна на-

явність диференціальних рівнянь згину залізобетонних балок з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичних деформацій.

Отже, розробка сучасних наукових основ і методів розрахунку каркасних будівель і споруд на динамічні, в тому числі і на сейсмічні впливи, є актуальним завданням.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Тема дисертації і отримані результати відповідають актуальним напрямкам науково-технічної політики України відповідно до Постанови Кабінету Міністрів України №409 від 05.05.1997 року «Про забезпечення надійності і безпечної експлуатації будівель, споруд та мереж», а також до держбюджетних тем «Дослідження плоских і просторових задач статички і динаміки залізобетонних балок і рам з урахуванням геометричної та фізичної нелінійностей і пластичності матеріалів» (номер державної реєстрації 0116 U 003196) і №119 «Розвиток чисельно-аналітичного методу граничних елементів для моделювання та розрахунку стержневих, пластинчастих і оболонкових конструкцій» на кафедрах теоретичної механіки і будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури (номер державної реєстрації - 0117 U 000484).

Мета і задачі досліджень.

Метою дисертаційної роботи є розробка на базі основних ідей методів малого параметра і методу граничних елементів методу розрахунку залізобетонних каркасних будівель на квазістатичні і динамічні (зокрема сейсмічні) впливи з урахуванням геометричної нелінійності конструкцій і фізичної нелінійності матеріалів, а також виникнення залишкових деформацій.

Для досягнення цієї мети були вирішені наступні задачі:

1. Розробити метод дослідження згину одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель з урахуванням геометричної нелінійності конструкції і фізичної нелінійності матеріалів із застосуванням методу малого параметра в разі малої нелінійної залежності між напруженнями і деформаціями.

2. Провести подальший розвиток розробленого методу дослідження згину одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель з урахуванням геометричної нелінійності конструкції і фізичної нелінійності матеріалів для застосування його у випадках великої нелінійної залежності між напруженнями і деформаціями.

3. Розробити метод побудови диференціальних рівнянь нелінійного пружнопластичного згину плоских моделей залізобетонних каркасних будівель в разі складного навантаження на основі теорії пластичної течії Р. Мізеса.

4. На основі побудованих диференціальних рівнянь отримати подальший розвиток методу граничних елементів для розв'язання плоских нелінійних пружнопластичних задач статички і динаміки плоских моделей залізобетонних каркасних будівель.

5. За допомогою модифікованого методу граничних елементів провести дослідження плоских задач динаміки багатопрольотних і багатоповерхових каркасних споруд при складному навантаженні.

6. Розробити метод побудови диференціальних рівнянь просторового нелінійного пружнопластичного згину залізобетонних каркасних будівель і споруд при складному навантаженні.

7. Провести дослідження просторових нелінійних квазістатичних і динамічних задач для просторових моделей залізобетонних каркасних будівель на основі методу граничних елементів.

Об'єкт дослідження - залізобетонні каркасні будівлі та споруди, що знаходяться під динамічними впливами.

Предмет дослідження - розрахункові динамічні моделі напружено-деформованого стану залізобетонних каркасних будівель і споруд з урахуванням геометричної нелінійності конструкцій і фізичної нелінійності і пластичних властивостей матеріалів.

Методи досліджень. У процесі досліджень були використані наступні методи:

- побудова на основі теорії скінченних деформацій з використанням деформаційної теорії пластичності і методу малого параметра нелінійних диференціальних рівнянь для вирішення квазістатичних і динамічних задач згину елементів залізобетонних каркасних будівель з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичних властивостей бетону;
- побудова на основі теорії Мізеса пластичної течії зі зміцненням на основі асоційованого закону пластичної течії диференціальних рівнянь приростів прогинів при згині елементів залізобетонних каркасних будівель в залежності від приростів навантаження;
- застосування вказаних рівнянь для побудови матриць, необхідних для створення алгоритму методу граничних елементів при розрахунках залізобетонних каркасних будівель з урахуванням зазначених вище нелінійностей і властивостей матеріалів;
- використання створеного алгоритму при покроковому вирішенні як квазістатичних, так і динамічних задач, з використанням методу лінійного прискорення Ньюмарка при вирішенні динамічних задач;
- для реалізації запропонованого алгоритму розроблено комплекс програм на мові програмування Maple.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1. Вперше для вирішення нелінійних пружнопластичних квазістатичних і динамічних задач для одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель у випадках малої нелінійності матеріалів розроблено метод, заснований на методі малого параметра.

2. Розроблений метод поширено на рішення нелінійних пружнопластичних динамічних задач для одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель у випадках великої нелінійності матеріалів.

3. Розроблено метод побудови диференціальних рівнянь нелінійного пружнопластичного згину плоских моделей залізобетонних каркасних будівель з використанням теорії пластичної течії Р. Мізеса.

4. Одержав подальший розвиток метод граничних елементів для використання

його при вирішенні нелінійних пружнопластичних задач статички і динаміки плоских моделей залізобетонних каркасних будівель.

5. Вперше за допомогою модифікованого методу граничних елементів проведено дослідження нелінійних пружнопластичних статичних та динамічних задач для багатопверхових багатопрольотних каркасних будівель.

6. Розроблено метод побудови диференціальних рівнянь просторового пружнопластичного згину елементів залізобетонних каркасних будівель і споруд.

7. Отримав подальший розвиток метод граничних елементів для дослідження статичних і динамічних нелінійних пружнопластичних задач для просторових моделей залізобетонних каркасних будівель.

Практичне значення отриманих результатів.

В результаті виконаних досліджень вирішена важлива науково-технічна проблема – розроблені нові методи і моделі розрахунку залізобетонних каркасних будівель і споруд при динамічних впливах, підвищення точності результатів розрахунків будівельних конструкцій, зменшення витрат комп'ютерних ресурсів шляхом застосування нових математичних моделей і науково обґрунтованих методик.

Розроблені методи можуть бути використані

1) при розрахунках і конструюванні морських і річкових причалів на хвильові і сейсмічні впливи;

2) при проектуванні і розрахунках висотних будівель в сейсмічно небезпечних районах;

3) при науково-технічному супроводі об'єктів підвищеної відповідальності при розрахунках на сейсмічні впливи.

Всі розроблені алгоритми можуть бути реалізовані в легкодоступних для широкого кола проектувальників програмах без залучення дорогих і складних спеціальних комплексів.

Результати досліджень по дисертаційній роботі в проектну практику ДП «НДІБК» (м.Київ), ТОВ «Стальпроект-АБ» (м.Одеса) та НДЦ «Екобуд» (м.Одеса) при виконанні розрахунків каркасних будівель на сейсмічні впливи, а також впроваджені в навчальний процес Одеської державної академії будівництва та архітектури при проведенні лекційних та практичних занять для магістрів з дисциплін «Будівельна механіка» і «Залізобетонні конструкції»,

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є результатом особистого наукового дослідження. Основні положення і висновки є науково обґрунтованими, розроблені особисто автором. У дослідженнях, виконаних і опублікованих разом зі співавторами, особистий внесок здобувача полягає в постановці завдань, науковому обґрунтуванні та безпосередній участі в їх реалізації.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і отримали позитивну оцінку на конференціях і семінарах:

міжнародна науково-технічна конференція «Структуроутворення, міцність і механіка руйнування композиційних будівельних матеріалів і конструкцій», присв. 70-річчя дз дня народження д.т.н., проф. В.С. Дорофєєва (Одеса, 2012 р.); міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми теорії і практики будівельних конструкцій», присв. 100-річчя від дня нар. д.т.н., проф. І.Є. Прокоповича (Одеса, 2013

р.); міжнародна науково-технічна конференція «Гідротехнічне і транспортне будівництво» (Одеса, 2015 р.); десята ювілейна всеукраїнська науково-технічна конференція «Будівництво в сейсмічних районах України» (Одеса, 2015 р.); третя міжнародна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса-Київ, 2016 р.), міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми теорії та практики сейсмостійкого будівництва», присв. 90-річчю від дня нар. д.т.н., проф. В.К. Єгупова (Одеса, 2016 р.); четверта міжнародна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2017 р.); міжнародна науково-практична конференція «Проблеми збереження архітектурної спадщини півдня України», присвяченої пам'яті академіка В.А. Лісенка (1937-2016) (Одеса, 2017 р.); 74-а науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури (2018 р.); 6th International Congress on Technology-Engineering and Science, Kuala Lumpur.-Malaysia, 2018.

Публікації. Основні положення дисертаційної роботи опубліковані в 44 роботах, з яких 25 статей у фахових спеціалізованих виданнях України, три з яких у виданнях, що індексуються базою Index Copernicus, 5 статей у наукових періодичних виданнях інших держав, одна з яких у індексується базою Scopus, 7 тез доповідей у збірниках наукових конференцій, а також 7 статей, що додатково відображають результати роботи.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, шести розділів, основних висновків, списку використаних джерел (344 найменування) і додатків. Робота викладена на 380 сторінках, в тому числі 278 сторінок основного тексту, 37 сторінок списку використаних джерел, 39 сторінок додатків, містить 112 рисунків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** приведена загальна характеристика роботи, показаний її зв'язок з науковими напрямками досліджень Одеської державної академії будівництва та архітектури, обґрунтовано актуальність обраної теми, визначено мету, задачі, об'єкт і предмет дослідження, охарактеризовано наукову новизну отриманих результатів, їх теоретичне і практичне значення, наведені дані щодо апробації результатів досліджень і публікацій по темі.

У **першому розділі** наводиться аналіз пошкоджень залізобетонних споруд при сильних динамічних впливах, якому присвячена велика кількість робіт відомих фахівців: Я.М. Айзенберга, А.М. Жарова, І.В. Іцкова, Л.Ш. Килимника, М.А. Клячко, В.І. Мартем'янова, Ю.І. Немчинова, К.В. Єгупова, М.Г. Мар'єнкова, С.В. Полякова, В.А. Ржевського, І.Ф. Ципенюка та ін. Наголошується, що каркасні споруди виявилися серед найбільш уразливих залізобетонних конструкцій до дії інтенсивних землетрусів. В якості однієї з основних причин руйнувань вказується наявність довгоперіодних складових прискорень ґрунту, які виявилися близькими до власних частот коливань конструкцій внаслідок збільшення періодів власних коливань в процесі динамічного впливу.

Одним з найбільш перспективних напрямків на шляху створення ефективних методів розрахунку є урахування просторової роботи будівель при дії динамічних

навантажень. Перші роботи з розрахунку на горизонтальні динамічні навантаження будівель з урахуванням їх просторової роботи належать В.К.Єгупову і його учням. Більш загальна тривимірна модель будівлі, що враховує деформативність перекриттів, розглядалася в роботах К.В.Єгупова. Інший напрямок досліджень роботи будівель як просторових систем був розвинений в роботах Ю.І.Немчінова і його учнів. При цьому в якості розрахункової моделі будівлі була прийнята скінченно-елементна модель оболонки В.З.Власова.

Подальший розвиток методів розрахунку будівель на динамічні дії пов'язаний з урахуванням нелінійної поведінки матеріалів за межами пружності. Задача нелінійного динамічного розрахунку споруд вперше була розглянута О.О. Гвоздєвим на основі теорії жорсткопластичного тіла. Ця ж теорія була використана О.Р. Ржаніциним при дослідженні динамічного вигину балок і пластин.

У роботах Е.Є. Хачіяна були проведені дослідження коливань нелінійно-пружних і пружнопластичних конструкцій з використанням акселерограм сильних землетрусів на основі білінійних діаграм деформування елементів конструкцій. У роботах В.А. Ржевського представлені розрахункові динамічні пружнопластичні консольні моделі будівель, програми розрахунку і виконані чисельні дослідження динаміки багатоповерхових залізобетонних каркасних будинків при впливі сильних землетрусів на основі таких же діаграм. При цьому використовувалися отримані експериментально на моделях діаграми деформування поверхів каркасних будинків.

Методи динамічного розрахунку будівель з урахуванням нелінійного деформування конструкцій на основі методу спектра несучої здатності опубліковані в статтях С.В. Бушуєва, Г.А. Джінчвелашвілі, А.В. Колесникова, О.В. Мкртичева, М. Badoux, J. Vommer, T. Matsumori, T. Nagao, K. Peter та ін.

Пружнопластичні властивості залізобетонної конструкції змінюються в процесі впливу динамічних навантажень. У роботах В.В. Болотіна і В.А. Ржевського наведені формули, які необхідно використовувати для урахування змін жорсткості елементів конструкції при їх динамічних розрахунках з урахуванням пластичних деформацій. Я.М. Айзенбергом і Y.J. Park були введені моделі, в яких враховуються локальні руйнування, що виникають в процесі коливань.

В останні десятиріччя став проводитися прямий (тобто без використання будь-яких спрощуючих конструкцію моделей) динамічний розрахунок будівель і споруд з урахуванням нелінійної роботи матеріалів на набір акселерограм. При цьому використовується скінченноелементна модель споруди. Однак до теперішнього часу такий розрахунок є складним завданням. Для залізобетонних конструкцій це пов'язано з тим, що при динамічному розрахунку за методом скінчених елементів необхідно враховувати напружено-деформований стан елементів конструкції, розподіл стиснутих і розтягнутих зон, зон навантаження і розвантаження, що потребує досить детального розбиття конструкції на скінчені елементи, а отже, призводить до вирішення систем гігантської розмірності та великих обчислювальних і часових витрат і накопичення похибок розрахунків.

Для того щоб обійти проблему багатовимірності в роботах В.А. Ржевського проводиться перехід від скінченноелементної до рамної моделі конструкції шляхом побудови діаграм R –у для елементів рами на основі діаграм σ – ϵ в точках попереч-

ного перерізу з використанням варіантів деформаційної моделі згину, запропонованої В.М. Бондаренком. Аналогічний метод був використаний В.С. Шмуклером при визначенні несучої здатності залізобетонних каркасних споруд. У роботах Н.Г. Мар'єнкова при побудові рамних моделей для переходу від діаграм $\sigma - \epsilon$ до діаграм $R - u$ використовувався інший варіант деформаційного методу, запропонований в роботах А.М. Бамбури.

Метод малого параметра – метод збурень в його численних модифікаціях – є одним з потужних засобів сучасної прикладної математики при вирішенні різноманітних задач техніки і природознавства. Метод був запропонований А. Пуанкаре на початку 90-х років XIX століття для вирішення завдань небесної механіки. В даний час методи малого параметра не втрачають свого значення. Вони служать для з'ясування якісних особливостей задач, для отримання асимптотик і побудови опорних "тестових" рішень. Основна заслуга в справі розвитку і застосування цих методів до вирішення задач механіки, радіотехніки і автоматичного регулювання належить М.М. Крилову, М.М. Боголюбову, О.О. Андронову, О.А. Вітту, Ю.О. Митропольському, А.М. Самойленко та ін. В роботах Д.Д. Івлева і Л.В. Єршова метод малого параметру був застосований при вирішенні ряду статичних пружнопластичних задач. При цьому розглядалися випадки ідеальної пластичності, що відповідає білінійної діаграмі зв'язку $\sigma - \epsilon$, тобто діаграмі Прандтля.

Ідея методу граничних елементів, тобто ідея розв'язання крайових задач теорії пружності та гідродинаміки шляхом дискретизації граничних умов і побудови фундаментальних функцій була розвинена в працях Р. Vanerjee, R. Butterfield, С.А. Brebbia, L. Telles, L. Wrobel, А.Г. Угодчікова і Н.М. Хуторянського. Великий внесок у створення різних варіантів МГЕ внесли праці західних і вітчизняних вчених - S. Crouch, T. Cruse, A. Starfield, F.J. Rizzo, М.І. Мусхелишвілі, С.Г. Міхліна, В.Д. Купрадзе, Ю.В. Верюжського та ін. Фундаментальну роль в появі методу граничних елементів при вирішенні задач статички і динаміки стержневих систем зіграли дослідження О.М. Крилова, в яких він запропонував використовувати фундаментальні ортонормірованні функції для визначення прогинів стержнів. Розвиток методу граничних елементів для розв'язання лінійних статичних і динамічних задач, а також задач стійкості стержневих систем було проведено в роботах Д.Д. Работягова, В.Ф. Оробея і М.Г. Сур'янінова. При дослідженні статичних задач для залізобетонних рам метод використовувався в роботах А.В. Коврова, О.М. Кушніра, О.В. Ковтуненка і Н.К. Височан.

При вирішенні статичних та динамічних задач задач для залізобетонних каркасних споруд з урахуванням пластичності бетону необхідно використовувати теорії пластичності матеріалів. Найпростішим варіантом теорії пластичності є деформаційна. Ця теорія є розвитком теорії малих пружнопластичних деформацій О.А. Іллюшіна. Найбільш обґрунтованою і загальною стосовно бетону вважається теорія Г.О. Генієва. Деформаційна теорія пластичності застосовується при вирішенні практичних задач, в яких розглядаються випадки простого навантаження, тобто коли навантаження, що діють на конструкцію, змінюються пропорційно одному параметру. У випадках же складного навантаження для урахування пластичних властивостей матеріалів необхідно використовувати теорію пластичної течії. Теорія пла-

стичної течії була сформульована в роботах А. Saint-Venant, М. Levy, М. Hubbert, R. Von Mises, L. Prandtl, А. Reuss, Н. Hencky. У роботах С.Ф. Клованича, А.В. Гришина та їх учнів розроблені методи розрахунку масивних портових споруд на дію динамічних і статичних навантажень з урахуванням пластичних властивостей бетону на основі методу скінчених елементів.

У другому розділі розроблено метод розв'язання динамічних задач плоского вигину для одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель (тобто для залізобетонних колон, консольних балок) при простому навантаженні для діапазону навантажень, при якому залежності між напруженнями і деформаціями мало відрізняються від лінійних і який базується на методі малого параметру.

Побудова методу складається з декількох етапів.

А. Побудова асимптотичних розкладів напружень, деформацій і переміщень в точках залізобетонної балки при плоскому згині за ступенями малого параметра. Виконання гіпотези плоских перерізів при згині балки не передбачається, але прийнято допущення, що балка знаходиться в стані плоскої деформації. Координати y_1 , y_2 і y_3 точок перерізу після деформації визначаються в наступному вигляді:

$$y_1 = A(x_2), \quad y_2 \equiv B(x_2), \quad y_3 = x_3, \quad (1)$$

де

$$A = a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3, \quad B = b_1 x_2 + b_2 x_2^2 \quad (2)$$

(x_2, x_3 – координати точки поперечного перерізу балки в початковому стані).

