

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

ФОМІН ВОЛОДИМИР МИХАЙЛОВИЧ

УДК 624.012.45.042

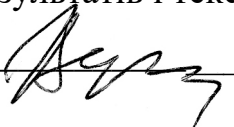
ДИСЕРТАЦІЯ

**НЕЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ РОЗРАХУНКОВІ МОДЕЛІ  
ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КАРКАСНИХ БУДІВЕЛЬ І СПОРУД З  
УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ**

Спеціальність 05.23.01 - будівельні конструкції, будівлі та споруди  
19 «Архітектура та будівництво»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідні джерела

 Фомін В. М.

Науковий консультант: Сур'янінов Микола Георгійович, доктор технічних  
наук, професор

Одеса – 2019

## АНОТАЦІЯ

**Фомін В.М. Нелінійні динамічні розрахункові моделі залізобетонних каркасних будівель і споруд з урахуванням пластичності матеріалів. - Рукопис.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.23.01 - будівельні конструкції, будівлі та споруди - Одеська державна академія будівництва та архітектури - Одеса, 2019 р.

Метою дисертаційної роботи є розробка методів розрахунку залізобетонних каркасних будівель на квазістатичні і динамічні, в тому числі сейсмічні, впливи з урахуванням геометричної нелінійності конструкцій і фізичної нелінійності і пластичності матеріалів, заснованих на методі малого параметра і методі граничних елементів.

У першому розділі наводиться аналіз пошкоджень залізобетонних споруд при сильних землетрусах, який проводиться у великій кількості робіт відомих фахівців у галузі сейсмостійкого будівництва. Відзначається, що серед залізобетонних конструкцій одними з найбільш вразливих виявилися каркасні споруди. Одною з основних причин руйнувань каркасних будівель з'являється наявність длінноперіодних складових прискорень ґрунту, частоти яких виявилися близькими власним частотам коливань конструкцій внаслідок збільшення періодів власних коливань в процесі землетрусу.

Наводиться короткий історичний огляд розвитку методів розрахунку і розрахункових моделей споруд на сейсмічні впливи. Дослідження поведінки конструкцій під час землетрусів свідчить про просторовий і нелінійний характер деформування конструкцій. Тому останнім часом в динамічних розрахунках споруд намітився перехід до використання просторових моделей споруд. Просторові моделі споруд дають можливість враховувати зміну пружних і пластичних властивостей по довжині і ширині споруди. Подальший розвиток динамічних методів розрахунку споруд пов'язаний з урахуванням геометричної нелінійності конструкцій, фізичної нелінійності та

пластичності матеріалів. При цьому використовується скінченно-елементна модель будівлі. Проте такий розрахунок є досить складним завданням. Для залізобетонних конструкцій це пов'язано з тим, що при обчисленні методом скінченних елементів необхідно враховувати напружено-деформований стан в точках будівлі, розподіл стиснутих і розтягнутих зон, зон навантаження і розвантаження, що вимагає достатньо детального розбиття конструкції на скінченні елементи, а отже, до розв'язання системи гігантських розмірів і великих обчислювальних і часових витрат. Для вирішення цієї задачі в дисертації запропоновані альтернативні методи, засновані на методах малого параметра і методі граничних елементів.

У другому розділі дисертації для одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель, розташованих під дією навантажень, при яких залежність між напруженнями і деформаціями незначно відрізняються від лінійних, на основі методу малого параметра розроблено метод розв'язання динамічних задач плоского згину. Впроваджується малий параметр, що характеризує відхилення залежності між напруженнями і деформаціями в елементах конструкції від лінійних. Далі проводиться побудова асимптотичних розкладів напружень, деформацій і переміщень за ступенями малого параметра. При цьому не передбачається виконання гіпотези плоских перерізів. Граничні умови на гранях елемента конструкції дозволяють виразити згинальні моменти і поперечні сили в поперечних перерізах через кути повороту перерізів. Підставлення математичних виразів згинальних моментів і поперечних сил у вигляді рядів за ступенями малого параметра в дифференціальне співвідношення між згинальним моментом і поперечною силою і прирівнювання коефіцієнтів при нульовому та першому ступенях параметра в лівій і правій частинах рівності призводять до диференціальних рівнянь згину першого і другого наближень. Рівняння першого наближення дає можливість врахувати тільки геометричну нелінійність конструкції. Для урахування фізичної нелінійності матеріалів необхідно використовувати рівняння другого наближення. Проводиться дослідження коливань

одновимірної консольної моделі (колони) залізобетонної каркасної будівлі при сейсмічному впливі, при якому точка закріплення колони здійснює горизонтальні коливання за гармонійним законом зміни прискорення підстави.

У третьому розділі дисертації пропонується метод вирішення динамічних задач плоского згину для одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель в разі сильних впливів, коли нелінійність вже не є малою. Основна ідея методу полягає в розбитті процесу деформування при згинанні на ряд кроків, в межах кожного з яких нелінійність можна вважати малою. На кожному кроці проводиться побудова асимптотичних розкладів для приростів напружень, деформацій і переміщень в точках залізобетонної балки при плоскому згині за ступенями малого параметра, а також диференціальних рівнянь плоского згину моделі з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності матеріалів. В результаті рішень рівнянь визначаються прирости прогинів балки на даному етапі. Крок завершується визначенням значень прогинів, напружень і деформацій шляхом додавання значень їх приростів до знайдених на попередньому кроці значенням прогинів, напружень і деформацій.

Досліджується динамічна задача для одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди. Розглядається рух маси на кінці колони, основа якої переміщається по горизонталі з прискоренням, що змінюється за гармонійним законом, при різних співвідношеннях частот зовнішнього впливу і власних коливань.

У четвертому розділі дисертації представлений метод вирішення квазістатичних і динамічних задач для одновимірних моделей залізобетонних каркасних споруд, який заснований на теорії пластичної течії при складному навантаженні з використанням методу граничних елементів, який отримав в дисертації подальший розвиток. Розробка методики застосування методу граничних елементів для зазначеного класу задач складається з декількох етапів. Спочатку проводиться побудова диференціального рівняння плоского

згину залізобетонної балки на основі теорії пластичної течії шляхом використання граничних умов для нормальних і дотичних напружень на верхній і нижній гранях балки, а також умови рівноваги ділянки балки і диференціальних співвідношень між згинальними моментами і поперечними силами в перетинах. При побудові матриць методу граничних елементів для розв'язання нелінійних задач згину залізобетонних балок і рам шляхом наближеної побудови фундаментальних розв'язків задачі Коші для рівняння згину, ділянка балки що розглядається, розбивається на ряд сегментів, кожному з яких відповідає диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами, рівними їх значенням на початку сегмента.

При вирішенні квазістатичних задач досліджуються рухи рам під дією сил, що повільно змінюються з плином часу, в результаті чого сили інерції зосереджених мас, розташованих у вузлах рам, виявляються нехтовно малими в порівнянні з діючими силами. На кожному кроці розрахунку прирости переміщень і внутрішніх зусиль в будь-якому перерізі балок і рам визначаються відповідно до алгоритму методу граничних елементів з використанням побудованих вище матриць. Після закінчення кроку визначаються нові значення прогинів, кутів повороту перерізів, поперечних і поздовжніх сил і згинальних моментів шляхом складання значень цих величин, отриманих в результаті обчислень на попередньому кроці, з їх приростами на даному етапі.

При вирішенні динамічних задач використовується метод лінійних прискорень Ньюмарка. Для визначення коефіцієнтів впливу конструкції по відношенню до даної зосередженої маси, використовується побудований варіант методу граничних елементів. Далі, за допомогою системи основних рівнянь динаміки для системи зосереджених мас визначаються прирости прискорень, швидкостей і переміщень вантажів. Завершується крок обчисленням нових значень прискорень, швидкостей і переміщень.

З використанням запропонованого методу проведено дослідження динамічної стійкості одновимірної моделі багатоповерхової залізобетонної

каркасної будівлі, тобто колони з системою зосереджених мас, що знаходиться під дією сил тяжіння мас і змінних в часі гармонійно змінних осьових сил. У початковий момент колона виводиться зі стану спокою за допомогою горизонтального імпульсу, прикладеного до однієї з мас. Якщо частота поздовжніх змінних сил дорівнює одній з подвоєних частот власних поперечних коливань, то спостерігається необмежене зростання амплітуди коливань. Таке явище (тобто розгойдування поперечних коливань під дією поздовжніх періодичних сил) називається параметричним резонансом або втратою динамічної стійкості.

У п'ятому розділі представлені методи розв'язання динамічних задач для двовимірних моделей залізобетонних каркасних споруд. Досліджується плоска динамічна задача для залізобетонної багатопрольотної рами, що є моделлю багатопрольотної каркасної споруди, яка знаходиться під дією системи змінних горизонтальних і вертикальних сил.

В результаті застосування запропонованого в четвертому розділі алгоритму методу граничних елементів для стержнів рами з використанням умов жорсткого їх з'єднання, умов рівноваги граничних елементів і рами в цілому з урахуванням приростів сил інерції зосереджених мас, побудована система рівнянь для невідомих приростів опорних реакцій і моментів на даному етапі розрахунку. Після знаходження значень невідомих величин приростів опорних реакцій і реактивних моментів визначаються значення приростів переміщень і напружень в точках рами, а значить, і значення самих переміщень і напружень шляхом складання їх зі знайденими на попередніх кроках значеннями.

Як приклад виконано розрахунок причалу №19 Ізмаїльського морського торгового порту на сейсмічну дію, заданої у вигляді акселерограми. Основі рами надаються горизонтальні зміщення, прискорення яких змінюються з плином часу відповідно до акселерограми. Далі, за допомогою алгоритму перетворення Фур'є побудований спектр акселерограми. Максимальне значення абсолютної величини трансформанти

Фур'є акселерограми спостерігається при так званій переважній круговій частоті землетрусу, що дорівнює  $11,26 \text{ c}^{-1}$ . Якщо знехтувати поздовжніми деформаціями стержнів, то виявиться, що рама поводитья як система з одним ступенем свободи, При цьому узагальненої координатою є переміщення ригеля. В результаті використання методу граничних елементів і методу лінійних прискорень побудований графік руху. При масі корисного навантаження, що дорівнює половині маси причалу частота вільних коливань дорівнює переважній частоті землетрусу. У цьому випадку графік руху ригеля переривається при  $t = 26\text{c}$ . Це викликано тим, що в цей момент в поперечному перерізі одного з вертикальних стержнів виникають напруження розтягу, що перевищують межу міцності бетону на розтяг, тобто починається процес руйнування. Аналогічний метод пропонується для вирішення плоских квазістатичних і динамічних задач і для багатоповерхових багатопрольотних рам, які є моделями багатоповерхових багатопрольотних каркасних споруд. Як приклад досліджується динаміка двоповерхової двопрогонової залізобетонної рами, викликана імпульсною дією. Передбачається, що навантаження рами відбувається в два етапи. На першому етапі відбувається поступове збільшення маси вантажів від нульових до заданих значень. Потім на одну з зосереджених мас впливає ударний імпульс. Після закінчення дії імпульса рама з вантажами здійснює вільні коливання. На графіках руху вантажів помітно наявність залишкових деформацій.