У разі малої нелінійності відповідно до теорії малих пружнопластичних деформацій О.А. Іллюшина шарові тензори і девіатори напружень і деформацій коаксіальні:

$$\sigma_0 = 3K_0 \kappa(\varepsilon_0) \varepsilon_0 \quad \mathbf{D}_\sigma = 2G_0 \rho(\gamma_0) \mathbf{D}_\varepsilon. \quad (3)$$

Тут K_0 – початковий модуль об'ємного стиску матеріалу балки (тобто значення цього модуля при лінійно пружної деформації матеріалу), G_0 – початковий модуль зсуву, \mathbf{D}_σ – девіатор тензора напружень, а \mathbf{D}_ε – девіатор тензора деформацій, ε_0, γ_0 – октаедричні деформації. Функції $\kappa(\varepsilon_0)$ і $\rho(\gamma_0)$ характеризують нелінійно-пружну поведінку матеріалу. Розглядаються навантаження, при яких деформації матеріалу такі, що відхилення співвідношення (3) від закону Гука не надто велике. Тоді функції $\kappa(\varepsilon_0)$ і $\rho(\gamma_0)$ можна представити в наступному вигляді:

$$\kappa(\varepsilon_0) = 1 - \mu \kappa_\mu(\varepsilon_0), \quad \rho(\gamma_0) = 1 - \mu \rho_\mu(\gamma_0), \quad (4)$$

де μ – малий параметр, $\mu = \max(1 - \kappa(\varepsilon_0))$ в діапазоні навантажень, що розглядається. Напруження і деформації, кут повороту перерізу, коефіцієнти $a_i(s^0)$ ($i=1,2,3$) і $b_i(s^0)$ ($i=1,2$) розшуковуються у вигляді розкладів за малим параметром μ :

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \sigma_{ij}^{[k]}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon_{ij}^{[k]} \quad (i, j = 1, 2), \quad \phi = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \phi^{[k]}, \quad (5)$$

$$a_i(s^0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k a_i^{[k]}(s^0), \quad b_i(s^0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k b_i^{[k]}(s^0).$$

Тоді і $\varepsilon_0, \gamma_0, \mathbf{D}_\varepsilon$, функції $\kappa_\mu(\varepsilon_0), \rho_\mu(\gamma_0), A(x_2)$ і $B(x_2)$ можуть бути представлені в

такому ж вигляді.

Б. Побудова диференціальних рівнянь першого та другого наближень за методом малого параметра. За допомогою тензора, названого в нелінійній теорії пружності градієнтом руху, може бути побудований тензор скінчених деформацій ϵ , елементи якого є функціями координат y_2, y_3 , відносного подовження осі балки ϵ_s і похідною кута повороту ϕ поперечного перерізу по дуговій координаті s . Далі, з граничних умов на верхній і нижній гранях балки, а також умов рівноваги ділянки балки для першого наближення ($k = 0$) впливає, що коефіцієнти $a_i^{[0]}$ ($i = 1, 2, 3$) і $b_i^{[0]}$ ($i = 1, 2$) є функціями кута повороту перетинів ϕ і їх похідних ϕ' , а отже, такими функціями є деформації та напруження в точках поперечних перерізів, а також головний вектор і головний момент внутрішніх зусиль у перерізі. Підстановка математичних виразів цих функцій для згинального моменту і поперечної сили в співвідношення

$$\frac{dM_3^{[0]}}{ds} = -Q_2^{[0]}$$

(M_3 - згинальний момент в перерізі, Q_2 - поперечна сила) після ряду перетворень призводить до наступного рівняння:

$$H \frac{d^2 \phi^{[0]}}{ds^2} + (R_{o,1} \sin \phi^{[0]} - R_{o,2} \cos \phi^{[0]}) [1 - D \frac{d\phi^{[0]}}{ds}] = 0, \quad (6)$$

де H і D – постійні, що залежать від геометричних характеристик поперечного перерізу балки і арматури, а також модулів пружності матеріалів, $R_{o,1}$ і $R_{o,2}$ – горизонтальна і вертикальна складові головного вектора сил, прикладених до лівого поперечного перерізу балки.

Аналогічні викладки для другого наближення дозволяють отримати наступне рівняння:

$$H \frac{d^2 \phi^{[1]}}{ds^2} + (R_{o,1} \sin \phi^{[1]} - R_{o,2} \cos \phi^{[1]}) [1 - D \frac{d\phi^{[1]}}{ds}] = -\frac{d\tilde{M}_3^{[0]}}{ds}. \quad (7)$$

Тут $\tilde{M}_3^{[0]}$ – функція дугової координати s , яка визначається через величини, знайдені в першому наближенні. При цьому необхідно враховувати розподіл стиснутих і розтягнутих зон, оскільки деформаційні властивості бетону істотно різні при розтязі і стиску.

Рівняння (6) і (7) представляють собою диференціальні рівняння для побудови першого $\phi^{[0]}(s)$ і другого $\phi^{[1]}(s)$ наближень функції кутів повороту

$$\phi(s) = \phi^{[0]}(s) + \mu \phi^{[1]}(s) \quad (8)$$

поперечних перерізів балки. Для побудови функцій прогинів балки використовується співвідношення

$$v(s) = \int_0^s \phi(\xi) d\xi + v(0). \quad (9)$$

Рівняння (6) дає можливість врахувати тільки геометричну нелінійність. Для урахування фізичної нелінійності необхідно використовувати і друге наближення, тобто рівняння (7).

В. Виведення аналітичних виразів для січних модулів об'ємного стиску і зсуву в разі плоскої деформації. У запропонованому методі дослідження нелінійних задач динаміки залізобетонних балок для побудови асимптотичних розкладів (5) для напружень і деформацій за ступенями малого параметра необхідні конкретні аналітичні вирази залежності модулів об'ємного стиску і зсуву від компонентів тензора деформацій.

Далі здійснюються побудови необхідних аналітичних виразів, виходячи із залежностей між напруженнями і деформаціями при центральному розтязі або стиску, наведеними у монографії М.І. Карпенка «Загальні моделі механіки залізобетону».

Проведено дослідження квазістатичного згину залізобетонної консольної балки, що знаходиться під дією двох прикладених до її кінця сили F_1 , спрямованої уздовж осі балки, і сили F_2 , спрямованої перпендикулярно до цієї осі, величина якої

зростає від нуля до деякого максимального значення. Вирішуючи диференціальні рівняння (6) і (7) при ряді значень сили F_2 і постійному значенні сили F_1 методом послідовних наближень, знаходимо ряд значень кутів повороту поперечних перерізів. Використовуючи апроксимацію поліномами Лагранжа, можна побудувати функціональну залежність наступного виду:

$$v = v(F_2) \quad (10)$$

геометричної нелінійності і 3 – при урахуванні фізичної та геометричної нелінійностей).

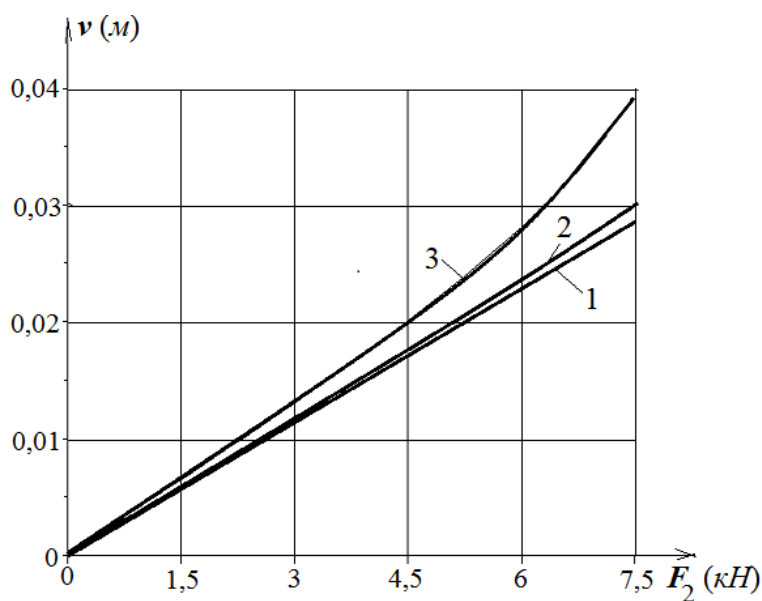


Рис. 1 Залежності прогинів від сили F_2

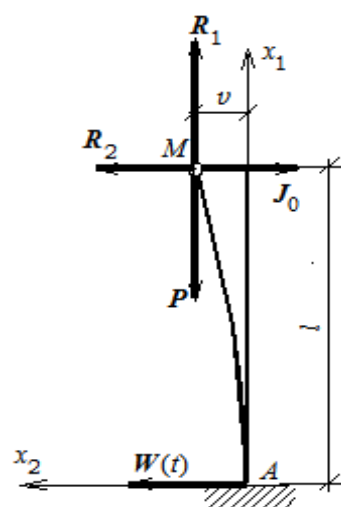


Рис. 2 Схема консольної моделі будівлі

Далі в розділі 2 розглядаються коливання одновимірної (консольної) моделі залізобетонної каркасної будівлі при сейсмічній дії (рис. 2), тобто досліджуються коливання зосередженої маси, розташованої на кінці вертикальної залізобетонної колони в тому випадку, коли точка закріплення колони здійснює горизонтальні коливання при заданому законі зміни прискорення $W = W(t)$. Основне рівняння динаміки для вантажу M має такий вигляд

$$ma = R_1 + R_2 + J_0 + P. \quad (11)$$

(R_1 и R_2 – вертикальна і горизонтальна реакції деформованої колони, J_0 – сила інерції, викликана рухом опори, $J_0 = -mW$). Проектуючи (9) на вісь x_2 , отримуємо

$$m\ddot{v} = R_2 - mW(t). \quad (12)$$

Враховуючи, що R_2 за величиною дорівнює силі F_2 , отримуємо з (10) і (12)

$$\ddot{v} - m^{-1}F_2(v) = -W(t). \quad (13)$$

Вирішуючи рівняння (13), можна визначити значення на будь-якому відрізку часу. На рис. 3 показані графіки максимальних значень переміщень вантажу при $W(t) = w_0 \sin pt$, $w_0 = 0,1 \text{ м/с}^2$. Маса вантажу 10 Т , параметри колони ті ж, що і в попередньому прикладі. На рис.3 представлені значення амплітуд сталих нелінійних коливань в залежності від $\lambda = p / p_0$ (p_0 — частота вільних коливань, крива 1). Для порівняння приведена крива 2 залежності амплітуд лінійних коливань від λ при такому ж збудженню коливань. Для лінійних коливань введено в'язкий опір, коефіцієнт якого відповідає коефіцієнту поглинання енергії 0,56.

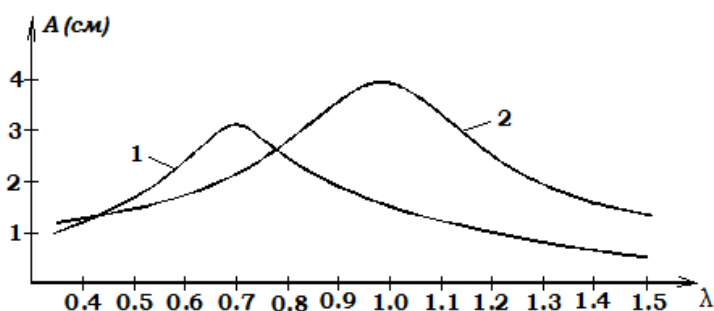


Рис.3 Залежності амплітуди коливань від частоти сили

Таким чином в розділі 2 побудовані розклади напружень і деформацій в точках залізобетонної балки в ряд по ступенях малого параметра. Запропоновано метод побудови диференціальних рівнянь плоского згину залізобетонної балки в разі простого навантаження для кожного з наближень нелінійної залежності між напруженнями і деформаціями. На основі запропонованого методу побудови диференціальних

рівнянь згину і їх аналітичного рішення в спеціальних функціях вирішена динамічна задача для одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при сейсмічній дії і розглянуто ряд конкретних прикладів для гармонійного кінематичного впливу.

У розділі 3 представлено алгоритм розв'язання динамічних задач плоского згину для одновимірних моделей залізобетонних каркасних будинків, коли лінійність не припускається малою. Основна ідея полягає в розбитті процесу вигину (процесу деформування) на ряд етапів, в межах кожного з яких нелінійність можна вважати малою. Побудова алгоритму також складається з декількох етапів.

А. Побудова асимптотичних розкладів для приростів напружень, деформацій і переміщень в точках залізобетонної балки при плоскому згині за ступенями малого параметра. Ця побудова проводиться на кожному етапі згину аналогічно побудові, зробленої в розділі 2.

Б. Побудова диференціальних рівнянь етапу плоского згину залізобетонної балки з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності бетону. У розділі 3 під приростом ΔX будь-якої величини X мається на увазі різниця $X - X^*$, де X^* — значення цієї величини на початку даного етапу. Для $\Delta\sigma_0$, $\Delta\varepsilon_0$, ΔD_σ і ΔD_ε мають місце співвідношення:

$$\Delta\sigma_0 = 3K^{[0]*}[1 + \mu\kappa(\Delta\varepsilon_0)]\Delta\varepsilon_0, \Delta D_\sigma = 2G^{[0]*}[1 + \mu\rho(\Delta\gamma_0)]\Delta D_\varepsilon \quad (14)$$

Тут $K^{[0]*}$ — початковий (для даного етапу) модуль об'ємного стиску матеріалу балки, $G^{[0]*}$ — початковий модуль зсуву, $\Delta\sigma_0$ — приріст середнього напруження, $\Delta\varepsilon_0$ — при-

ріст середнього подовження, $\Delta\gamma_0$ – приріст октаедричної деформації зсуву, $\Delta\mathbf{D}_\sigma$ і $\Delta\mathbf{D}_\varepsilon$ – прирости девіатора тензору напружень \mathbf{T}_σ і деформації \mathbf{T}_ε відповідно. Наявність малого параметра μ означає, що виникаючі деформації бетону в межах даного етапу є такими, що відхилення співвідношення (14) від закону Гука невелика.

Викладки, аналогічні проведеним в розділі 2, призводять до наступних диференціальних рівнянь:

а) для першого наближення

$$H \frac{d^2 \Delta\phi^{[0]}}{ds^2} + (R_{O,1} \sin \Delta\phi^{[0]} - R_{O,2} \cos \Delta\phi^{[0]}) [1 - D \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}] = 0; \quad (15)$$

б) для другого наближення

$$H \frac{d^2 \Delta\phi^{[1]}}{ds^2} + (R_{O,1} \sin \Delta\phi^{[1]} - R_{O,2} \cos \Delta\phi^{[1]}) [1 - D \frac{d\Delta\phi^{[1]}}{ds}] = - \frac{d\tilde{M}_3^{[0]}}{ds}. \quad (16)$$

При цьому права частина рівняння (16) залежить як від величин, визначених у першому наближенні, так і від величин, визначених на попередніх етапах деформування балки.

В результаті рішення рівнянь (15) і (16) визначаються прирости функції кутів повороту поперечних перерізів балки:

$$\Delta\phi(s) = \Delta\phi^{[0]}(s) + \mu\Delta\phi^{[1]}(s). \quad (17)$$

Для побудови функцій приростів прогинів балки використовується рівність

$$\Delta v(s) = \int_0^s \Delta\phi(\xi) d\xi + \Delta v(0). \quad (18)$$

Етап завершується визначенням значень цих величин наступним чином:

$$\phi = \phi^* + \Delta\phi, v = v^* + \Delta v, \varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{i,j}^* + \Delta\varepsilon_{i,j}, \sigma_{i,j} = \sigma_{i,j}^* + \Delta\sigma_{i,j}, \eta = \eta^* + \Delta\eta, \quad (19)$$

(величини, помічені зірочкою, отримані в кінці попереднього етапу).

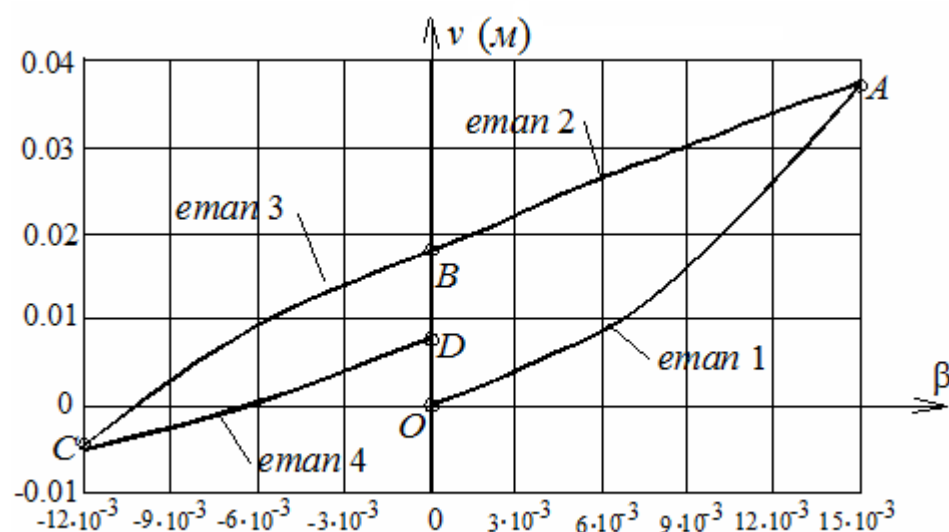


Рис. 4 Графік зміни прогину консолі

Далі наводиться рішення нелінійної пружнопластичної задачі плоского квазістатичного згину залізобетонної консольної балки для випадку великої нелінійності. При цьому на кожному етапі необхідно визначати не тільки розташування стиснутих і розтягнутих зон, але і їх

розбиття на підзони навантаження і розвантаження. Рішеннями рівнянь (15) і (16) визначаються прирости кутів повороту перерізів балки на кожному з етапів. Потім за допомогою (17) - (19) визначаються прогини балки і напруження в ній. Розглянуто конкретний приклад. Параметри балки такі ж, як і в попередніх прикладах максимальна величина сили F_2 дорівнює 10 kH . На рис. 4 наведено графік залежності прогину кінця консолі від $\beta = F_2 l^2 / H$. Графік утворює гістерезисну петлю, яка виявляється незамкнутою через виникнення залишкових деформацій протягом циклу.