У шостому розділі проводиться побудова методу вирішення просторових динамічних задач для залізобетонних каркасних споруд з використанням теорії пластичної течії і методу граничних елементів. Побудова провадиться у вигляді ряду етапів. На першому етапі здійснюється побудова диференціальних рівнянь просторового згину залізобетонної балки з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності матеріалів при складному навантаженні. Ця побудова проводиться аналогічно випадку плоского згину. Для орієнтації базису, пов'язаного з

поперечним перерізом балки, відносно нерухомого базису обрані кути Крилова. В результаті використання граничних умов на гранях балки, статичної гіпотези Кірхгофа, а також співвідношення, що зв'язує головний момент внутрішніх зусиль в поперечному перерізі балки з головним вектором цих зусиль, будується система диференціальних рівнянь щодо приросту координат зігнутої осі балки на даному етапі рішення задачі. Аналогічно випадку плоского згину проводиться і побудова матриці фундаментальних рішень задачі Коші для системи диференціальних рівнянь, а також матриць методу граничних елементів для просторового випадку.

На основі викладеного методу проводиться рішення як квазістатичних, так і динамічних задач. Можливості запропонованого методу продемонстровано на прикладі динамічного розрахунку просторових коливань двоступеневої залізобетонної колони. У початковий момент часу до зосереджених мас, розташованих на колоні, прикладаються два взаємно перпендикулярні горизонтальні ударні імпульси. Після впливу імпульсів колона починає здійснювати вільні коливання. З використанням запропонованого методу для кожної з ділянок колони з урахуванням умов їх з'єднання побудовані графіки зміни координат вантажів, на яких помітно накопичення залишкових деформацій. Розглянуто також просторова нелінійна динамічна задача для залізобетонної рами, що є поперечником просторової каркасної конструкції. В деякий момент часу на одну з мас, розташованих на ній, діє горизонтальний ударний синусоїдальний імпульс. Наводяться результати досліджень вільних просторових коливань рами, викликаних цим впливом.

**Ключові слова:** динаміка залізобетонних каркасних будівель, сейсмічні та ударні впливи, нелінійність, пластичні властивості матеріалів, метод малого параметру, метод граничних елементів.



**ABSTRACT**

**Fomin V.M. Nonlinear dynamic design models of reinforced concrete frame buildings taking into account plasticity of materials.** - Manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Technical Sciences in specialty 05.23.01 – building constructions, buildings and structures - Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture - Odessa, 2019.

The aim of the thesis is to develop methods for design of reinforced concrete frame buildings on quasistatic and dynamic, including seismic, effects, taking into account the geometric nonlinearity of structures and physical nonlinearity of materials, as well as the development of residual deformations based on the small parameter method and boundary element method.

The first section provides an analysis of damage in reinforced concrete structures during strong earthquakes, to which a large number of works by renowned experts in the field of earthquake engineering are dedicated. It is noted that among the reinforced concrete structures frame structures were among the most vulnerable. One of the main causes for the destruction of frame buildings is the presence of long-period components of soil accelerations, which turned out to be close to the natural vibration frequencies of structures due to an increase in the natural vibration periods during an earthquake.

A brief historical review of the development of design methods and models of structures for seismic design is given. The study of the behavior of structures during earthquakes testifies to the spatial and non-linear nature of their deformation. Therefore, recently there has been a transition to the use of spatial models of structures in the dynamic design of structures. Spatial models of structures make it possible to take into account changes in the elastic and plastic properties of the earth's surface over the length and width of the structure. Further development of dynamic methods for construction design is related to the geometric nonlinearity of structures, physical nonlinearity, and plasticity of materials. In this case, the finite element model of the structure is used in the software complexes. However, such an analysis is quite a challenge. For reinforced

concrete structures, this is due to the fact that when making analysis by the finite element method, it is necessary to take into account the stress-strain state at the construction points, the distribution of compressed and stretched zones, loading and unloading zones, which requires a sufficiently detailed division of the structure into finite elements, and as a result, it leads to the solution of systems of gigantic dimension and large computational and time problems. To solve this problem, the thesis proposes alternative methods based on the small parameter method and the boundary element method.

In the second section of the thesis, for one-dimensional models of reinforced concrete frame buildings which are under load, at which the dependencies between stresses and strains differ slightly from linear ones, a method for solving dynamic plane bending problems is constructed using a small parameter method. A small parameter is introduced for specification of the deviation of the relationship between stresses and strains in the structural elements from linear. Next, the asymptotic expansions of stresses, strains, and displacements in powers of the parameter are constructed. At that the implementation of the hypothesis of flat sections is not supposed. The boundary conditions at the sides of the structural element allow us to express bending moments and lateral forces in cross sections through the angles of rotation of the sections. Substitution of the mathematical expressions of bending moments and shear forces in the form of series in powers of a small parameter into differential ratio between the bending moment and shear force and equation of the coefficients at zero and first degree of the parameter in the left and right sides of equality lead to differential bending equations of the first and second approximations. The equation of the first approximation makes it possible to take into account only the geometric nonlinearity of the structure. To take into account the physical nonlinearity of materials, it is necessary to use the second approximation equation. The study of oscillations of a one-dimensional cantilever model (column) of a reinforced concrete frame building under seismic impact, at which the point of support of the column makes horizontal oscillations with the harmonic law of change of the base acceleration, is being made.

In the third section of the thesis, a method for solving dynamic problems of plane bending of one-dimensional models of reinforced concrete frame buildings in the case of strong impacts, when the nonlinearity isn't small, is proposed. The main idea of the method is to divide the process of deformation during bending into a series of steps, within each of which the nonlinearity can be considered small. At each step, the construction of asymptotic expansions for the increments of stresses, deformations and displacements at the points of the reinforced concrete beam during plane bending

In the third section of the thesis, we propose a method for solving dynamic problems of plane bending for one-dimensional models of reinforced concrete frame buildings in the case of strong impacts, when the nonlinearity is no longer small. The main idea of the method is to divide the process of deformation during bending into a series of steps, within each of which the nonlinearity can be considered small. At each step, the construction of asymptotic expansions for the increments of stresses, deformations and displacements at the points of the reinforced concrete beam during plane bending on the degrees of a small parameter, as well as the differential equations of the plane flexural model taking into account the physical and geometric nonlinearities and plasticity of materials are made. As a result of solving the equations, the deflections of the beam deflections are determined at this step. The step is completed by determining the values of the deflections, stresses and strains by adding the values of their increments to the deflections, stresses and strains found at the previous step, as well as the differential equations of the plane flexural model taking into account the physical and geometric nonlinearities and plasticity of materials are made. As a result of solving the equations, the deflections of the beam deflections are determined at this step. The step is completed by determining the values of the deflections, stresses and strains by adding the values of their increments to the deflections, stresses and strains found at the previous step.

The dynamic problem for a one-dimensional model of a reinforced concrete frame structure is investigated. The motion of a mass at the end of the column is considered, the base of which moves horizontally with acceleration due to

harmonic law, with different correlations of the frequencies of external influence and eigenfrequencies.

The fourth section of the thesis presents a method for solving quasi-static and dynamic problems for one-dimensional models of reinforced concrete frame structures, which is based on the theory of plastic flow under complex loading using the boundary element method, which got the further development in the thesis. The development of a method for applying the boundary element method for the mentioned class of problems consists of several stages. First, the differential equation of plane bending of a reinforced concrete beam is constructed on the basis of the theory of plastic flow by using boundary conditions for normal and tangential stresses on the upper and lower sides of the beam, as well as the equilibrium condition of the beam section and the differential relations between bending moments and transverse forces in sections. When constructing matrices of the boundary element method for solving nonlinear problems of bending for reinforced concrete beams and frames by approximate construction of the fundamental Cauchy problem for the equation, the beam section is divided into a number of segments, to each of which the differential equation corresponds with constant coefficients equal to their values at the beginning of the segment.

When solving quasistatic problems, the motions of the frames under the action of forces slowly changing with respect to time are investigated, as a result of which the inertial forces of the concentrated masses located at the nodes of the frames turn out to be negligible in comparison to the acting forces. At each step of calculating the increments of displacements and internal forces in any section of the rods are determined in accordance with the algorithm of the boundary element method using the matrices constructed above. At the end of the step, new values of deflections, angles of rotation of cross sections, transverse and longitudinal forces and bending moments are determined by adding the values of these values obtained as a result of calculations at the previous step with their increments at the present step.

In solving dynamic problems, the Newmark linear acceleration method is used. To determine the coefficients of influence of the structure in relation to a given concentrated mass, the presented above variant of the boundary element method is used. Further, using the system of basic equations of dynamics for a system of concentrated masses, the increments of accelerations, velocities, and motions of concentrated masses are determined. The step is completed by calculating new values of accelerations, velocities and displacements.

Using the proposed method, the dynamic stability of a one-dimensional model of a multi-storey reinforced concrete frame building, i.e. columns with a system of concentrated masses under the action of gravity forces and time-varying axial forces, was carried out. At the initial moment, the column is removed from the state of rest with the help of a horizontal impulse applied to one of the masses. If the frequency of the longitudinal variable forces is equal to one of the frequencies of the natural transverse oscillations, then an unlimited increase in the amplitude of the oscillations is observed. Such a phenomenon (i.e. the growth of transverse oscillations under the action of longitudinal periodic forces) is called parametric resonance or loss of dynamic stability.

The fifth section presents methods for solving dynamic problems for two-dimensional models of reinforced concrete frame structures. The plane dynamic problem for an RC multi-span frame, which is a model of a multi-span frame structure under the influence of a system of variable horizontal and vertical forces, is investigated.

As a result of applying the boundary element method proposed in the fourth section of the thesis as well as of using the rod rigid connection conditions, the equilibrium conditions of the boundary elements and the frame as a whole, taking into account the increments of inertia forces of concentrated masses, a system of equations for the unknown increments of the support reactions and moments is constructed at this calculation step. After finding the values of the unknown values of the increments of the support reactions and moments, the values of the

increments of displacements and stresses at the points of the frame are determined, and hence the values of the displacements and stresses by adding the increments to the values found at the previous steps.