Далі розглядається динамічна задача для одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди. Як і в розділі 2 розглядається рух зосередженої маси M , розташованої на кінці залізобетонної колони, основа якої переміщується по горизонталі з прискоренням $W(t) = w_0 \sin pt$. У розділі 2 залишкові деформації були практично відсутніми через порівняно слабкий вплив на конструкцію. У третьому розділі w_0 є істотно більшим ($w_0 = 0,25 \text{ м/с}^2$), що призвело до відмінності реакцій колони на етапах навантаження і розвантаження. На рис. 5 представлені графіки руху вантажу при різних значеннях $\lambda = p / \omega_0$. Крива 1 відповідає $\lambda = 0,75$, крива 2 – $\lambda = 1$. Отже, запропонований вище метод дослідження динаміки залізобетонних балок з урахуванням фізичної нелінійності і пластичності матеріалів для випадків малої нелінійності поширено на випадок великої нелінійності шляхом розбиття процесу згину на ряд етапів, в межах кожного з яких нелінійність виявляється малою. Побудовано диференціальні рівняння згину першого і другого наближень для кожно

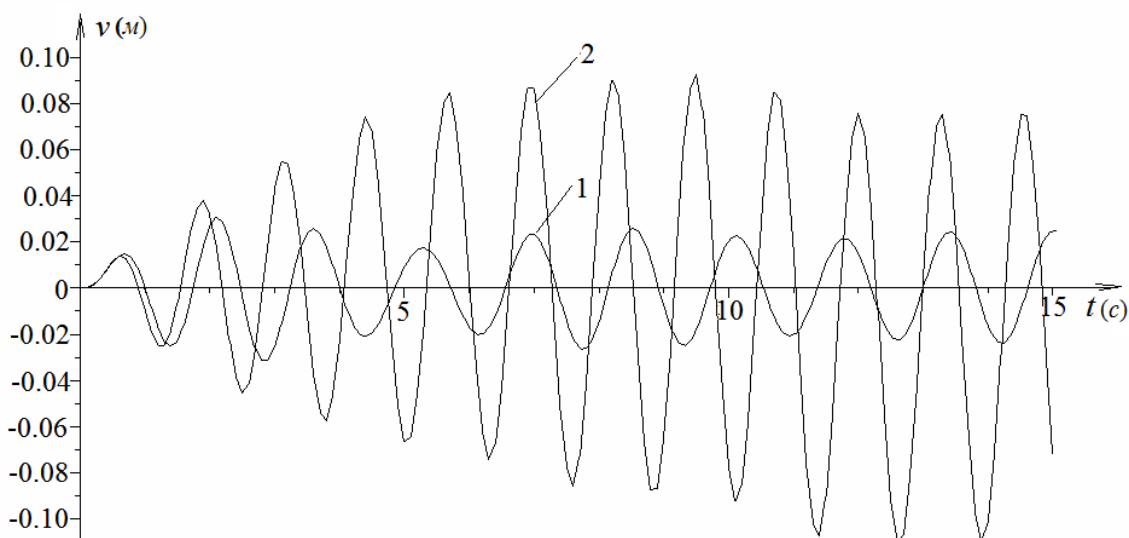


Рис. 5 Графіки коливань вантажу на колоні

го з етапів. Досліджено динаміку одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при динамічних впливах великої амплітуди.

У четвертому розділі дисертації представлено метод вирішення квазістатичних і динамічних задач для одновимірних моделей залізобетонних каркасних споруд, який заснований на теорії пластичної течії при складному навантаженні з використанням методу граничних елементів, який отримав в дисертації подальший розвиток. Розробка методики застосування методу граничних елементів для зазначеного класу задач складається з декількох етапів.

В теорії пластичної течії збільшення деформацій представляються у вигляді суми пружних і пластичних складових:

$$d[\varepsilon] = d[\varepsilon]_e + d[\varepsilon]_p,$$

$d[\varepsilon] = [d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{12}]$ (ε_{ij} – елементи тензора деформацій. Передбачається, що балка знаходиться в стані плоскої деформації). Відповідно до асоційованого закону пластичної течії приріст пластичної деформації записується в наступному вигляді:

$$d[\varepsilon]_p = \vartheta \frac{\partial F([\sigma], \chi)}{\partial [\sigma]},$$

де F – функція навантаження, χ – параметр зміцнення, $[\sigma] = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]$ (σ_{ij} – елементи тензора деформацій), ϑ – коефіцієнт пропорційності.

З наведених співвідношень випливає, що

$$d[\sigma] = [D]_{ep} d[\varepsilon],$$

де

$$[D]_{ep} = [D]_e - [D]_e \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \left[\frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right]^T [D]_e \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right]^T [D]_e \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} - \frac{\partial F}{\partial \chi} [\sigma]^T \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right\}^{-1} \quad (20)$$

($[D]_{ep}$ – пружно-пластична матриця матеріалу). Функція навантаження має наступний вигляд:

$$F([\sigma], \chi) = F_l([\sigma]) + h(\chi)$$

($F_l([\sigma])$ – функція, яка визначає граничну поверхню і умову міцності $F_l([\sigma]) = 0$ в просторі напружень, $h(\chi)$ – функція зміцнення). Для плоского деформованого стану

$$F_l([\sigma]) = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2(R_c - R_p)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 4\sigma_{12}^2 - \frac{1}{3}(R_c + R_p)^2.$$

В якості функції зміцнення прийнята функція

$$h(\chi) = -\tilde{F}_l(\tilde{\sigma}_{11}(\chi)),$$

де через $\tilde{F}_l(\tilde{\sigma}_{11})$ позначена $F_l([\sigma])$ при осьовому розтязі (стиску) в умовах плоскої деформації, тобто

$$\tilde{F}_l(\tilde{\sigma}_{11}(\chi)) = \tilde{\sigma}_{11}^2(\chi) + 2(R_c - R_p)\tilde{\sigma}_{11}(\chi) - \frac{1}{3}(R_c + R_p)^2. \quad (21)$$

Тут R_c і R_p – межі міцності матеріала при осьових стиску і розтязі. В дисертації прийнято, що для бетону $R_c = R_{bn} = f_{ck}$, $R_p = R_{btm} = f_{ctk}$.

Оскільки поточні значення напружень (компоненти вектора $[\sigma]$) повинні лежати на поверхні навантаження, тобто повинні задовольняти рівнянню

$$F([\sigma], \chi) = 0,$$

то $\tilde{F}_l(\tilde{\sigma}_{11}(\chi)) = F_l([\sigma])$ і (21) являє собою квадратне рівняння щодо $\tilde{\sigma}_{11}(\chi)$, звідки воно і визначається.

Для розрахунків використовується апроксимація залежності $\sigma - \varepsilon$ для одновимірного стиску, яка була рекомендована Європейським комітетом по бетону:

$$\sigma = R_b \frac{\lambda_0 \eta}{1 + A_0 \eta + B_0 \eta^2 + C_0 \eta^2}.$$

Тут $\eta = \varepsilon / \hat{\varepsilon}$. У разі одновимірного розтягу R_b замінюється константою $R_{bt} = f_{cdt}$.

В одновимірному випадку

$$d\chi = \tilde{\sigma}_{11} d\tilde{\varepsilon}_{11p}$$

($\tilde{\varepsilon}_{11p}$ – пластична деформація стержня). Побудова алгоритму застосування методу граничних елементів для зазначеного класу задач складається з декількох етапів.

А. Побудова диференціальних рівнянь плоского згину залізобетонної балки на основі теорії пластичної течії. Рівність нулю нормальних і дотичних напружень на верхній і нижній гранях балки, а також умови рівноваги ділянки балки призводять до наступної системи лінійних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} \Delta a_k = W_{i,1} \Delta \xi_1 + W_{i,2} \Delta \xi_2 + W_{i,3} \Delta \xi_3 + W_{i,4} \Delta \xi_4 \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (22)$$

де Δa_i ($i = 1, 2, 3$) – прирости коефіцієнтів a_i ($i = 1, 2, 3$) з (2), $\Delta a_4 = \Delta b_1$, $\Delta a_5 = \Delta b_2$ (Δb_i ($i = 1, 2$) – прирости b_i ($i = 1, 2$) з тієї же формули), $\Delta a_6 = \Delta \varepsilon_s$, $\Delta \xi_1 = \Delta \phi$, $\Delta \xi_2 = \Delta \phi'$, $\Delta \xi_3 = \Delta \zeta_1$, $\Delta \xi_4 = \Delta \zeta_2$, $\zeta_1 = R_{0,1} / H_0$, $\zeta_2 = R_{0,2} / H_0$, $H_0 = H/l$ (H – початкова згинальна жорсткість балки $R_{0,1}$ і $R_{0,2}$ – горизонтальна і вертикальна складові системи сил, прикладеної до лівого торцевого перерізу). Коефіцієнти $U_{i,k}$ ($i, k = 1, 2, \dots, 6$) і $W_{i,j}$ ($i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3, 4$) обчислюються через значення величин напружень і деформацій, визначених на попередньому кроці. Рішення системи (22) може бути представлено в такий спосіб:

$$\Delta a_i = d_i^{(1)} \Delta \phi + d_i^{(2)} \Delta \phi' + d_i^{(3)} \Delta \zeta_1 + d_i^{(4)} \Delta \zeta_2 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Тут $[d^{(m)}]$ ($m = 1, 2, 3, 4$) – рішення лінійних систем рівнянь

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} d_k^{(m)} = W_{i,m} \quad (i = 1, 2, \dots, 6; m = 1, 2, 3, 4),$$

причому $d_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3, 4$) не залежать від $\Delta \phi$, $\Delta \phi'$, $\Delta \zeta_1$ и $\Delta \zeta_2$.

Показано, що прирости внутрішніх усилій можуть бути представлені так:

$$\begin{aligned} \Delta Q_2 &= G_1 \Delta \phi + G_2 \Delta \zeta_1 + G_3 \Delta \zeta_2, \\ \Delta Q_1 &= G_4 \Delta \phi + G_5 \Delta \zeta_1 + G_6 \Delta \zeta_2, \\ \Delta M_3 &= Y_1 \Delta \phi + Y_2 \Delta \phi' + Y_3 \Delta \zeta_1 + Y_4 \Delta \zeta_2, \end{aligned} \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} G_1 &= -H_0 (\zeta_1 \cos \phi + \zeta_2 \sin \phi), G_2 = -H_0 \sin \phi, G_3 = H_0 \cos \phi, \\ G_4 &= H_0 (\zeta_1 \sin \phi - \zeta_2 \cos \phi), G_5 = -H_0 \cos \phi, G_6 = -H_0 \sin \phi, \end{aligned}$$

$$Y_j = \sum_{k=1}^6 U_{7,k} d_k^{(j)} - \delta_{1,j} W_{7,2} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Підстановка (23) в співвідношення

$$\Delta M'_3 = -\Delta Q_2$$

призводить до диференціальних рівнянь щодо приростів кутів повороту поперечних перерізів балки:

$$\Delta \phi'' + Z_1 \Delta \phi' + Z_2 \Delta \phi + Z_3 \Delta \zeta_1 + Z_4 \Delta \zeta_2 = 0. \quad (24)$$

Тут $Z_1 = (Y'_1 + Y_2) / Y_1$, $Z_2 = (Y'_2 - G_1) / Y_1$, $Z_3 = (Y'_3 - G_2) / Y_1$, $Z_4 = (Y'_4 - G_3) / Y_1$.

З умов рівноваги відрізка балки випливає

$$\Delta M_3 + M_3(\Delta R_{O,1}) + M_3(\Delta R_{O,2}) + \Delta M_{o,3} = 0.$$

При $s = 0$ ця рівність виглядає так:

$$d_i^{(1)}(0) \Delta \phi(0) + d_i^{(2)}(0) \Delta \phi'(0) + d_i^{(3)}(0) \Delta \zeta_1 + d_i^{(4)}(0) \Delta \zeta_2 + \Delta M_{o,3} = 0.$$

Ця рівність є одною з початкових умов для диференціального рівняння (24). Решта початкових умов визначається з умов закріплення лівого кінця балки.

Б. Побудова матриць методу граничних елементів для розв'язання плоских квазістатичних нелінійних задач згину залізобетонних балок і рам.

Рівняння (24) може бути записано в наступному вигляді:

$$\Delta v''' + Z_1(s) \Delta v'' + Z_2(s) \Delta v' = -Z_3(s) \frac{\Delta R_{O,1}}{H_0} - Z_4(s) \frac{\Delta R_{O,2}}{H_0}. \quad (25)$$

Для наближеної побудови фундаментальних розв'язків задачі Коші для однорідного диференціального рівняння, відповідного (25), ділянка балки розбивається на ряд сегментів, кожному з яких відповідає диференціальне рівняння (25) з постійними коефіцієнтами. На i -му сегменті:

$$y''' + z_{1,i} y'' + z_{2,i} y' = -z_{3,i} \frac{\Delta R_{O,1}}{H_0} - z_{4,i} \frac{\Delta R_{O,2}}{H_0}. \quad (26)$$

Тут $z_{k,i}$ – значення функції $Z_k(s)$ на початку i -го сегмента ($k = 1, 2, 3, 4$).

Якщо $A(x)$ – матриця фундаментальних рішень задачі Коші для однорідного диференціального рівняння, відповідного (25), а $B_1(x)$ і $B_2(x)$ – вектори окремих рішень цього рівняння, то довільне рішення диференціального рівняння (25) запишеться так:

$$X(x) = A(x)X(0) + B_1(x)\Delta R_{O,1} + B_2(x)\Delta R_{O,2}, \quad (27)$$

$$X(x) = \begin{bmatrix} \Delta v(x) \\ \Delta v'(x) \\ \Delta v''(x) \end{bmatrix}.$$

Якщо ввести стовпець приростів переміщень і внутрішніх зусиль так

$$\tilde{X}(x) = \begin{bmatrix} \Delta v(x) \\ \Delta v'(x) \\ \Delta M_3(x) \\ \Delta \tilde{N}(x) \\ \Delta \tilde{Q}(x) \end{bmatrix},$$

то рівність (27) можна записати в наступному вигляді:

$$\tilde{X}(x) = \tilde{S}(x)\tilde{X}(0). \quad (28)$$

Тут $\tilde{S}(x)$ – деяка матриця, елементи якої обчислюються через елементи матриці $A(x)$ і векторів $B_1(x)$ і $B_2(x)$.

В. Рішення квазістатичних задач. Досліджується переміщення рами під дією сил, що повільно змінюються з плином часу, в результаті чого сили інерції зосереджених мас, розташованих у вузлах рами, виявляються дуже малими в порівнянні з діючими силами. На кожному кроці прирости переміщень і внутрішніх зусиль в будь-якому перерізі балки визначаються відповідно до (28). Після закінчення кроку визначаються нові значення прогинів, кутів повороту перерізів, поперечних і поздовжніх сил і згинальних моментів шляхом складання значень цих величин, отриманих в результаті попереднього кроку з їх приростами на даному етапі.

Г. Рішення динамічних задач. На підставі методу лінійних прискорень Ньюмарка прирости прискорень зосереджених мас визначаються за формулами:

$$\Delta a = \frac{6}{(\Delta t)^2} [\Delta v - V\Delta t - \frac{1}{2} a(\Delta t)^2]. \quad (29)$$

Тут Δt – часовий крок, Δv – вектор приростів переміщень точок, V і a – вектори їх швидкостей і прискорень, знайдені на попередньому кроці.

Прирости переміщень вузлів рами і прирости реакцій конструкції по відношенню до зосереджених мас пов'язані залежністю

$$\Delta v = -Y\Delta R \quad (30)$$

(Y – матриця коефіцієнтів впливу в вузлах).

Використовуючи систему основних рівнянь динаміки для зосереджених мас, приходимо до наступної рівності:

$$\Delta R = [I + \frac{6}{(\Delta t)^2} MY]^{-1} \{ \frac{6}{(\Delta t)^2} M[V\Delta t + a \frac{(\Delta t)^2}{2}] + \Delta F \}$$

(M – діагональна матриця мас точок, Δa – вектор - стовпець приростів прискорень, ΔF – вектор приростів збудуючих сил), з якого визначається ΔR , а потім з (30) і (29) Δv і Δa .

За формулами $\Delta V = (a + \frac{1}{2} \Delta a)\Delta t$, $\Delta v = V\Delta t + \frac{1}{2}(a + \frac{1}{3} \Delta a)(\Delta t)^2$

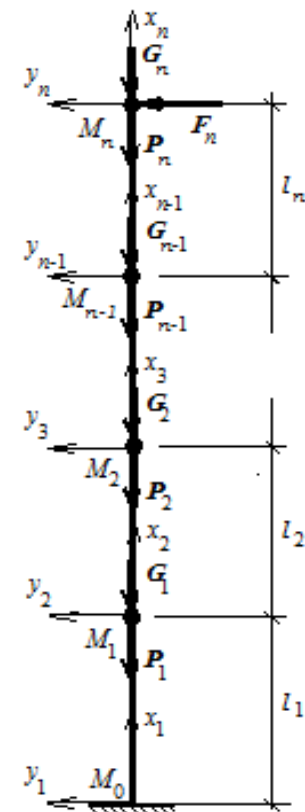


Рис. 6 Розрахункова схема будівлі

обчислюються прирости прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок, відповідні проміжку часу Δt . Завершується крок обчисленням нових значень прискорень, швидкос-

тей і переміщень $\mathbf{a}_{нов} = \mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}$, $\mathbf{V}_{нов} = \mathbf{V} + \Delta\mathbf{V}$, $\mathbf{v}_{нов} = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ (\mathbf{v} — вектор переміщень, визначений на попередньому кроці).

Проведено дослідження динамічної стійкості одновимірної моделі багатоповерхової залізобетонної каркасної будівлі, тобто колони з системою зосереджених мас, що знаходяться під дією системи постійних і змінних в часі осьових сил. Досліджуються згинні коливання залізобетонної колони в площині її найменшої жорсткості, викликані імпульсною дією F_n і системами осьових постійних сил $P_k (k = 1, 2, \dots, n)$ і змінних вертикальних сил $G_k (k = 1, 2, \dots, n)$ (рис. 6).

У конкретному прикладі розглядаються коливання трьох вантажів масою $25T$ кожен на триповерховій колоні (висота поверху $l = 4$ м), викликані впливом горизонтального імпульсу F_3 тривалістю 1 с і величиною 1 кН і вертикальних сил $G_k = \hat{G} \sin pt (k=1, 2, 3; \hat{G}=60$ кН). Поперечний переріз колони та її армування такі ж, як і в попередніх прикладах. Графіки руху вантажів при $p = 2,095$ с⁻¹ представлені на рис. 7.

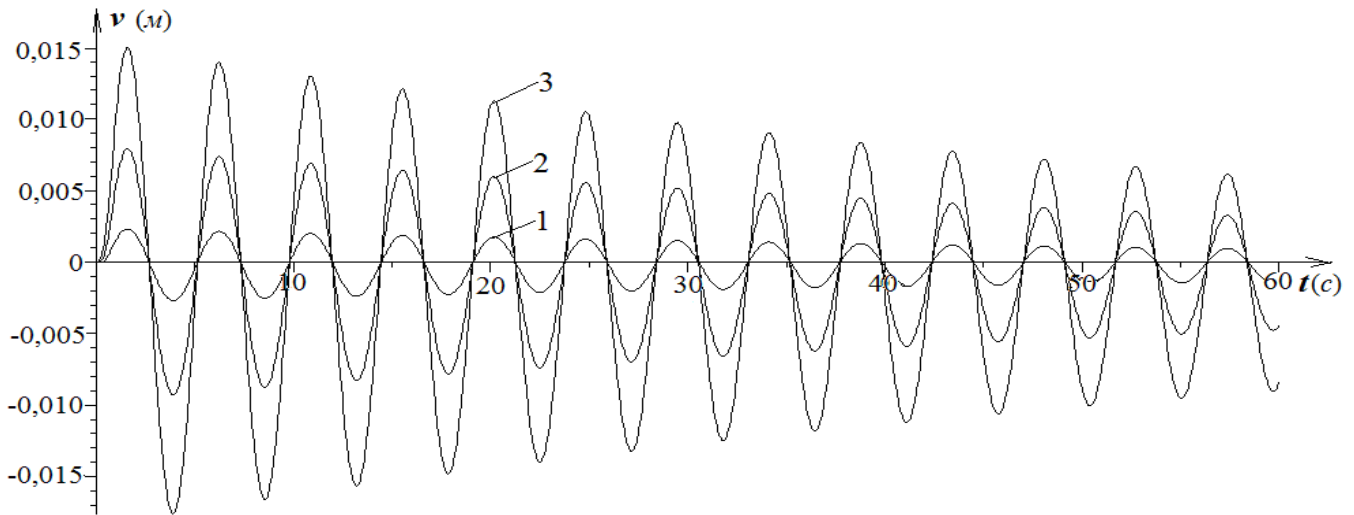


Рис. 7 Коливання вантажів на колоні при відсутності параметричного резонансу

Нехай тепер $p = 2\omega_1 = 2,706$ с⁻¹ (ω_1 — перша кругова частота вільних коливань). Графіки руху вантажів в цьому випадку представлені на рис. 8.

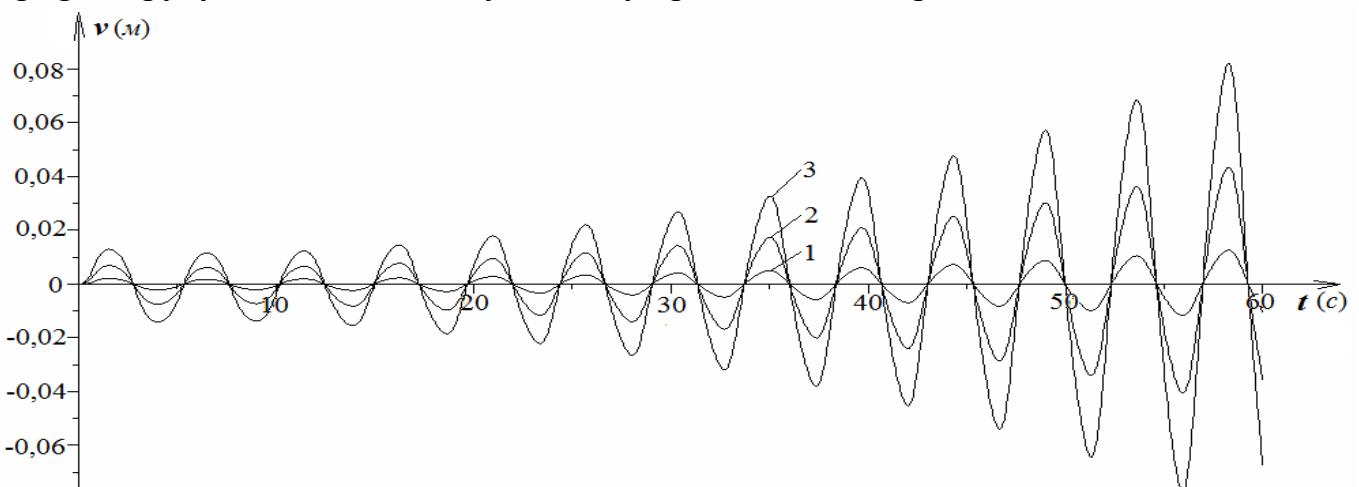


Рис. 8 Коливання вантажів на колоні при наявності параметричного резонансу

Помітно розгойдування коливань. Таке явище (тобто розгойдування поперечних коливань під дією поздовжніх періодичних сил) носить назву параметричного резонансу, або втратою динамічної стійкості. небезпека параметричних резонансів полягає в тому, що наявність демпфуючих сил не впливає на характер наростання коливань – амплітуда зростає необмежено і при їх наявності.

Отже, в розділі 4 побудовано диференціальне рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням геометричної та фізичної нелінійностей і пластичності бетону при складному навантаженні виходячи з асоційованого закону пластичної течії для покрокового вирішення задач динаміки залізобетонних балок і рам.

На основі отриманого рівняння побудовано алгоритм методу граничних елементів для квазістатичних і динамічних розрахунків залізобетонних балок і рам.

Вивчено коливання одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди під дією змінних горизонтальних і вертикальних сил. виявлено явище динамічної нестійкості і параметричного резонансу.

У п'ятому розділі представлені методи розв'язання динамічних задач для двовимірних моделей залізобетонних каркасних споруд. В якості попереднього етапу рішення динамічної задачі для плоскої моделі багатопрольотної каркасної споруди розглядається квазістатична задача, тобто досліджується рух плоскої залізобетонної багатопрольотної рами в своїй площині, викликаний системою горизонтальних і вертикальних сил, що повільно змінюються (рис. 9).

Рама представляється у вигляді системи суперелементів, тобто більш простих рам: перший – П-подібна рама, яка утворює перший прольот і складається зі стержнів 1,2 і 3, а кожний наступний суперелемент складається з двох стержнів, що утворюють Г-подібну раму (наприклад, другий - зі стержнів 4 і 5). На рис. 9 номери

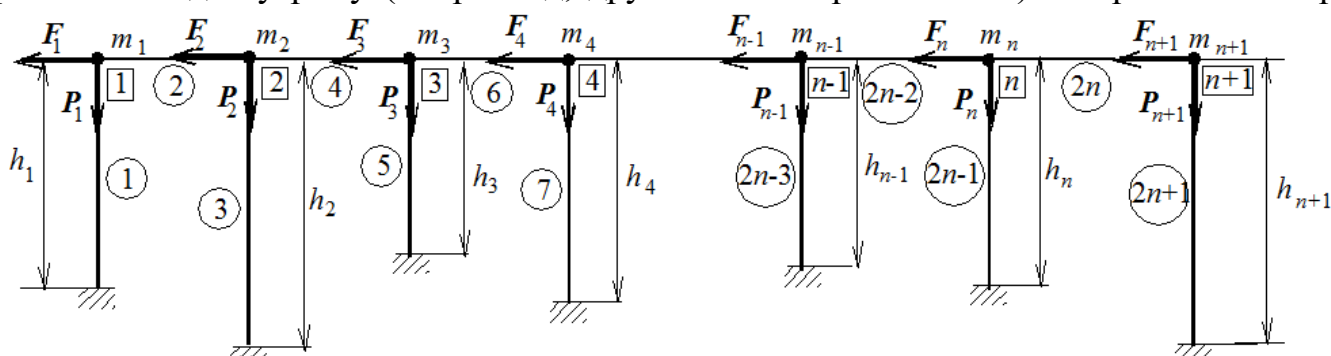


Рис. 9 Схема багатопрольотної рами

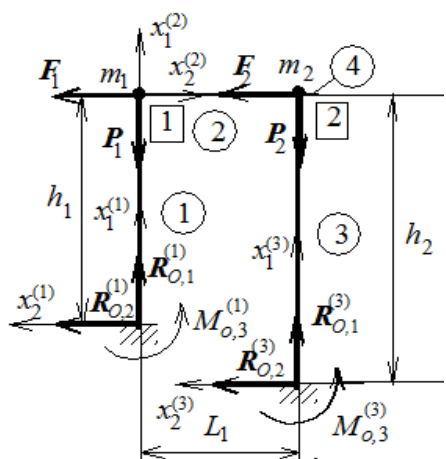


Рис.10 Перший суперелемент

стержнів проставлені в кільцях, номери вузлів (граничних елементів) - в прямокутниках. На рис.10 показані сили, що діють на перший суперелемент. Для стержнів 1 і 3 відповідно до (28) записується рівність

$$\tilde{X}^{(j)}(l_j) = \tilde{S}^{(j)}(l_j) \tilde{X}^{(j)}(0) \quad (j = 1,3), \quad (31)$$

$$l_1 = h_1, l_3 = h_2, \tilde{X}_1^{(j)}(0) = \tilde{X}_2^{(j)}(0) = 0, \tilde{X}_3^{(j)}(0) = -\Delta M_{O,3}^{(j)}, \tilde{X}_4^{(j)}(0) = -\Delta R_{O,1}^{(j)}, \tilde{X}_5^{(j)}(0) = -\Delta R_{O,2}^{(j)} \quad (j = 1,3).$$

3 умов рівноваги граничного елемента 1 і умови

жорсткого з'єднання стержнів у вузлі 1 слід

$$\tilde{X}^{(2)}(0) = D^{(1)} \hat{X}^{(1)}(l_1) + U^{[1]}, \quad (32)$$

де $D^{(1)}$ – матриця розміру 5×5 , $U_4^{[k]} = \Delta F_k$, $U_5^{[k]} = \Delta P_k$.

Аналогічні співвідношення мають місце і для вузла 2

$$\tilde{X}^{(4)}(0) = D^{(2)} \tilde{X}^{(2)}(l_2) + D^{(1)} \tilde{X}^{(3)}(l_3) + U^{[2]}. \quad (33)$$

Формула (33) дозволяє перейти до наступного (другого) суперелемента (рис. 11 при $k = 2$). Для стержня з номером $2k$, що відноситься до k -го прольоту, формула (33) записується так

$$\tilde{X}^{(2k)}(0) = D^{(2)} \tilde{X}^{(2k-2)}(l_{2k-2}) + D^{(1)} \tilde{X}^{(2k-1)}(l_{2k-1}) + U^{[k]}.$$

Звідси випливає, що елементи стовпців $\hat{X}^{(2k)}(0)$, $\hat{X}^{(2k)}(l_{2k})$ та $\hat{X}^{(2k+1)}(l_{2k+1})$ ($k = 1, 2, \dots, n$) є лінійними функціями величин $\Delta R_{O,1}^{(j)}$, $\Delta R_{O,2}^{(j)}$, $\Delta M_{O,3}^{(j)}$ ($j = 1, 3, \dots, 2n + 1$). Загальна кількість цих невідомих величин $N_{\text{невід}} = 3n + 3$.

Умови поздовжньої нестисливості стержнів і жорсткого з'єднання їх у вузлах, а також рівняння рівноваги рами в цілому, еквівалентні рівностям

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_1^{(2k)}(l_{2k}) &= 0 \\ \hat{X}_1^{(2k+1)}(l_{2k+1}) - \hat{X}_1^{(1)}(l_1) &= 0 \\ \hat{X}_2^{(2k)}(l_{2k}) - \hat{X}_2^{(2k+1)}(l_{2k+1}) &= 0 \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, n; \quad \begin{aligned} X_3^{(2n+2)}(0) &= 0 \\ X_4^{(2n+2)}(0) &= 0 \\ X_5^{(2n+2)}(0) &= 0 \end{aligned} .$$

Їх ліві частини являють собою лінійні функції шуканих невідомих, тобто система рівнянь може бути представлена так:

$$E_{i,0} + \sum_{k=1}^{3n+3} E_{i,k} u_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 3n + 3)$$

(u_k ($k = 1, 2, \dots, 3n + 3$) – пронумеровані поспіль невідомі).

Після знаходження значень величин $\Delta R_{O,1}^{(j)}$, $\Delta R_{O,2}^{(j)}$, $\Delta M_{O,3}^{(j)}$ ($j = 1, 3, \dots, 2n + 1$) визначаються значення приростів переміщень і напружень в точках рами, а значить, і значення самих переміщень і напружень, шляхом складання їх зі знайденими на попередніх кроках значеннями. Для вирішення динамічної задачі для цієї моделі використовується крок Г алгоритму.

У цьому ж розділі наведено розрахунок причалу №19 Ізмаїльського морського торговельного порту на динамічні впливи. Схематичний поперечний розріз причалу

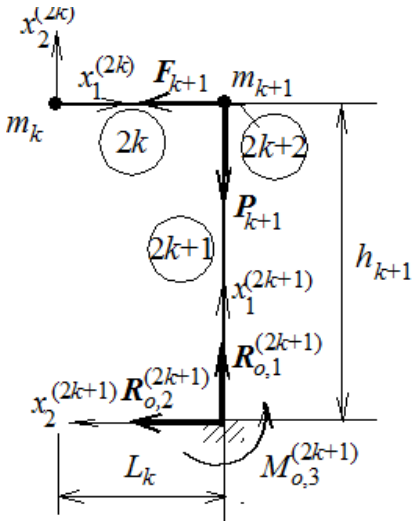


Рис. 11 Суперелемент з номером k

наведено на рис. 12. Дотримуючись загально прийнятої методики, при побудові

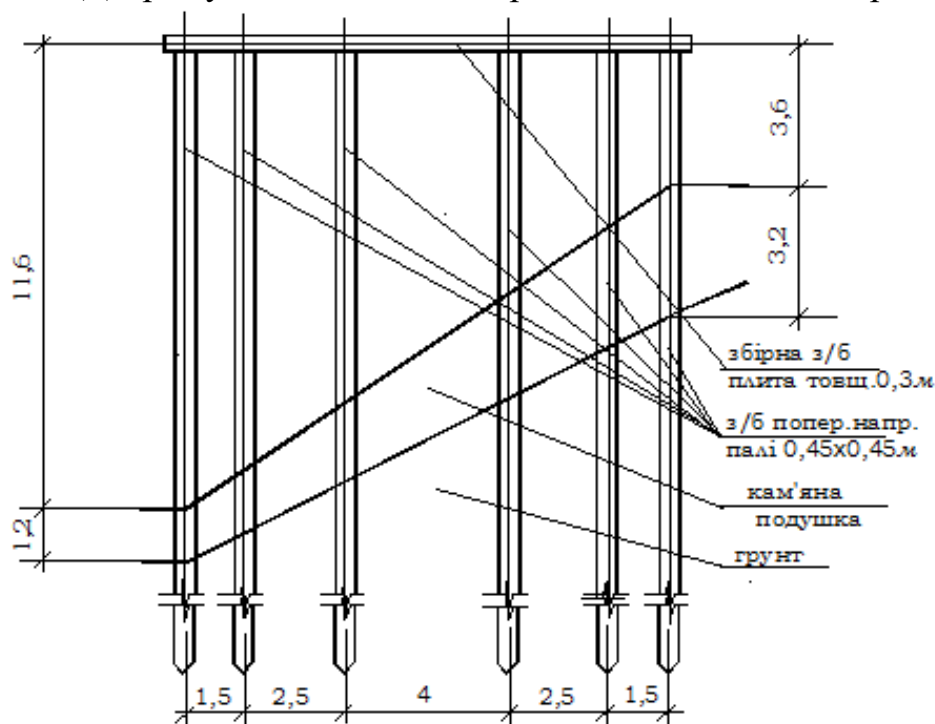


Рис. 12 Поперечний переріз причалу

розрахункової схеми кожна з палей моделюється жорстко затисненою колоною, ширина ригеля приймається рівною довжині кроку колон в поздовжньому напрямку причалу. Досліджуються переміщення отриманої таким чином рами, якщо основі рами надаються горизонтальні зміщення, прискорення яких змінюються з плином часу відповідно до акселерограми.

Спектр Фур'є акселерограми представлений на рис. 14. Максимальне значення абсолютної величини трансформанти Фур'є $|A(k)|$ акселерограми спостерігається при так званій переважній частоті акселерограми $k = k_{пер} = 11,26 \text{ с}^{-1}$. Якщо знехтувати поздовжніми деформаціями стержнів, то виявиться, що рама поводить як система з одним ступенем свободи, причому в якості узагальненої координати обрано переміщення ригеля. Далі використовується викладений вище алгоритм. В результаті отримуємо графік руху, наведений на рис. 15.