As an example, the berth No. 19 of the Izmail Sea Trade Port was designed for the seismic impact, presented in the form of an accelerogram. The frame base is given horizontal displacements, the accelerations of which change over time in accordance with the accelerogram. Further, using the Fourier transform algorithm, an accelerogram spectrum is constructed. The maximum value of the absolute value of the Fourier transform of the accelerogram is observed at the so-called predominant circular earthquake frequency of  $11.26 \text{ s}^{-1}$ . If we neglect the longitudinal deformations of the rods, it turns out that the frame behaves as a system with one degree of freedom. In this case, the crossbar displacement is a generalized coordinate. As a result of using the boundary element method and the linear acceleration method, a motion graph has been constructed. With a working load mass equal to half of the crossbar mass, the frequency of free oscillations is equal to the prevailing earthquake frequency. In this case, the graph of motion of the crossbar is interrupted at  $t = 26 \text{ s}$ . This is because at this moment tensile stresses in the cross section of one of the vertical rods exceed the tensile strength of the concrete, it means that the process of destruction begins.

A similar method is proposed for solving plane quasi-static and dynamic problems for multi-storey multi-span frames that are models of multi-storey multi-span frame structures. As an example, the dynamics of a two-story two-span reinforced concrete frame, caused by a pulse effect, is investigated. It is assumed that the loading of the frame takes place in two stages. At the first stage, a gradual increase in the mass of cargoes from zero to the specified values occurs. Then one of the concentrated masses is affected by the shock pulse. After the end of the action of the impulse, the frame with concentrated masses executes free oscillations. The presence of residual deformations is noticeable on the graphs of cargo motion.

In the sixth section, the method of solving spatial dynamic problems for reinforced concrete frame structures is constructed using the theory of plastic flow and the method of boundary elements. The construction is carried out in a series of stages. At the first stage, the construction of differential equations of the spatial bending of a reinforced concrete beam is carried out taking into account the physical and geometrical nonlinearities and plasticity of materials under complex loading. This construction is performed similarly to the case of plane bending. For the orientation of the basis associated with the cross section of the beam, the Krylov's angles were chosen for a relatively fixed base. As a result of the use of boundary conditions on the edges of the beam, the Kirchhoff static hypothesis, as well as the correlation connecting the total moment of internal forces in the beam cross section with the total vector of these forces, a system of differential equations in the increments of the coordinates of the bent axis of the beam is constructed. Similarly to the case of plane bending, the matrix of fundamental solutions of the Cauchy problem for a system of differential equations, as well as matrices of the boundary element method for the spatial case, are also constructed.

On the basis of the presented method, both quasi-static and dynamic problems are solved. The possibilities of the proposed method are demonstrated by the example of the dynamic analysis of the spatial oscillations of a two-stage reinforced concrete column. At the initial moment of time, two mutually perpendicular horizontal shock pulses are applied to the concentrated masses located on the column. After the impact of pulses, the column begins to perform free oscillations. Using the proposed method for each of the sections of the column, taking into account the conditions of their connection, graphs of changes in the coordinates of the loads, on which the accumulation of residual deformations is noticeable, are plotted. The spatial nonlinear dynamic problem for the reinforced concrete frame, which is the cross-section of the spatial frame structure, is also considered. At some point in time, one of the masses located on it is affected by the horizontal shock sinusoidal pulse. The results of studies of free spatial oscillations of the frame caused by this effect are given.

**Keywords:** dynamics of reinforced concrete frame buildings, seismic and shock effects, nonlinearity, plastic properties of materials, small parameter method, boundary element method.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

### Статті у фахових наукових виданнях України

1. Фомин В.М. Уравнения плоского изгиба стержней с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 24, – Одеса, 2006. – С. 273 – 287.
2. Фомин В.М. Колебания консольной балки, несущей сосредоточенную массу, при учете геометрической нелинейности / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 25, – Одеса, 2007. – С. 266 – 274.
3. Фомин В.М. Определение секущих объемных модулей упругости и сдвига для бетона / Фомин В.М., Фомина И.П. // Вісник ОДАБА. Вип. 26, – Одеса, 2007. – С. 301 – 306.
4. Фомин В.М. Плоский изгиб консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 28 – Одеса, 2007. – С. 354 – 368.
5. Фомин В.М. Нестационарные колебания груза на консоли с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 30 – Одеса, 2008. – С. 301 – 310.
6. Фомин В.М. Нелинейная теория плоского изгиба железобетонных балок / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 32, – Одеса, 2008. – С. 313 – 324.
7. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (1) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 34(ч.1), – Одеса, 2009. – С. 367 – 369.
8. Фомин В.М. Колебания железобетонной консольной балки с



учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 38, – Одеса, 2010. – С. 626 – 630.

9. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского продольно-поперечного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип.40, – Одеса, 2010. –С. 347 – 352.

10. Фомин В.М. Плоский изгиб продольно сжатой железобетонной консольной балки с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. //Вісник ОДАБА. Вип.41, – Одеса, 2011. – С. 307 – 311.

11. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип.44, – Одеса, 2011. – С.345–353.

12. Фомин В.М. Плоский изгиб продольно сжатой ж.б.консольной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении / Фомин В.М., Фомина И.П. // Вісник ОДАБА. Вип.45, – Одеса,2012 . – С.279-284.