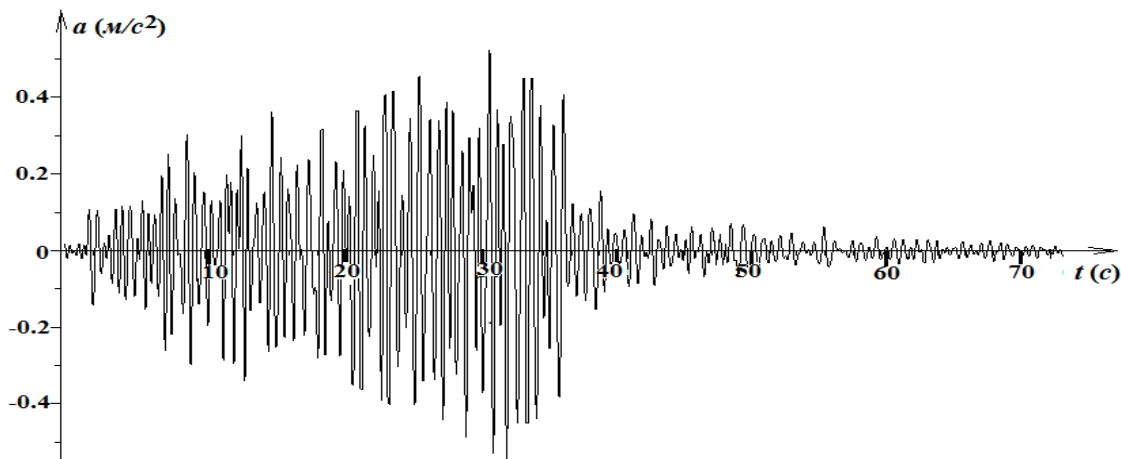


Рис. 13 Розрахункова акселерограма для причалу №19 Ізмаїльського порту

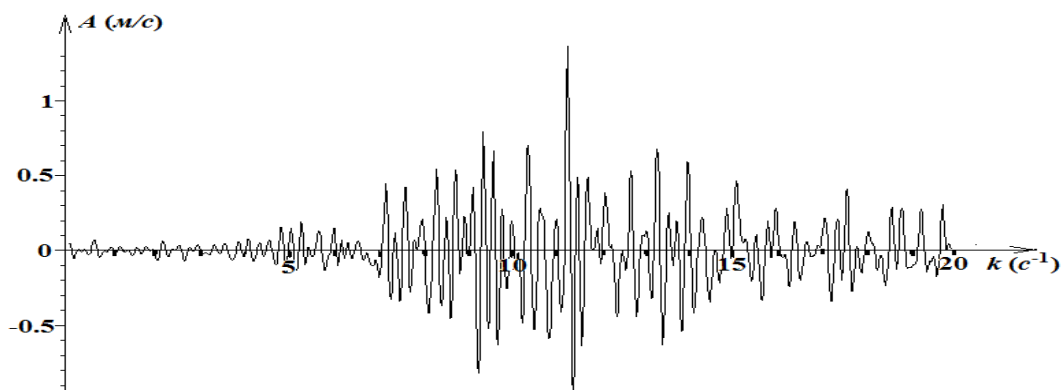


Рис. 14 Спектр Фур'є розрахункової акселерограми

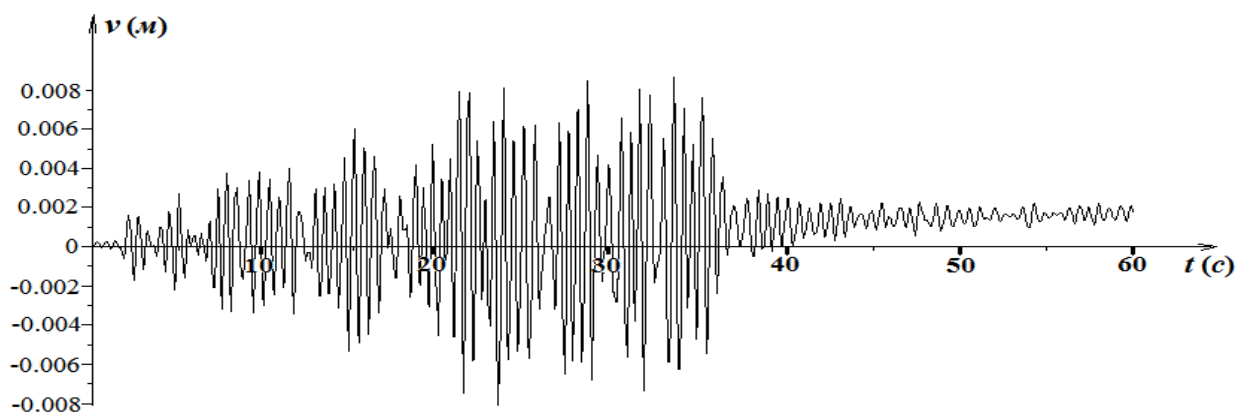


Рис. 15 Графік руху вантажу при відсутності резонансу

В процесі експлуатації на причалі знаходиться корисне навантаження, величина якого може приймати різні значення в межах, визначених нормами. При загальній масі навантаження і причалу, рівній $1,46M$ (M – маса причалу) кругова частота вільних коливань k_0 дорівнює переважній частоті акселерограми. На рис. 16 наведено графік руху зосереджених мас рами в резонансному випадку. При $t = 26с$ він переривається. Це викликано тим, що в цей момент в поперечних перерізах на ділянці одного з вертикальних стержнів виникають напруження розтягу, що перевищують межу міцності бетону на розтяг, тобто починається процес руйнування.

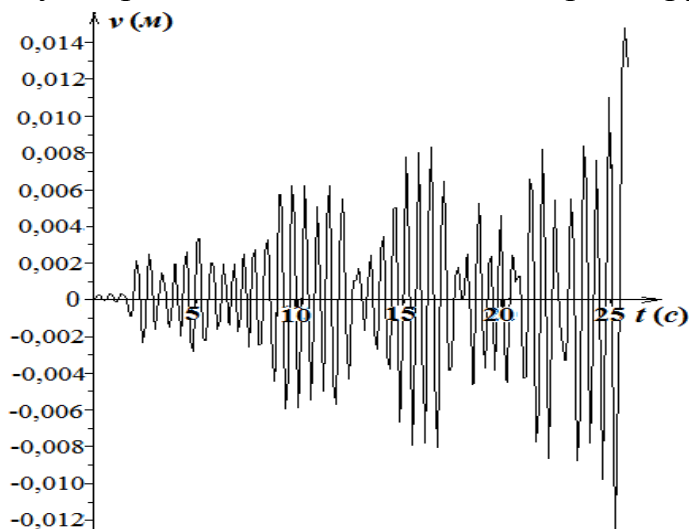


Рис. 16 Графік руху вантажу при резонансі

Далі розглядається динамічна задача для плоскої моделі багатопрольотної багатоповерхової каркасної будівлі. Спочатку досліджується квазістатичний рух плоскої багатоповерхової багатопрольотної залізобетонної рами в своїй площині, викликаний системою горизонтальних і вертикальних сил, прикладених до вузлів рами (рис. 17). Передбачається, що маса рами зосереджена в системі матеріальних точок,

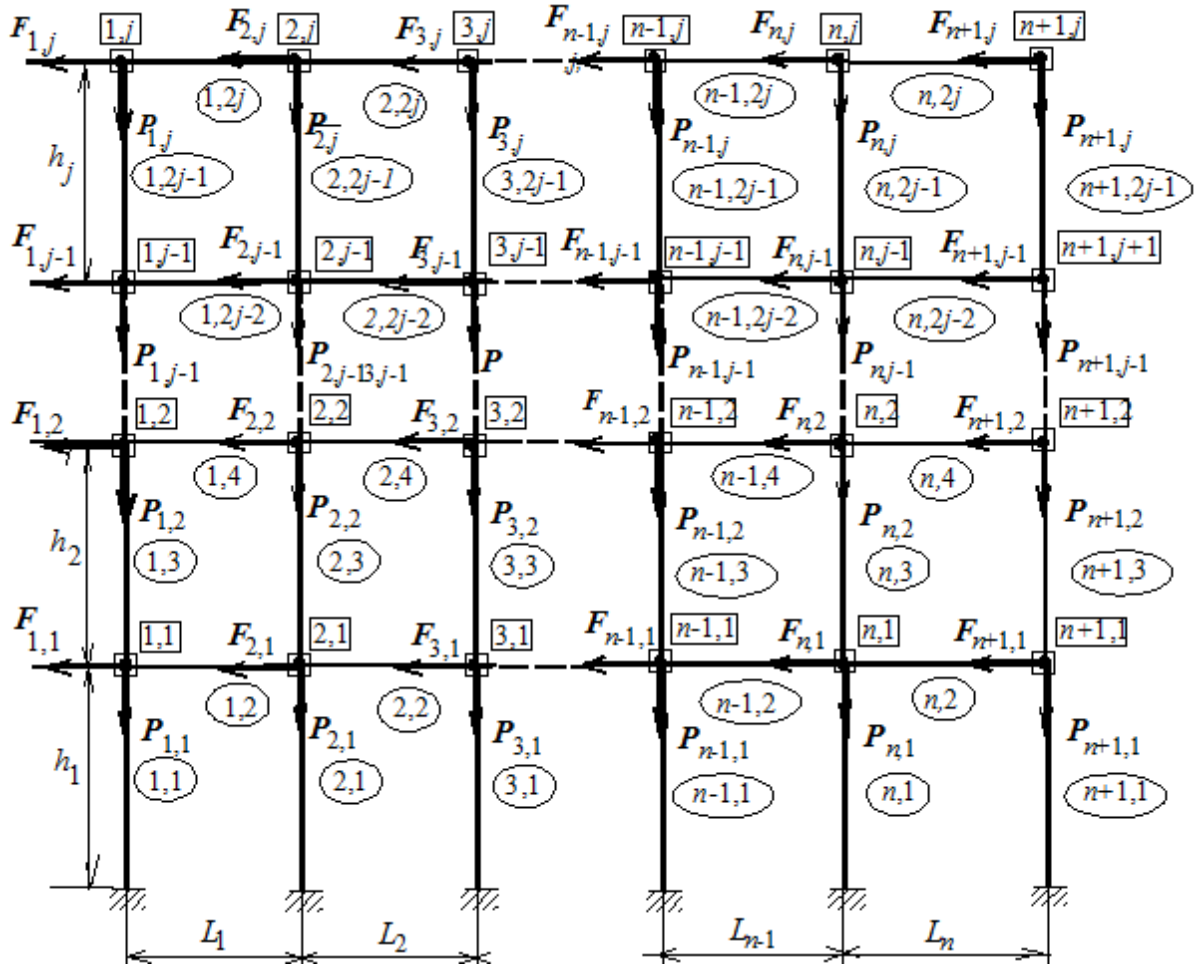


Рис. 17 Розрахункова схема рами

розташованих у вузлах рами. Для вузлів рами вводиться номер, який складається з двох чисел – перше відповідає номеру прольоту, а друге – номеру поверху. Така ж нумерація у стержнів. На рис. 17 номери стержнів проставлені в овалах, вузлів – в прямокутниках.

Вирішення задачі передбачається здійснювати покроковим методом. На кожному кроці навантаження рами отримує прирости $\Delta F^{(k,i)}$ і $\Delta P^{(k,i)}$ ($k=1,2,\dots,n+1$; $i=1,2,\dots,j$; n – число прольотів, j – число поверхів). Рама розглядається як система, що складається з ряду більш простих рам (суперелементів). Один з суперелементів показаний на рис. 18а. Кількість таких суперелементів дорівнює числу прольотів, номер суперелементу збігається з номером прольоту. Ще один суперелемент – крайня права колона рами. Його номер $n+1$. На кожному з стержнів вводиться локальна система координат $x_1^{(k,m)}$, $x_2^{(k,m)}$, при цьому вісь $x_1^{(k,m)}$ направлена уздовж стержня (k , m – його номер, m – парне число для горизонтального стержня і непарне – для вертикального).

Для кожного із стержнів записується рівність (28):

$$\tilde{X}^{(k,m)}(x_{k,m}) = \tilde{S}^{(k,m)}(x_{k,m})\tilde{X}^{(k,m)}(0) \quad (k = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots, 2j).$$

Вводиться стовпець $\tilde{X}^{(k,m)}$ наступним чином:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{(k,m)} &= \Delta u_{k,m}, \quad \tilde{X}_2^{(k,m)} = \Delta v_{k,m}, \quad \tilde{X}_3^{(k,m)} = \Delta v'_{k,m}, \\ \tilde{X}_4^{(k,m)} &= \Delta M_3^{(k,m)}, \quad \tilde{X}_5^{(k,m)} = \Delta Q^{(k,m)}, \quad \tilde{X}_6^{(k,m)} = \Delta N^{(k,m)}, \end{aligned}$$

тобто додається ще один елемент $\Delta u_{k,m}$ – приріст поздовжнього зсуву поперечного перерізу стержня з номером k, m . Формула (28) набуває вигляду

$$\tilde{X}^{(k,m)}(x_1^{(k,m)}) = \tilde{S}^{(k,m)}(x_1^{(k,m)})\tilde{X}^{(k,m)}(0). \quad (34)$$

Після ряду перетворень отримаємо наступний результат:

$$\mathbf{Z}^{(k)} = \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{Z}^{(k-1)} + \hat{\mathbf{L}}^{(k)}. \quad (35)$$

Тут k – номер суперелемента, $\mathbf{Z}^{(k)}$ – вектор, елементами якого є виписані підряд елементи векторів $\tilde{X}^{(k,m)}(L_k)$ ($m = 2, 4, \dots, 2j$), $\mathbf{K}^{(k)}$ – квадратна матриця розміру $6j$, елементи якої залежать від величин, визначених на попередніх етапах рішення, $\hat{\mathbf{L}}^{(k)}$ – вектор, що залежить від $\Delta F_{k,i}$ і $\Delta P_{k,i}$ ($i = 1, 2, \dots, j$).

При побудові матриці $\mathbf{K}^{(k)}$ враховано, що умови рівноваги вузлів з номерами k, i , жорсткого з'єднання стержнів в них і рівності нулю вертикальних переміщень кінців стержнів з номерами k, m ($m = 2, 4, \dots, 2j$) дозволяють виразити величини $\tilde{X}_p^{(k,m)}(l_{k,m})$ ($p = 4, 5, 6; m = 1, 3, \dots, 2j - 1$) через елементи векторів $\tilde{X}^{(k-1,m)}(L_{k-1})$ ($m = 2, 4, \dots, 2j$), що істотно зменшує число невідомих.

Для першого суперелемента (рис. 18 а), $k = 0$) внаслідок відсутності попереднього:

$$\tilde{X}_p^{(0,2i)}(0) = 0 \quad (p = 4, 5, 6; i = 1, 2, \dots, j),$$

тобто $z_{m+3(i-1)}^{(0)} = 0$. Крім того, мають місце такі рівності:

$$\tilde{X}_m^{(0,2i)}(l_{2i}) = 0 \quad (m = 4, 5, 6; i = 1, 2, \dots, j),$$

тобто $z_{2+3(i-1)}^{(0)} = 0$. Інші $2j$ елементів стовпця $\mathbf{Z}^{(0)}$ залишаються невідомими. З формули (35) при $k = 1$ випливає

$$\mathbf{Z}^{(1)} = \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{Z}^{(0)} + \mathbf{L}^{(1)}, \quad (36)$$

а при $k = 2$:

$$\mathbf{Z}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{Z}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}$$

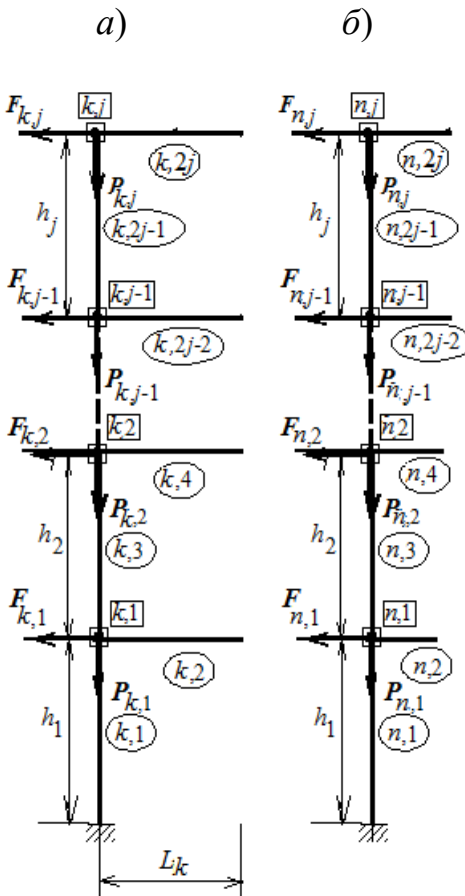


Рис. 18 Рядовий (а) і кінцевий (б) суперелементи

Тоді

$$\mathbf{Z}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{Z}^{(0)} + \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}.$$

Продовження цього алгоритму на n -му кроці призводить до такого результату:

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \hat{\mathbf{K}}^{(n)} \mathbf{Z}^{(0)} + \hat{\mathbf{L}}^{(n)}, \quad (37)$$

де

$$\hat{\mathbf{K}}^{(n)} = \prod_{p=0}^{n-1} \mathbf{K}^{(n-p)}, \quad \hat{\mathbf{L}}^{(n)} = \sum_{q=1}^{n-1} \prod_{p=0}^{q-1} \mathbf{K}^{(n-p)} \mathbf{L}^{(n-q)} + \mathbf{L}^{(n)}.$$

До кінцевого $(n + 1)$ -го суперелемента додані фіктивні незавантажені стержні з номерами $n + 1, 2i$ ($i = 1, 2, \dots, j$) (рис.18б). Внаслідок фактичної відсутності цих стержнів мають місце такі рівності:

$$\tilde{\mathbf{X}}_p^{(n+1, 2i)}(0) = 0 \quad (p = 4, 5, 6; i = 1, 2, \dots, j),$$

які можна виразити так:

$$\mathbf{R}^{(n+1)} \mathbf{W}^{(n+1)} + \mathbf{T}^{(n+1)} \hat{\mathbf{K}}^{(n)} \mathbf{Z}^{(0)} = \mathbf{V}^{(n+1)}. \quad (38)$$

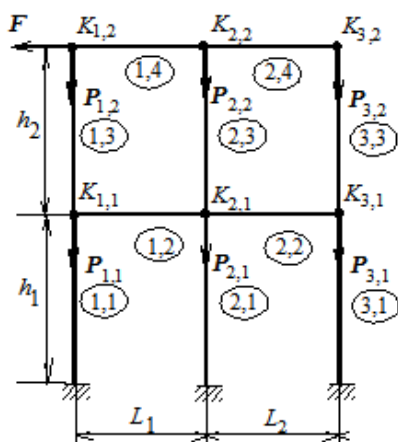
Тут $\mathbf{R}^{(n+1)}$ – прямокутна матриця розмірності $5j \times 3j$,

$\mathbf{T}^{(n+1)}$ – розмірності $5j \times 6j$, $\mathbf{W}^{(n+1)}$ – матриця - стовпець з невідомими елементами $w_p^{(n+1)}$ ($p = 1, 2, \dots, 3j$).

Стовпець $\mathbf{Z}^{(0)}$ містить $2j$ невідомих величин. Отже, матрична рівність (37) представляє собою лінійну систему $5j$ скалярних рівнянь щодо $5j$ невідомих, рішення якої дає можливість визначити стовпці $\mathbf{W}^{(n+1)}$ і $\mathbf{Z}^{(0)}$, а через них $\mathbf{Z}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а, отже, і прирости переміщень точок і зусиль в стержнях рами.

При вирішенні динамічної задачі використовується етап Г алгоритму. Як приклад досліджується динаміка двоповерхової двопрогонової залізобетонної рами (рис. 19), викликана імпульсним впливом.

Рис.19 Розрахункова схема рами



Маси матеріальних точок (вантажів) $m_{i,k} = 35 T$ ($i = 1, 3; k = 1, 2$). Вертикальні сили – вага вантажів. Геометричні параметри: $L_1 = L_2 = h_1 = h_2 = 8 \text{ м}$. Розміри по-перечних перерізів: колон $b = 0.8 \text{ м}$, $h = 0.28 \text{ м}$, ригелей $b = 0.8 \text{ м}$, $h = 0.5 \text{ м}$. Армування симметричне: $A_{s1} = A_{s2} = 8,5 \text{ см}^2$. Передбачається, що навантаження рами відбувається в два етапи. На першому етапі здійснюється поступове збільшення маси вантажів. Потім при $t = 0$ до зосередженої маси $K_{1,2}$ прикладається імпульс, тривалість якого дорівнює 2 с , а величина 50 кН . Після закінчення дії імпульса, рама з вантажами здійснює вільні коливання.

Графіки руху вантажів $K_{1,1}$ (суцільна лінія) і $K_{1,2}$ (штрихова лінія) представлені на рис. 20.

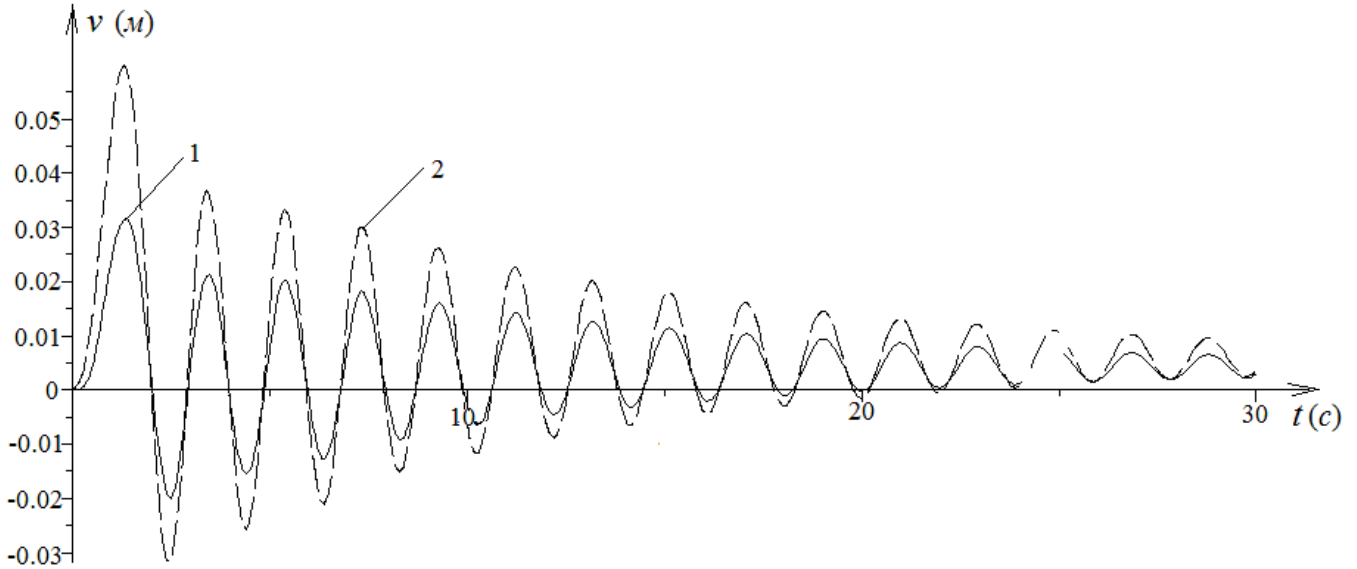


Рис. 20 Графіки руху ригелів рами

У шостому розділі приводиться побудова алгоритму застосування методу граничних елементів до вирішення динамічних задач для просторових моделей залізобетонних каркасних споруд з використанням теорії пластичної течії. Ця побудова також здійснюється в кілька етапів.

А. Побудова диференціальних рівнянь просторового згину залізобетонної балки з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності бетону при складному навантаженні.

Компоненти тензора деформацій в точках зігнутої балки визначаються з співвідношень

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= (x_3 + u_3)\omega_2 - (x_2 + u_2)\omega_3 + u_{1,1}, \quad \varepsilon_{12} = [u_1\omega_3 - (x_3 + u_3)\omega_1 + u_{1,2} + u_{2,1}]/2, \\ \varepsilon_{13} &= [(x_2 + u_2)\omega_1 - u_1\omega_2 + u_{1,3} + u_{3,1}]/2, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}), \quad \varepsilon_{33} = u_{3,3} \end{aligned} \quad (39)$$

Тут ω_i ($i=1,2,3$) – компоненти вектора кутової швидкості повороту базису e_i ($i=1,2,3$; e_2 і e_3 спрямовані уздовж осей симетрії поперечного перерізу) при русі центру перерізу C уздовж зігнутої осі балки з одиничною швидкістю, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ($j=2,3$), $u_{i,1} = \frac{\partial u_i}{\partial s}$ (s – дугова координата точки C). Для орієнтації базису

e_i ($i=1,2,3$) відносно нерухомого базису e_i^0 ($i=1,2,3$) обрані кути О.М. Крилова. Коефіцієнти β_{ij} ($i, j=1,2,3$) розкладання векторів e_i^0 по векторах базису e_i ($i=1,2,3$), а також величини ω_i ($i,j=1,2,3$) визначаються через кути Крилова ϕ , ψ і θ .

Приріст можливої роботи напружень на пластичних деформаціях визначається наступним чином:

$$\partial\chi = \sigma_0 \partial\varepsilon_{p,0} + \tau_0 \partial\gamma_{p,0}$$

($\partial\varepsilon_{p,0}$ і $\partial\gamma_{p,0}$ – прирости об'ємних пластичних деформацій і пластичних деформацій октаедричного зсуву). В якості функції зміцнення прийнята функція

$$h(\chi) = -\Phi_l([\sigma(\chi)]),$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_l([\sigma]) &= \sigma_{1,1}^2 + \sigma_{2,2}^2 + \sigma_{3,3}^2 - (\sigma_{1,1}\sigma_{2,2} + \sigma_{2,2}\sigma_{3,3} + \sigma_{3,3}\sigma_{1,1}) + \\ &+ (R_c - R_p)(\sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3}) + 3(\sigma_{1,2}^2 + \sigma_{1,3}^2 + \sigma_{2,3}^2) - R_c R_p. \end{aligned}$$

Як і в розділі 4 мають місце такі співвідношення:

$$\Delta[\sigma] = \mathbf{D}_{ep}\Delta[\varepsilon], \quad (40)$$

$[\varepsilon]$ – вектор деформацій з елементами $[\varepsilon]_1 = \varepsilon_{1,1}$, $[\varepsilon]_2 = \varepsilon_{2,2}$, $[\varepsilon]_3 = \varepsilon_{3,3}$, $[\varepsilon]_4 = \varepsilon_{1,2}$, $[\varepsilon]_5 = \varepsilon_{1,3}$, $[\varepsilon]_6 = \varepsilon_{2,3}$, $[\sigma]$ – вектор напружень, тобто вектор з елементами $[\sigma]_1 = \sigma_{1,1}$, $[\sigma]_2 = \sigma_{2,2}$, $[\sigma]_3 = \sigma_{3,3}$, $[\sigma]_4 = \sigma_{1,2}$, $[\sigma]_5 = \sigma_{1,3}$, $[\sigma]_6 = \sigma_{2,3}$.

Введено позначення:

$$\xi_1 = \phi, \xi_2 = \psi, \xi_3 = \theta, \xi_4 = \phi', \xi_5 = \psi', \xi_6 = \theta', f_r^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial \xi_r} \quad (r = 1, 2, \dots, 6).$$

Прирости переміщень du_n ($n = 1, 2, 3$) визначаються в наступному вигляді:

$$u_n = \sum_{p=0}^2 a_{n,p,2-p} x_2^p x_3^{2-p}.$$

Якщо придати кожному елементу $a_{n,p,2-p}$ ($n = 1, 2, 3$; $p = 0, 1, 2$) порядковий номер, то прирости переміщень запишуться так:

$$\Delta u_n = \sum_{j=1}^9 (u_n)_j^{(2)} \Delta a_j,$$

де $(u_n)_j^{(2)} = x_2^p x_3^{p-2}$ (p однозначно визначається величинами n і j). Прийнято позначення $f_j^{(2)} = \frac{\partial f}{\partial a_j}$ ($j = 1, 2, \dots, 9$). Очевидно, що

$$\Delta[\sigma]_i = \sum_{r=1}^6 ([\sigma]_i)_r^{(1)} \Delta \xi_r + \sum_{j=1}^9 ([\sigma]_i)_j^{(2)} \Delta a_j, \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

коефіцієнти яких визначаються через величини, знайдені на попередніх кроках.

Звідси випливає, що мають місце розклади і для проєкцій приростів попереч-

них сил ΔQ_i ($i = 1, 2, 3$) і згинальних моментів ΔM_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \Delta M_i &:= \sum_{r=1}^6 (M_i)_r^{(1)} \Delta \xi_r + \sum_{j=1}^9 (M_i)_j^{(2)} \Delta a_j, \\ \Delta Q_i &:= \sum_{r=1}^6 (Q_i)_r^{(1)} \Delta \xi_r + \sum_{j=1}^9 (Q_i)_j^{(2)} \Delta a_j \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (41)$$

Граничні умови на гранях балки:

$$\Delta[\sigma]_m = 0 \quad \text{при } m = 2, 4, 6, x_2 = \pm h/2 \quad \text{і при } m = 3, 5, 6, x_3 = \pm b/2 \quad (42)$$

(b і h – розміри поперечного перерізу балки). Статичну гіпотезу Кірхгофа, в якій стверджується, що напруження на поздовжніх перерізах балки є значно меншими від нормальних напружень на поперечних перерізах, можна записати у вигляді приблизної рівності:

$$\Delta[\sigma]_2 = \Delta[\sigma]_3 = \Delta[\sigma]_6 = 0. \quad (43)$$

З (42) і (43) випливає, що при застосуванні методу найменших квадратів необхідно знайти такі значення параметрів Δa_j ($j = 1, 2, \dots, 9$), при яких функція

$$\begin{aligned} \Delta\Psi = & \int_{-b/2}^{b/2} \sum_{m=2,4,6} \{[\Delta[\sigma]_m(-\frac{h}{2}, x_3)]^2 + [\Delta[\sigma]_m(\frac{h}{2}, x_3)]^2\} dx_3 + \\ & + \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{m=3,5,6} \{[\Delta[\sigma]_m(x_2, -\frac{b}{2})]^2 + [\Delta[\sigma]_m(x_2, \frac{b}{2})]^2\} dx_2 + \\ & \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sum_{m=2,3,6} [\Delta[\sigma]_m(x_2, x_3)]^2 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

приймає найменше значення.

З умов рівноваги сегмента балки між лівим кінцем і поперечним перерізом, що розглядається, випливає, що має місце співвідношення

$$\Delta Q_m = -\sum_{k=1}^3 \beta_{m,k} \Delta R_{O,k} \quad (m = 1, 2, 3)$$

($\Delta R_{O,k}$ – проекції головного вектора сил, прикладених до лівого торцевого перерізу балки, на осі нерухомої системи координат, пов'язаної з ортами e_i^0 ($i = 1, 2, 3$). Використовуючи (41) ці рівності можна записати так:

$$\Delta \Gamma_m = 0 \quad (m = 1, 2, 3), \quad (44)$$

$$\text{де } \Delta \Gamma_m = \sum_{r=1}^6 (Q_m)_r^{(1)} \Delta \xi_r + \sum_{j=1}^9 (Q_m)_j^{(2)} \Delta a_j + \sum_{k=1}^3 \beta_{m,k} \Delta R_{O,k}.$$

Отже, необхідно знайти мінімум функції при виконанні умов (44). Проблема мінімуму функції зводиться до системи рівностей:

$$\frac{\partial(\Delta\Psi)}{\partial(\Delta a_i)} - \sum_{m=1}^3 \gamma_m \frac{\partial(\Delta \Gamma_m)}{\partial(\Delta a_i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 9), \quad \Delta \Gamma_m = 0, \quad (m = 1, 2, 3). \quad (45)$$

Співвідношення (45) дозволяють виразити прирости Δa_j ($j = 1, 2, \dots, 9$) так:

$$[\Delta a] = \sum_{r=1}^6 [a^{(1)}]^{(r)} \Delta \xi_r + \sum_{k=1}^3 [a^{(2)}]^{(k)} \Delta R_{O,k}. \quad (46)$$

Тоді (41) прийме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta M_i = & \sum_{r=1}^6 (M_i)_r^{(3)} \Delta \xi_r + \sum_{k=1}^3 (M_i)_k^{(4)} \Delta R_{O,k}, \\ \Delta Q_i = & \sum_{r=1}^6 (Q_i)_r^{(3)} \Delta \xi_r + \sum_{k=1}^3 (Q_i)_k^{(4)} \Delta R_{O,k} \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (47)$$

де

$$(M_i)_r^{(3)} = (M_i)_r^{(1)} + \sum_{j=1}^9 (M_i)_j^{(2)} [a]_j^{(r)}, \quad (M_i)_k^{(4)} = \sum_{j=1}^9 (M_i)_j^{(2)} [a^{(2)}]_j^{(k)},$$

$$(Q_i)_r^{(3)} = (Q_i)_r^{(1)} + \sum_{j=1}^9 (Q_i)_j^{(2)} [a]_j^{(r)}, \quad (Q_i)_k^{(4)} = \sum_{j=1}^9 (Q_i)_j^{(2)} [a^{(2)}]_j^{(k)}.$$

Зі співвідношення $\mathbf{M}' + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} = 0$ випливає, що

$$\begin{aligned} \Delta M'_1 + M_3 \Delta \omega_2 + \omega_2 \Delta M_3 - M_2 \Delta \omega_3 - \omega_3 \Delta M_2 &= 0, \\ \Delta M'_2 + M_1 \Delta \omega_3 + \omega_3 \Delta M_1 - M_3 \Delta \omega_1 - \omega_1 \Delta M_3 - \Delta Q_3 &= 0, \\ \Delta M'_3 + M_2 \Delta \omega_1 + \omega_1 \Delta M_2 - M_1 \Delta \omega_2 - \omega_2 \Delta M_1 + \Delta Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

З (47) знаходимо

$$\Delta M'_i = \sum_{r=1}^6 [(M_i)_r^{(3)}]' \Delta \xi_r + \sum_{r=1}^6 (M_i)_r^{(3)} \Delta \xi'_r + \sum_{k=1}^3 [(M_i)_k^{(4)}]' \Delta R_{O,k} \quad (i=1,2,3) \quad (49)$$

Використовуючи (47) і (49), рівності (48) можна записати так:

$$\mathbf{X} \Delta \xi'' + \mathbf{Y} \Delta \xi' + \mathbf{Z} \Delta \xi + \mathbf{U} \Delta \mathbf{R}_O = 0, \quad (50)$$

де $\Delta \xi = [\Delta \xi_1, \Delta \xi_2, \Delta \xi_3]$, $\Delta \mathbf{R}_O = [\Delta R_{O,1}, \Delta R_{O,2}, \Delta R_{O,3}]$, а $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ і \mathbf{U} – квадратні матриці розмірності 3×3 . З умов рівноваги відрізка балки виходить, що

$$\Delta M_i + M_i (\Delta \mathbf{R}_O) + \Delta M_{o,i} = 0 \quad (i=1,2,3).$$

Тут $M_i (\Delta \mathbf{R}_O)$ – моменти приростів сили \mathbf{R}_O відносно осей y_i ($i=1,2,3$), $\Delta M_{o,i}$ – проекції $\Delta \mathbf{M}_o$ на ці осі. При $s=0$ ці рівності будуть виглядати так:

$$\sum_{r=1}^3 V_{i,r+3} \Delta \xi'_r(0) + \sum_{r=1}^3 V_{i,r} \Delta \xi_r(0) + \sum_{k=1}^3 W_{i,k} \Delta R_{O,k} + \Delta M_{o,i} = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (51)$$

де $V_{i,r} = (M_i)_r^{(3)}(0)$, $W_{i,k} = (M_i)_k^{(4)}(0)$ ($i, k = 1,2,3; r = 1,2,\dots,6$). Ці рівності є частиною початкових умов для системи диференціальних рівнянь (50). Решта початкових умов визначається з умов закріплення лівого кінця балки. Рішення системи рівнянь (50) визначають $\Delta \xi$ як функції s . В результаті складання їх з раніше знайденими значеннями кутів Крилова на попередньому кроці, знаходяться нові значення цих кутів, а потім за допомогою рівнянь

$$x'_{C,i} = \alpha_{1,i} \quad (i=1,2,3) \quad (52)$$

можуть бути знайдені рівняння зігнутої осі балки.

Використовуючи співвідношення

$$\Delta x'_{C,2} = \Delta \phi, \quad \Delta x'_{C,3} = -\Delta \psi, \quad (53)$$

рівняння (50) і граничні умови (51) можна записати так:

$$\begin{aligned} X_{i,1}(s) \Delta x'''_{C,2} - X_{i,2}(s) \Delta x'''_{C,3} + X_{i,3}(s) \Delta \theta'' + Y_{i,1}(s) \Delta x''_{C,2} - Y_{i,2}(s) \Delta x''_{C,3} + \\ + Y_{i,3}(s) \Delta \theta' + Z_{i,1}(s) \Delta x'_{C,2} - Z_{i,2}(s) \Delta x'_{C,3} + Z_{i,3}(s) \Delta \theta = - \sum_{k=1}^3 \tilde{U}_{i,k}(s) \Delta R_{O,k}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} V_{i,1} dx'_{C,2}(0) - V_{i,2} dx'_{C,3}(0) + V_{i,3} d\theta(0) + V_{i,4} dx''_{C,2}(0) - V_{i,5} dx''_{C,3}(0) + \\ + V_{i,6} d\theta'(0) + \sum_{k=1}^3 W_{i,k} \Delta R_{O,k} + dM_{o,i} = 0 \quad (i=1,2,3). \end{aligned} \quad (55)$$

Б. Побудова матриць МГЕ для вирішення просторових задач.