13. Фомин В.М. Колебания железобетонной консольной балки с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона при сложном нагружении / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 47,ч.1, – Одеса, 2012 . – С.364-368.

14. Фомин В.М. Об одном методе решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 48, ч.2 , – Одеса, 2012 . – С.175–178.

15. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при статических расчетах статически неопределимых железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип.49,ч.2 – Одеса, 2013 . – С.239–245.

16. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при динамических расчетах статически неопределимых железобетонных балок и

рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 50, ч.1 – Одеса, 2013. – С. 292-295.

17. Фомин В.М. Исследование динамики многоэтажной железобетонной рамы с жесткими ригелями с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип.52 – Одеса,2013 . – С. 286-292.

18. Фомин В.М. Исследование динамической устойчивости железобетонной колонны с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип.54 – Одеса,2014 . –С. 387-394.

19. Фомин В.М. Нелинейные квазистатические задачи для многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип.55 – Одеса,2014 . –С. 273-281.

20. Фомин В.М. Нелинейные динамические задачи для многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип.57 – Одеса,2015 . –С.445–448.

21. Фомин В.М. Нелинейные квазистатические задачи для многоэтажных многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип.58 – Одеса, 2015. – С.372-381.

22. Фомин В.М. Нелинейные динамические задачи для многоэтажных многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. //Будівельні конструкції: збірник наукових праць.– К.: ДП НДІБК, 2015. – Вип. 82 – С. 142 – 148.

23. Фомин В.М. Дифференциальные уравнения пространственного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип.65 – Одеса, 2016. – С. 74 – 80 (індексується базою Index Copernicus).

24. Фомин В.М. Построение дифференциальных уравнений пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / Фомин В.М. //

Вісник КНУТД. №1 (106) – Киев, 2017. – С. 43 – 50 (індексується базою Index Copernicus).

25. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при исследовании квазистатических задач для железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона. Вісник КНУТД. Київ, 2017. №4 (112). С. 11 – 18 (індексується базою Index Copernicus).

### **Статті в зарубіжних періодичних виданнях**

26. V.M. Fomin. The Steady Antiplane Dynamic Contact Problem of a Periodic Structure for an Elastic Half-space // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol.60, No. 1, pp. 135-144, 1996 (індексується базою Scopus).

27. Фомин В.М. Колебания длинных путепроводов / Фомин В.М. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. №3, - Москва, 2000. – С. 31 – 36.

28. Фомин В.М. Моделирование динамического процесса разрушения железобетонных рам при сейсмических воздействиях / Полевой С.А., Фомин В.М. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. №6, - Москва, 2001. – С. 27 - 32.

29. Фомин В.М. Нестационарная динамическая контактная задача для периодической системы штампов при произвольном нагружении / Фомин В.М. // Прикладная математика и механика, том 50, вып. 3, – Москва, 1986. – С. 461-469.

30. Фомин В.М. Исследование динамики железобетонных причальных сооружений эстакадного типа при сейсмических воздействиях / Дорофеев В.С. , Фомин В.М. // Проблемы современного бетона и железобетона. Вып.6 – Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, РУП «Институт БелНИИС», Минск, 2014.– С. 106-120.

*Наукові праці, які засвідчують апробацію результатів дисертації*

31. Фомин В.М. Модификация метода граничных элементов для решения нелинейных задач пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей пластичности бетона / В.М.Фомин // Тези доповідей III Міжнародної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки».– Одеса, 2016. – С. 163 – 167.

32. Фомин В.М. Применение МГЭ при расчете пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона/ В.М.Фомин //Збірка тез доповідей Міжнародної науково-технічної конференції, присв. 90-річчю від дня нар. д.т.н., проф. В.К. Егупова «Проблеми теорії та практики сейсмостійкого будівництва », – Одеса, 2016. – С. 105.

33. Фомин В.М. Дифференциальные уравнения пространственного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / В.М.Фомин // Тези доповідей IV Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки».– Одеса, 2017. – С. 206 – 210.

34. Фомин В.М. Построение алгоритма метода граничных элементов для решения нелинейных упругопластических задач сейсмостойкости железобетонных каркасных сооружений / В.М.Фомин, И.П. Фомина // Збірка наукових праць Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми збереження архітектурної спадщини півдня України», присвяченої пам'яті академіка В.А. Лісенка (1937-2016). – Одеса, 2017. – С. 195 – 198.

35. Фомин В.М. Расчет пространственного нелинейного упругопластического изгиба железобетонной рамы методом граничных элементов / В.М.Фомин // Тези доповідей 74-ї науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2018. – С. 76.

36. Фомин В.М. Исследование нелинейных пространственных колебаний железобетонной рамы методом граничных элементов / В.М.Фомин // Тези доповідей 74-ї науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2018. – С. 77.

37. Volodymyr Fomin. Nonlinear Dynamic Analysis of a Reinforced Concrete Frame by the Boundary Element Method. /Volodymyr Fomin, Mariam Bekirova, Mykola Surianinov, Inna Fomina // 6<sup>th</sup> International Congress on Technology-Engineering and Science. July 19-20, 2018. Abstract Book. Kuala Lumpur.-Malaysia. P. 213.

***Наукові праці, що додатково відображають результати дисертації***

38. Фомин В.М. Определение объемного модуля упругости и модуля сдвига для бетона при циклическом нагружении (1) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 30, – Одеса, 2008. – С. 311 – 318.