Введено позначення:

$$\begin{aligned} g_1 &= \Delta x_{C,2}(0), g_2 = \Delta x'_{C,2}(0), g_3 = \Delta x''_{C,2}(0), g_4 = \Delta x_{C,3}(0), \\ g_5 &= \Delta x'_{C,3}(0), g_6 = \Delta x''_{C,3}(0), g_7 = \Delta\theta(0), g_8 = \Delta\theta'(0). \end{aligned}$$

Тоді рішення однорідної системи диференціальних рівнянь, що відповідають системі (53), тобто $z_{1,k}(s) = \Delta x_{C,2}(s)$, $z_{2,k}(s) = \Delta x_{C,3}(s)$, $z_{3,k}(s) = \Delta\theta(s)$ ($k = 1, 2, \dots, 8$), будуть фундаментальною системою розв'язків задачі Коші, якщо виконані наступні початкові умови: $g_j = \delta_{j,k}$ ($j = 1, 2, \dots, 8$, $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера).

Рішення однорідної системи, що відповідає системі (54), а також їх похідних можуть бути виражені через фундаментальні рішення задачі Коші наступним чином:

$$\begin{aligned} \Delta x_{C,2}(s) &= \sum_{j=1}^8 g_j z_{1,j}(s), \Delta x'_{C,2}(s) = \sum_{j=1}^8 g_j z'_{1,j}(s), \Delta x''_{C,2}(s) = \sum_{j=1}^8 g_j z''_{1,j}(s), \\ \Delta x_{C,3}(s) &= \sum_{j=1}^8 g_j z_{2,j}(s), \Delta x'_{C,3}(s) = \sum_{j=1}^8 g_j z'_{2,j}(s), \Delta x''_{C,3}(s) = \sum_{j=1}^8 g_j z''_{2,j}(s), \\ \Delta\theta(s) &= \sum_{j=1}^8 g_j z_{3,j}(s), \Delta\theta'(s) = \sum_{j=1}^8 g_j z'_{3,j}(s), \end{aligned} \quad (56)$$

Для кожного зі стержнів рами має місце рівність:

$$\Delta w(s) = \Delta w_{одн}(s) + \Delta w_q(s). \quad (57)$$

Тут $\Delta w_{одн}(s)$ – вектор з елементами

$$\begin{aligned} \Delta w_{одн,1}(s) &= \Delta x_{C,2}(s), \Delta w_{одн,2}(s) = \Delta x'_{C,2}(s), \Delta w_{одн,3}(s) = \Delta x''_{C,2}(s), \\ \Delta w_{одн,4}(s) &= \Delta x_{C,3}(s), \Delta w_{одн,5}(s) = \Delta x'_{C,3}(s), \Delta w_{одн,6}(s) = \Delta x''_{C,3}(s), \\ \Delta w_{одн,7}(s) &= \Delta\theta(s), \Delta w_{одн,8}(s) = \Delta\theta'(s), \end{aligned} \quad (58)$$

отриманими з рішення однорідної системи (54), а $\Delta w_q(s)$ – вектор з тими ж елементами, знайденими в результаті рішення неоднорідної системи (54) при нульових початкових умовах. Зі структури правої частини системи випливає, що $\Delta w_q(s)$ може бути представлено таким чином:

$$\Delta w_{q,j} = \sum_{m=1}^3 z_{q,j,m}(s) \Delta R_{O,m} \quad (j = 1, 2, \dots, 8),$$

$z_{q,j,m}(s)$ – рішення системи (54) з правою частиною $\tilde{U}_{j,m}(s)$ ($j = 1, 2, \dots, 8$; $m = 1, 2, 3$) при нульових початкових умовах.

Рівності (56) в матричному вигляді записуються так:

$$dw_{одн}(s) = A(s) \Delta w(0), \quad (59)$$

$A_{1,j} = z_{1,j}(s)$, $A_{2,j} = z'_{1,j}(s)$, $A_{3,j} = z''_{1,j}(s)$, $A_{4,j} = z_{2,j}(s)$, $A_{5,j} = z'_{2,j}(s)$, $A_{6,j} = z''_{2,j}(s)$, $A_{7,j} = z_{3,j}(s)$, $A_{8,j} = z'_{3,j}(s)$ ($j = 1, 2, \dots, 8$).

В. Розв'язок квазістатичних задач. З (57) і (59) випливає

$$\Delta w(s) = A(s) \Delta w(0) + \Delta w_q(s).$$

Побудувавши матрицю $A(s)$ і вектор $\Delta w_q(s)$ для кожного елемента рами і використовуючи далі загальну схему методу граничних елементів, можна отримати прирости лінійних і кутових переміщень довільного перерізу будь-якого елемента рами.

Г. Розв'язок динамічних задач. Всі викладки етапу Г розділу 4 залишаються справедливими і при вирішенні просторових динамічних задач.

Д. Просторова динамічна задача для двоступеневої залізобетонної колони. Можливості запропонованого методу продемонструємо на прикладі двоступеневої залізобетонної колони. На колоні розташовуються дві матеріальні точки M_1 і M_2 масою $m_1 = m_2 = 60 T$ (рис. 21). В момент часу $t = 0$ прикладаються два синусоїдальних

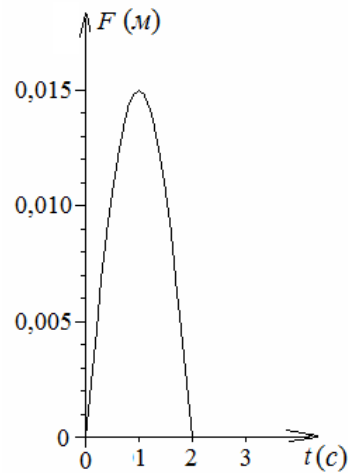
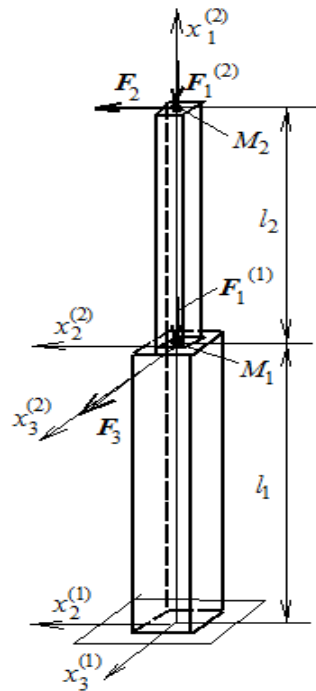


Рис. 21 Навантаження колони Рис. 22 Графік імпульса

імпульси: в точці $M_1 - F_3(t)$ в напрямку осі x_3 і в точці $M_2 - F_2(t)$ в напрямку осі x_2 . Графік їх зміни наведено на рис. 22. Довжини ділянок колони $l_1 = l_2 = 5 m$. Поперечні перерізи ділянок представляють собою квадрати зі сторонами $0,5 m$ і $0,4 m$. Армування — дванадцять стержнів діаметром $10 mm$, розташованих симетрично як відносно осі x_2 , так і відносно осі x_3 , матеріал — сталь марки $A-400C$ (A-III). Характеристики бетону: $E_0 = 2,8 \cdot 10^4 MPa$, $R_c = f_{cd} = 19 MPa$, $R_p = f_{cdt} = 1,9 MPa$. Після дії імпульсів колона починає здійснювати вільні коливання. Використовуючи алгоритм, викладений вище, будемо графіки зміни координат x_2 і x_3 точок M_1 і M_2 . Ці графіки наведені на рис. 23 і 24. Помітно накопичення залишкових деформацій.

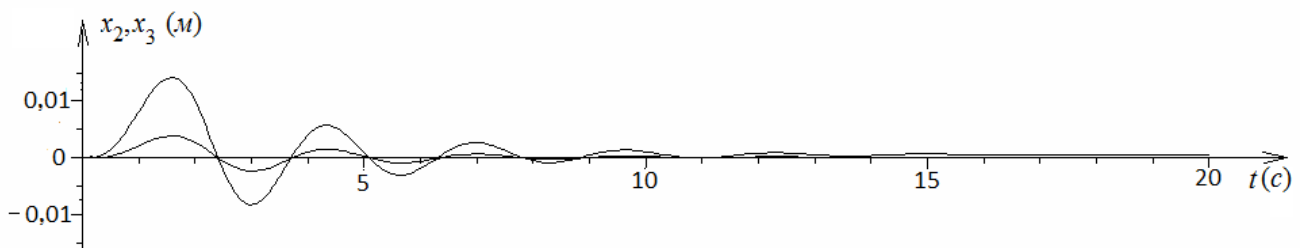
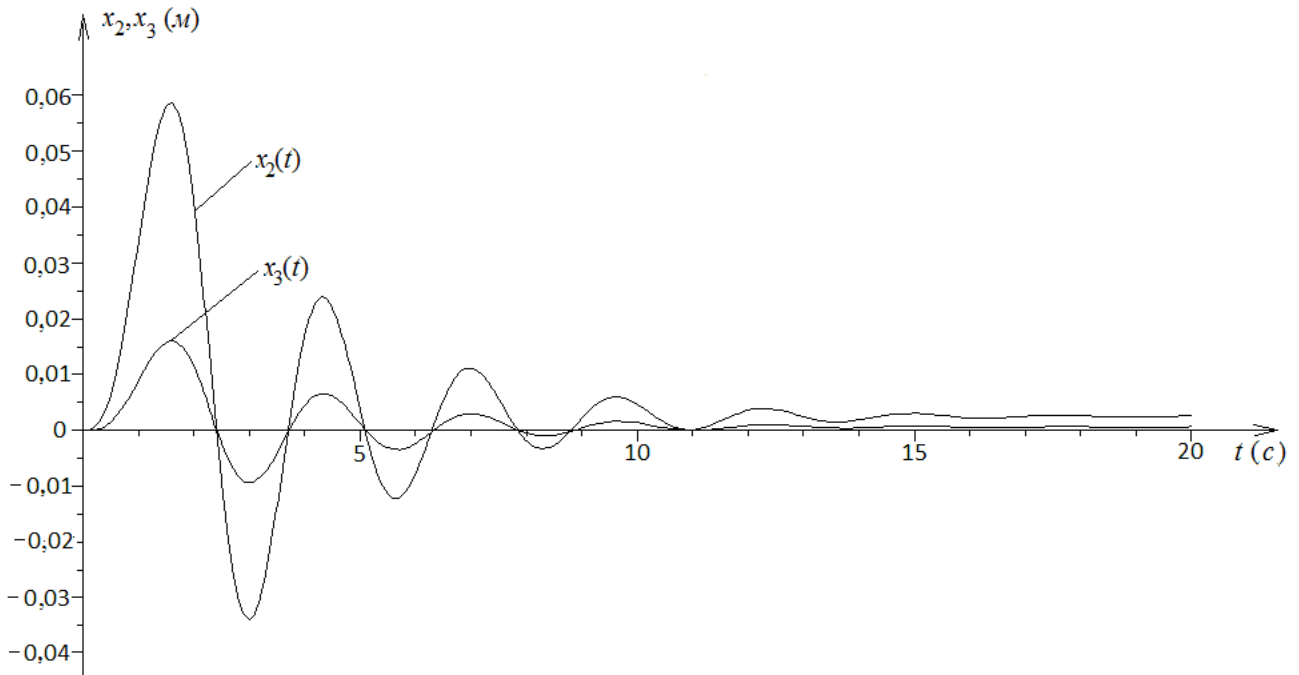


Рис. 23 Графіки зміни координат x_2 і x_3 вантажу M_1

Рис. 24 Графіки зміни координат x_2 і x_3 вантажу M_2

Е. Просторова нелінійна динамічна задача для залізобетонної рами. На основі алгоритму, викладеного в розділі, здійснюється розв'язок наступної динамічної задачі для рами, зображеної на рис. 25. У деякий момент часу на вантаж K_1 діє горизонтальний ударний синусоїдальний імпульс I , складові якого I_2 і I_3 , паралельні осям x_2 і x_3 , представлені на рис. 26

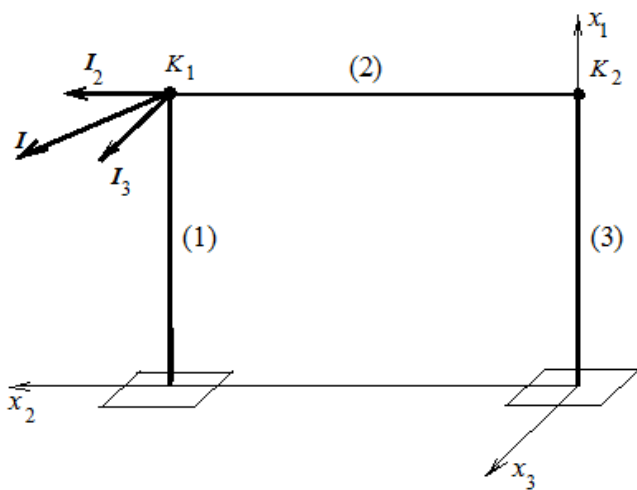


Рис. 25 Вплив ударного імпульсу

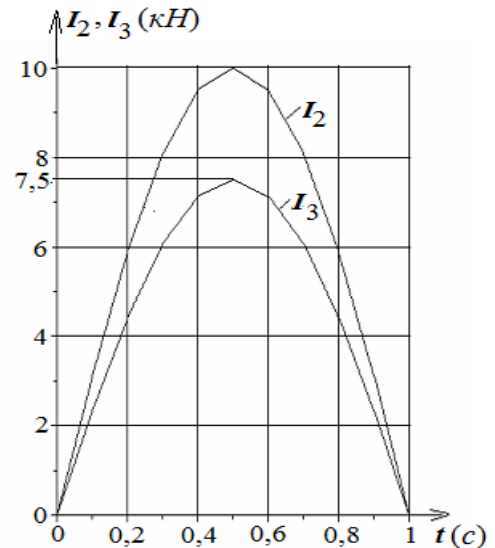


Рис. 26 Графік імпульсного впливу

Маси вантажів $m_1 = m_2 = 40 T$. Довжини стержнів $l_1 = l_3 = 12 m$, $l_2 = 10 m$, розміри поперечного перерізу $h = 0,4 m$, $b = 0,5 m$. Характеристики бетону і армування ті ж, що і в попередньому прикладі.

Використовуючи викладений вище алгоритм, на кожному кроці при покроковому методі вирішення будується матриця Y , j -м стовпцем якої є сукупність приростів переміщень уздовж осей x_2 і x_3 точок K_1 і K_2 , викликаних навантаженням рами з номером j , що складається з приростів навантажень $\Delta F_k^{(j)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) ($\Delta F_1^{(j)}$ прикладено до точки K_1 і направлено вздовж осі x_2 , $\Delta F_2^{(j)}$ прикладено до точки K_1 і направлено вздовж осі x_3 , $\Delta F_3^{(j)}$ прикладено до точки K_2 і направлено вздовж осі x_2 , а $\Delta F_4^{(j)}$ також докладено до точки K_2 і направлено вздовж осі x_3). При цьому $\Delta F_j^{(j)} = 1$, а $\Delta F_k^{(j)} = 0$ при $k \neq j$. Таким чином, проводиться побудова матриці коефіцієнтів впливу. Далі визначаються прирости переміщень $\hat{\Delta v}$ і $\hat{\Delta a}$ точок K_1 і K_2 на часовому кроці, знаходяться прирости прискорень Δa , швидкостей ΔV і переміщень Δv цих точок на реальному кроці. Завершується крок обчисленням нових значень прискорень, швидкостей і переміщень вантажів:

$$\mathbf{a}_{нов} = \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}, \mathbf{V}_{нов} = \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}, \mathbf{v}_{нов} = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}.$$

Для визначення приростів напружень і деформацій в елементах конструкцій використовується алгоритм вирішення квазістатичних задач із заміною приростів навантаження ΔF_k ($k = 1, 2, 3, 4$), прикладеної до вантажів, на $\Delta F_k^{(j)} - m \Delta a_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$).

На рис. 27 і 28 представлена зміна координат x_2 і x_3 вантажів K_1 і K_2 при

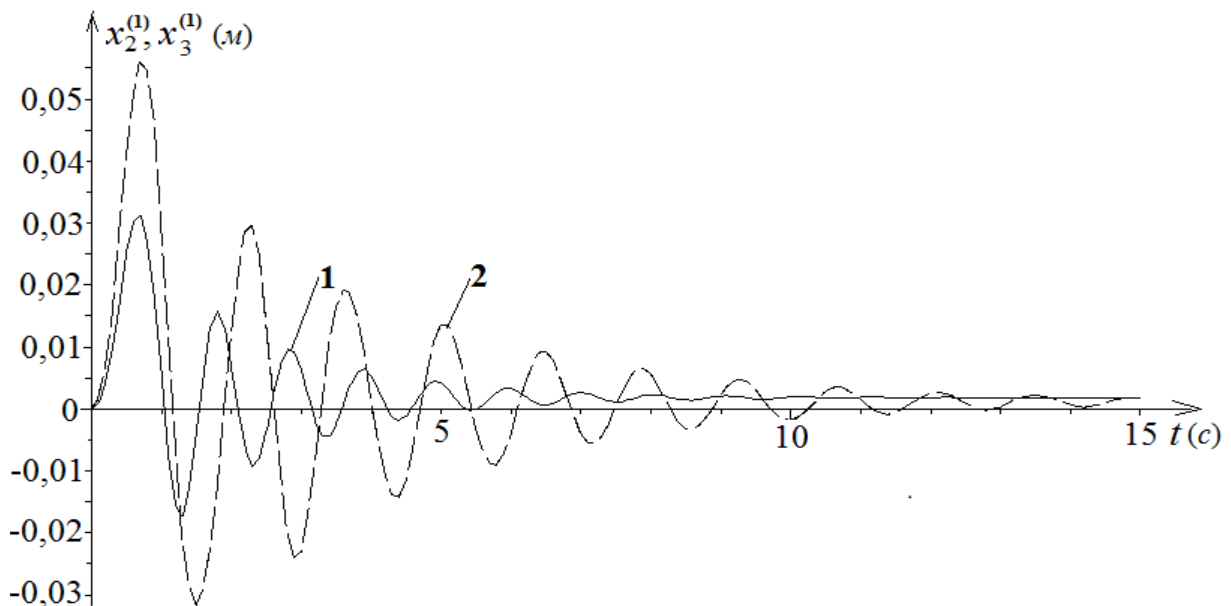


Рис. 27 Зміна координат вантажу K_1 при імпульсному впливі

коливаннях, викликаних імпульсним впливом на вантаж K_1 (1 - координати x_2 , 2 - координати x_3). Параметри конструкції і характеристики матеріалів ті ж, що і в попередньому прикладі. Помітна наявність пластичних деформацій, що виникли під час дії імпульсу.

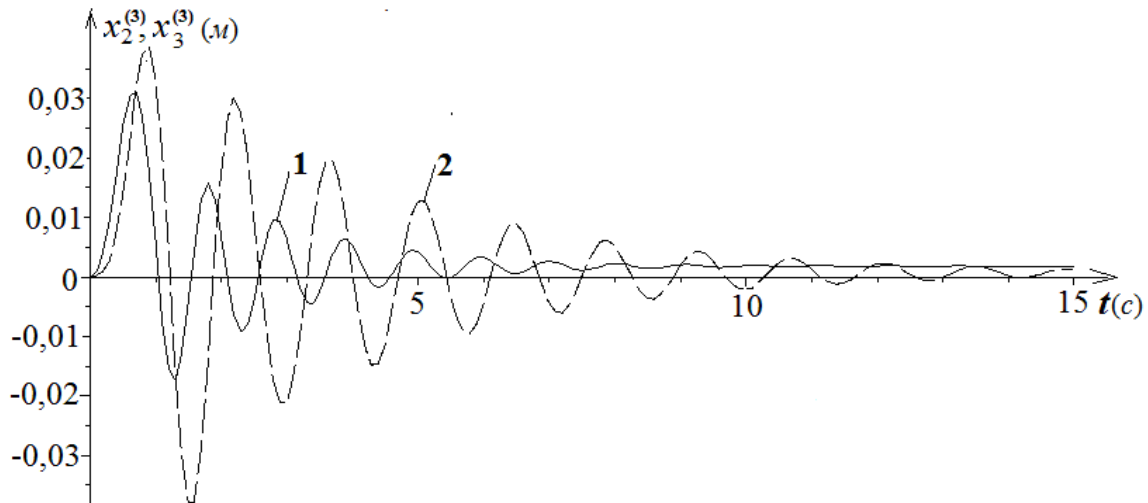


Рис. 28 Зміна координат вантажу K_2 при імпульсному впливі

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В роботі вирішена науково-прикладна проблема розробки прямих динамічних методів розрахунку залізобетонних каркасних будинків і споруд, що враховують нелінійні і пластичні властивості матеріалів без використання методу скінчених елементів.

На основі виконаних досліджень сформульовано такі висновки:

1. Розроблено метод розв'язання квазістатичних і динамічних задач плоского вигину одновимірних моделей залізобетонних каркасних споруд на основі методу малого параметра при діапазоні навантажень, що забезпечує малу нелінійність залежності між напруженнями і деформаціями.

2. Метод був модифікований для вирішення динамічних задач з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей бетону для випадків вказаної великої нелінійності шляхом розбиття процесу згину на ряд етапів, в межах кожного з яких ця нелінійність виявляється малою. Побудовано диференціальні рівняння першого та другого наближень для кожного з етапів згину. На основі запропонованого методу розв'язано динамічна задача для одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при сейсмічній дії. Проведено дослідження вільних коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при великих початкових прогинах. Досліджено динаміку одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при сейсмічних впливах великої амплітуди.

3. Побуловано диференціальне рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням її геометричної нелінійності та фізичної нелінійності і пластичності матеріалів при складному навантаженні, виходячи з асоційованого закону пластичної течії для покрокового розв'язку задач динаміки залізобетонних балок і рам.

4. На основі диференціального рівняння розроблено варіант методу граничних елементів для вирішення нелінійних квазістатичних і динамічних розрахунків залізобетонних балок і рам. Виявлено явище динамічної нестійкості і параметричного резонансу (розгойдування поперечних коливань при певних частотах зміни поздовжніх сил). Показано, що параметричний резонанс є більш небезпечним явищем, ніж звичайний резонанс.

5. Побудовано варіант методу граничних елементів для дослідження нелінійної динаміки плоских моделей багатопрольотних багатоповерхових каркасних будівель. За допомогою цього алгоритму вирішено ряд динамічних задач для таких споруд при дії на них гармонійних сил, ударних і сейсмічних впливів.

6. Побудовані диференціальні рівняння нелінійного пружнопластичного просторового згину залізобетонної балки при складному навантаженні на основі асоційованого закону пластичної течії.

7. Розроблено варіант методу граничних елементів для розв'язку просторових нелінійних квазістатичних і динамічних задач для залізобетонних каркасних будівель. Досліджено коливання одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей матеріалів при дії декількох змінних сил, що мають різні напрямки в просторі. Проведено дослідження просторової динамічної задачі для залізобетонної рами з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей матеріалів, що знаходиться під дією просторової системи змінних сил.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ Статті у фахових наукових виданнях України

1. Фомин В.М. Уравнения плоского изгиба стержней с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 24, – Одесса, 2006. – С. 273 – 287.

2. Фомин В.М. Колебания консольной балки, несущей сосредоточенную массу, при учете геометрической нелинейности / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 25, – Одесса, 2007. – С. 266 – 274.

3. Фомин В.М. Определение секущих объемных модулей упругости и сдвига для бетона / Фомин В.М., Фомина И.П. // Вісник ОДАБА. Вып. 26, – Одесса, 2007. – С. 301 – 306.

Особистий внесок здобувача – побудова методики визначення січних об'ємних модулів пружності і зсуву для бетону, виходячи з аналітичного представлення Н.І. Карпенко залежності $\sigma \leftrightarrow \varepsilon$ при осьовому розтязі-стиску.

4. Фомин В.М. Плоский изгиб консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 28 – Одесса, 2007. – С. 354 – 368.

5. Фомин В.М. Нестационарные колебания груза на консоли с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 30 – Одесса, 2008. – С. 301 – 310.

6. Фомин В.М. Нелинейная теория плоского изгиба железобетонных балок / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 32, – Одесса, 2008. – С. 313 – 324.

7. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (1) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 34(ч.1), – Одесса, 2009. – С. 367 – 369.

8. Фомин В.М. Колебания железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 38, – Одесса, 2010. – С. 626 – 630.
9. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского продольно-поперечного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.40, – Одесса, 2010. –С. 347 – 352.
10. Фомин В.М. Плоский изгиб продольно сжатой железобетонной консольной балки с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. //Вісник ОДАБА. Вып.41, – Одесса, 2011. – С. 307 – 311.
11. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.44, – Одесса, 2011. – С.345–353.
12. Фомин В.М. Плоский изгиб продольно сжатой ж.б.консольной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении / Фомин В.М., Фомина И.П. // Вісник ОДАБА. Вып.45, – Одесса,2012 . – С.279-284.
13. Фомин В.М. Колебания железобетонной консольной балки с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона при сложном нагружении / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 47,ч.1, – Одесса, 2012 . – С.364-368.
14. Фомин В.М. Об одном методе решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 48, ч.2 , – Одесса, 2012 . – С.175–178.
15. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при статических расчетах статически неопределимых железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.49,ч.2 – Одесса,2013 . – С.239–245.
16. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при динамических расчетах статически неопределимых железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 50, ч.1 – Одесса, 2013. – С. 292-295.
17. Фомин В.М. Исследование динамики многоэтажной железобетонной рамы с жесткими ригелями с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.52 – Одесса,2013 . – С. 286-292.
18. Фомин В.М. Исследование динамической устойчивости железобетонной колонны с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.54 – Одесса,2014 . –С. 387-394.
19. Фомин В.М. Нелинейные квазистатические задачи для многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.55 – Одесса,2014 . –С. 273-281.
20. Фомин В.М. Нелинейные динамические задачи для многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.57 – Одесса,2015 . –С.445–448.

21. Фомин В.М. Нелинейные квазистатические задачи для многоэтажных многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.58 – Одесса, 2015. – С.372-381.

22. Фомин В.М. Нелинейные динамические задачи для многоэтажных многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. // Будівельні конструкції: збірник наукових праць.– К.: ДП НДІБК, 2015. – Вип. 82 – С. 142 – 148.

23. Фомин В.М. Дифференциальные уравнения пространственного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.65 – Одесса, 2016. – С. 74 – 80 (індексується базою Index Copernicus).

24. Фомин В.М. Построение дифференциальных уравнений пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник КНУТД. №1 (106) – Киев, 2017. – С. 43 – 50 (індексується базою Index Copernicus).

25. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при исследовании квазистатических задач для железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона. Вісник КНУТД. Київ, 2017. №4 (112). С. 11 – 18 (індексується базою Index Copernicus).

Статті в зарубіжних періодичних виданнях

26. V.M. Fomin. The Steady Antiplane Dynamic Contact Problem of a Periodic Structure for an Elastic Half-space // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol.60, No. 1, pp. 135-144, 1996 (індексується базою Scopus).

27. Фомин В.М. Колебания длинных путепроводов / Фомин В.М. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. №3, - Москва, 2000. – С. 31 – 36.

28. Фомин В.М. Моделирование динамического процесса разрушения железобетонных рам при сейсмических воздействиях / Полевой С.А., Фомин В.М. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. №6, - Москва, 2001. – С. 27 - 32.

Особистий внесок здобувача – побудова методу моделювання процесу руйнування залізобетонних рам і його застосування при інтенсивних сейсмічних впливах.

29. Фомин В.М. Нестационарная динамическая контактная задача для периодической системы штампов при произвольном нагружении / Фомин В.М. // Прикладная математика и механика, том 50, вып. 3, – Москва, 1986. – С. 461-469.

30. Фомин В.М. Исследование динамики железобетонных причальных сооружений эстакадного типа при сейсмических воздействиях / Дорофеев В.С. , Фомин В.М. // Проблемы современного бетона и железобетона. Вып.6 – РУП «Институт БелНИИС», Минск, 2014.– С. 106-120.

Особистий внесок здобувача – розробка методу дослідження динаміки причальних споруд і його використання при сейсмічних впливах.

Наукові праці, які засвідчують апробацію результатів дисертації

31. Фомин В.М. Модификация метода граничных элементов для решения нелинейных задач пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей пластичности бетона / В.М.Фомин // Тези доповідей III Міжнародної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки». – Одеса, 2016. – С. 163 – 167.

32. Фомин В.М. Применение МГЭ при расчете пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона/ В.М.Фомин //Збірка тез доповідей Міжнародної науково-технічної конференції, присв. 90-річчю від дня нар. д.т.н., проф. В.К. Егупова «Проблеми теорії та практики сейсмостійкого будівництва », – Одеса, 2016. – С. 105.

33. Фомин В.М. Дифференциальные уравнения пространственного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / В.М.Фомин // Тези доповідей IV Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки». – Одеса, 2017. – С. 206 – 210.

34. Фомин В.М. Построение алгоритма метода граничных элементов для решения нелинейных упругопластических задач сейсмостойкости железобетонных каркасных сооружений / В.М.Фомин, И.П. Фомина // Збірка наукових праць Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми збереження архітектурної спадщини півдня України», присвяченої пам'яті академіка В.А. Лісенка. – Одеса, 2017. – С. 195 – 198.

35. Фомин В.М. Расчет пространственного нелинейного упругопластического изгиба железобетонной рамы методом граничных элементов / В.М.Фомин // Тези доповідей 74-ї науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2018. – С. 76.

36. Фомин В.М. Исследование нелинейных пространственных колебаний железобетонной рамы методом граничных элементов / В.М.Фомин // Тези доповідей 74-ї науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2018. – С. 77.

37. Volodymyr Fomin. Nonlinear Dynamic Analysis of a Reinforced Concrete Frame by the Boundary Element Method. /Volodymyr Fomin, Mariam Bekirova, Mykola Surianinov, Inna Fomina // 6th International Congress on Technology-Engineering and Science. July 19-20, 2018. Abstract Book. Kuala Lumpur.-Malaysia. P. 213.

Особистий внесок здобувача – розробка методу дослідження нелінійної пружнопластичної задачі динаміки залізобетонної рами на основі методу граничних елементів.

Наукові праці, що додатково відображають результати дисертації

38. Фомин В.М. Определение объемного модуля упругости и модуля сдвига для бетона при циклическом нагружении (1) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 30, – Одесса, 2008. – С. 311 – 318.

39. Фомин В.М. Определение объемного модуля упругости и модуля

сдвига для бетона при циклическом нагружении (2) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 32, – Одесса, 2008. – С. 325 – 334.

40. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (2) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 34 (ч.2), – Одесса, 2009. – С. 697 – 709.

41. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (3) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 37, – Одесса, 2010. – С. 372 – 386.

42. Фомин В.М. Определение прогибов железобетонной консольной балки при учете пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.41, – Одесса, 2010. – С. 312 – 317.

43. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при исследовании статики и динамики железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.48,ч.2 – Одесса,2012 . – С.179–186.

44. Фомин В.М. О применении метода граничных элементов к решению нелинейных упругопластических задач статики и динамики железобетонных балок и рам / В.М.Фомин, И.П. Фомина // Вісник ОДАБА. Вып. 50, ч.2 – Одесса, 2013. – С. 168-172.

Особистий внесок здобувача – розробка методу дослідження нелінійних пружнопластичних задач статки и динаміки залізобетонних балок і рам на основі методу граничних елементів та його застосування.

АНОТАЦІЯ

Фомін В.М. Нелінійні динамічні розрахункові моделі залізобетонних каркасних будівель і споруд з урахуванням пластичності матеріалів. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.23.01 - будівельні конструкції, будівлі та споруди - Одеська державна академія будівництва і архітектури - Одеса, 2019 р.

Метою дисертаційної роботи є розробка методів розрахунку залізобетонних каркасних будівель на динамічні, в тому числі сейсмічні, впливи з урахуванням геометричної нелінійності конструкцій і фізичної нелінійності матеріалів, заснованих на методі малого параметру і методі граничних елементів.

Вперше розроблено алгоритм застосування методу малого параметру при вирішенні динамічних задач плоского згину залізобетонної балки. Досліджена динаміка одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при гармонійних сейсмічних впливах великої амплітуди.

Побудовані диференціальні рівняння нелінійного пружнопластичного плоского та просторового згину залізобетонної балки. На основі диференціальних рівнянь розроблені методи застосування методу граничних елементів для динамічних розрахунків одновимірних, плоских та просторових моделей каркасних споруд. Розглянуто ряд динамічних задач з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей матеріалів.

Ключові слова: динаміка залізобетонної каркасної будівлі, сейсмічні й ударні впливи, нелінійність, пластичні властивості матеріалів, метод малого параметру, метод граничних елементів.

АННОТАЦІЯ

Фомин В.М. Нелинейные динамические расчетные модели железобетонных каркасных зданий и сооружений с учетом пластичности материалов. – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени доктора технических наук по специальности 05.23.01 – строительные конструкции, здания и сооружения. – Одесская государственная академия строительства и архитектуры, – Одесса, 2019.

Целью диссертационной работы является разработка методов расчета железобетонных каркасных сооружений на динамические, в том числе сейсмические, воздействия с учетом геометрической нелинейности конструкций и физической нелинейности материалов, а также возникновении остаточных деформаций, основанных на методе малого параметра и методе граничных элементов.

Впервые разработан алгоритм применения метода малого параметра при решении динамических задач плоского изгиба железобетонной балки при диапазоне нагрузок, обеспечивающем малую нелинейность зависимости между напряжениями и деформациями. Этот алгоритм был модифицирован для решения динамических задач с учетом нелинейных и пластических свойств бетона для случаев большой нелинейности путем разбиения процесса изгиба на ряд этапов, в пределах каждого из которых нелинейность оказывается малой. Построены дифференциальные уравнения первого и второго приближений для каждого из этапов изгиба. Исследована динамика одномерной модели железобетонного каркасного сооружения при гармонических сейсмических воздействиях большой амплитуды.

Построено дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом геометрической и физической нелинейностей и пластичности материалов при сложном нагружении исходя из ассоциированного закона пластического течения для пошагового решения задач динамики железобетонных балок и рам. На основе дифференциального уравнения разработан алгоритм метода граничных элементов для динамических расчетов одномерных моделей железобетонных каркасных сооружений. При решении одной из задач выявлено явление динамической неустойчивости и параметрического резонанса (раскачки поперечных колебаний при определенных частотах изменения продольных сил).

Построен алгоритм применения метода граничных элементов для исследования динамики двумерных моделей каркасных сооружений. С помощью этого алгоритма решен ряд динамических задач для таких сооружений при действии на них гармонических сил, ударных и сейсмических воздействий. В частности, проведен прямой динамический расчет причала №19 Измаильского морского торгового порта на сейсмическое воздействие, заданное в виде акселерограммы.

Построены дифференциальные уравнения нелинейного упругопластического пространственного изгиба железобетонной балки при сложном нагружении на основе ассоциированного закона пластического течения. Разработан алгоритм применения метода граничных элементов при решении пространственных нелинейных ди-

намических задач для железобетонных каркасных зданий. На основе изложенного метода проводится решение как квазистатических, так и динамических задач. Возможности метода продемонстрированы на примере нелинейного динамического расчета пространственных колебаний двухступенчатой железобетонной колонны. Рассмотрена также нелинейная пространственная упругопластическая динамическая задача для железобетонной рамы. В некоторый момент времени на одну из сосредоточенных масс, расположенных на ней, воздействует горизонтальный ударный импульс. Приводятся результаты исследований пространственных колебаний рамы, вызванных таким воздействием.

Ключевые слова: динамика железобетонных каркасных зданий, сейсмические и ударные воздействия, нелинейность, пластические свойства бетона, метод малого параметра, метод граничных элементов.

ABSTRACT

Fomin V.M. Nonlinear dynamic design models of concrete frame buildings and structures, taking into account the plasticity of materials. - Manuscript.

Dissertation thesis for the degree of Doctor of Technical Sciences in the specialty 05.23.01 – Building Structures, Buildings and Constructions – Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture – Odessa, 2019.

The aim of the thesis is to develop methods for design of reinforced concrete frame buildings on dynamic, including seismic, actions, taking into account the geometric nonlinearity of structures and physical nonlinearity of materials, as well as the occurrence of residual deformations based on the small parameter method and the boundary element method.

The algorithm for the application of the small parameter method was developed in solving the dynamic problems of flat bending of reinforced concrete beam. The dynamics of a one-dimensional model of a reinforced concrete frame structure under harmonic seismic effects of large amplitude is investigated.

The differential equations for nonlinear elastoplastic plane and spatial bending of reinforced concrete beams are constructed. On the basis of differential equations, methods for applying the boundary element method for dynamic calculations of one-dimensional, flat and spatial models of frame structures have been developed. A series of dynamic problems is considered taking into account nonlinear and plastic properties of materials.

Keywords: dynamics of reinforced concrete frame buildings, seismic and shock effects, nonlinearity, plastic properties of materials, small parameter method, boundary element method.