39. Фомин В.М. Определение объемного модуля упругости и модуля сдвига для бетона при циклическом нагружении (2) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 32, – Одеса, 2008. – С. 325 – 334.

40. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (2) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 34 (ч.2), – Одеса, 2009. – С. 697 – 709.

41. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (3) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип. 37, – Одеса, 2010. – С. 372 – 386.

42. Фомин В.М. Определение прогибов железобетонной консольной балки при учете пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип.41, – Одеса, 2010. – С. 312 – 317.

43. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при исследовании статике и динамики железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вип.48,ч.2 – Одеса,2012 . – С.179—186.

44. Фомин В.М. О применении метода граничных элементов к решению нелинейных упругопластических задач статике и динамики железобетонных балок и рам / В.М.Фомин, И.П. Фомина // Вісник ОДАБА. Вип. 50, ч.2 – Одеса, 2013. – С. 168-172.

## ЗМІСТ

Анотація.....	2
Вступ.....	27
<b>РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД РОЗВИТКУ ДИНАМІЧНИХ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ І РОЗРАХУНКОВИХ МОДЕЛЕЙ СПОРУД. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ .....</b>	<b>35</b>
1.1 Динамічні впливи на споруди.....	35
1.2 Основні етапи розвитку методів розрахунку споруд на сейсмічні впливи.....	38
1.3 Розрахункові моделі споруд .....	43
1.4 Основи теорії пластичності матеріалів. ....	50
1.5 Розрахунок споруд на динамічні дії з урахуванням нелінійного і пластичного деформування матеріалів .....	58
1.6 Висновки за розділом 1 .....	65
<b>РОЗДІЛ 2. НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ЕЛЕМЕНТІВ ТА ОДНОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КАРКАСНИХ БУДІВЕЛЬ (метод малого параметру) .....</b>	<b>68</b>
2.1 Побудова варіанта методу малого параметру для дослідження задач нелінійної теорії пружності у випадках малої нелінійності.....	68
2.2 Диференціальне рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням нелінійних деформаційних властивостей матеріалів в першому наближенні .....	75
2.3 Диференціальне рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням нелінійних властивостей матеріалів в другому наближенні.....	82
2.4 Застосування методу малого параметру при дослідженні плоского поздовжньо-поперечного згину залізобетонної консольної балки.....	87

2.5 Дослідження нелінійних коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі при сейсмічному впливі за допомогою методу малого параметру .....102

2.6 Висновки за розділом 2 .....112

**РОЗДІЛ 3. НЕЛІНІЙНІ ПРУЖНОПЛАСТИЧНІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ЕЛЕМЕНТІВ ТА ОДНОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КАРКАСНИХ СПОРУД (метод малого параметру).....** .....113

3.1 Диференціальні рівняння етапів плоского згину залізобетонної балки з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей матеріалів у першому наближенні .....113

3.2 Диференціальні рівняння етапів плоского згину залізобетонної балки з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей матеріалів в другому наближенні .....122

3.3 Застосування методу малого параметру для вирішення нелінійної пружнопластичної задачі циклічного квазістатичного згину залізобетонної консольної балки .....126

3.4 Застосування методу малого параметру при дослідженні коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при ударному і сейсмічному впливах.....166

3.5 Висновки за розділом 3 .....171

**РОЗДІЛ 4. ДИНАМІКА ЕЛЕМЕНТІВ ТА ОДНОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КАРКАСНИХ БУДІВЕЛЬ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЇ І ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ І ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ (метод граничних елементів) .....172**

4.1 Побудова диференціального рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності матеріалів при складному навантаженні.....172

4.2 Дослідження квазістатичного згину залізобетонної консольної балки при складному навантаженні .....182



4.3 Дослідження нестационарних коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі під дією вертикальних і горизонтальних змінних сил .....	188
4.4 Побудова варіанта методу граничних елементів, для дослідження статичних та динамічних задач пружнопластичного згину елементів залізобетонних каркасних споруд .....	194
4.5 Модифікація методу граничних елементів .....	202
4.6 Застосування методу граничних елементів при дослідженні динаміки статично невизначеної залізобетонної колони при ударному впливі .....	209
4.7 Дослідження динаміки багатоповерхової залізобетонної рами з абсолютно жорсткими ригелями при ударній дії методом граничних елементів.....	213
4.8 Дослідження динамічної стійкості багатоповерхової залізобетонної каркасної будівлі методом граничних елементів.....	219
4.9 Висновки за розділом 4.....	228
<b>РОЗДІЛ 5. ДИНАМІКА ДВОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КАРКАСНИХ БУДІВЕЛЬ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЇ І ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ І ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ (метод граничних елементів).....</b>	<b>229</b>
5.1 Застосування методу граничних елементів при дослідженні динаміки одноповерхової багатопрольотної залізобетонної каркасної споруди при дії плоскої системи змінних сил .....	229
5.2 Прямий динамічний розрахунок причалу №19 Ізмаїльського морського торгового порту на сейсмічний вплив у вигляді акселерограми землетрусу .....	242
5.3 Дослідження динаміки багатоповерхової багатопрольотної залізобетонної каркасної споруди при дії плоскої системи змінних сил методом граничних елементів.....	252

5.4	Висновки за розділом 5 .....	266
<b>РОЗДІЛ 6. ПРОСТОРОВІ ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ</b>		
<b>ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КАРКАСНИХ БУДІВЕЛЬ З УРАХУВАННЯМ</b>		
<b>ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЇ І ФІЗИЧНОЇ</b>		
<b>НЕЛІНІЙНОСТІ І ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ (метод граничних</b>		
<b>елементів).....</b>		
6.1	Побудова диференціальних рівнянь просторового згину залізобетонної балки .....	268
6.2	Побудова методу вирішення нелінійних пружнопластичних квазістатичних задач просторового згину моделей залізобетонних каркасних споруд на основі методу граничних елементів.....	279
6.3	Побудова методу вирішення нелінійних просторових пружнопластичних динамічних задач для моделей залізобетонних каркасних споруд на основі методу граничних елементів.....	284
6.4	Дослідження просторової нелінійної пружнопластичної квазістатичної задачі для залізобетонної рами.....	286
6.5	Дослідження просторової нелінійної пружнопластичної динамічної задачі для залізобетонної рами.....	298
6.6	Висновки за розділом 6 .....	301
<b>ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....</b>		<b>302</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>		<b>304</b>
<b>ДОДАТОК А</b> Визначення січних об'ємних модулів пружності і зсуву для бетону в процесі активного навантаження.....		
		342
<b>ДОДАТОК Б</b> Визначення січних об'ємних модулів пружності і зсуву для бетону в процесі циклічного навантаження.....		
		348
<b>ДОДАТОК В</b> СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ.....		
		368
<b>ДОДАТОК Г</b> ДОВІДКИ ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ.....		
		376

## ВСТУП

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Інтенсивне будівництво висотних каркасних будинків і споруд вимагає вдосконалення методів їх статичного і динамічного розрахунку, що враховують все різноманіття чинників, які впливають на напружено-деформований стан.

Найбільш складним, і тому менш вивченим є динамічний розрахунок, який враховує цілий спектр різних впливів, найважливішими з яких є сейсмічні, ударні та вибухові. Забезпечення безпеки споруд при дії динамічних (зокрема сейсмічних) впливів відноситься в даний час до числа найбільш актуальних і важливих завдань державної політики в галузі національної безпеки. Ця проблема вивчалася Міжвідомчою комісією з питань науково-технологічної безпеки при Раді національної безпеки і оборони України, в результаті чого в квітні 2008 року нею був прийнятий документ «Про стан забезпечення сейсмічної безпеки та проблем розвитку сейсмостійкого будівництва в Україні».

Будівельна галузь в Одесі розвивається дуже бурхливо, зводиться багато дорогих об'єктів, руйнування яких від динамічних впливів є серйозною економічною і соціальною втратою для міста, області та й країни в цілому. Результати впливу динамічних навантажень на будівлі та споруди, що фіксуються за останні десятиліття, свідчать, що сучасні норми і методи проектування не забезпечують достатньої надійності.

Будівельні норми, розроблені останнім часом у багатьох країнах, допускають можливість роботи матеріалу конструкцій за межами пружності. Проектування споруд в розрахунку на те, що при сильних динамічних впливах конструкції будуть працювати тільки в пружній стадії, є економічно недоцільним, оскільки воно пов'язано з перевитратою матеріалів. При розрахунках передбачається нелінійна поведінка конструкцій, і навіть допускаються руйнування окремих елементів, які будуть компенсовані пластичними деформаціями інших елементів. Тому розрахунки конструкцій з

урахуванням пластичного і нелінійного поведіння матеріалів вимагають застосування більш складних математичних моделей і теорій.

В останні десятиліття почали застосовувати прямий динамічний розрахунок, заснований на наборі акселерограм з урахуванням нелінійної роботи і пластичних властивостей матеріалів. Діючі програмні комплекси з нелінійного динамічного розрахунку конструкцій засновані на методі скінчених елементів, який на кожному кроці розрахунку каркасних залізобетонних конструкцій при багатоциклових навантаженнях пов'язаний з необхідністю розв'язку алгебраїчних систем рівнянь дуже великої розмірності, що призводить до тимчасових витрат і нагромадження похибок. Для багатоповерхових залізобетонних каркасних будинків досі не реалізований динамічний розрахунок з урахуванням нелінійної поведінки матеріалів і виникнення залишкових деформацій при знакозмінних багатоциклових навантаженнях в умовах складного навантаження, що вимагає застосування асоційованого закону пластичної течії. Тому виникає необхідність в застосуванні альтернативних методів, наприклад, методів малого параметра та граничних елементів, для побудови яких необхідна наявність диференціальних рівнянь згину залізобетонних балок з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичних деформацій.

Отже, розробка сучасних наукових основ і методів розрахунку каркасних будівель і споруд на динамічні, в тому числі і на сейсмічні впливи, є актуальним завданням.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Тема дисертації і отримані результати відповідають актуальним напрямкам науково-технічної політики України відповідно до Постанови Кабінету Міністрів України №409 від 05.05.1997 року «Про забезпечення надійності і безпечної експлуатації будівель, споруд та мереж», а також до держбюджетних тем «Дослідження плоских і просторових задач статички і динаміки залізобетонних балок і рам з урахуванням геометричної та фізичної

нелінійностей і пластичності матеріалів» (номер державної реєстрації 0116 U 003196) і №119 «Розвиток чисельно-аналітичного методу граничних елементів для моделювання та розрахунку стержневих, пластинчастих і оболонкових конструкцій» на кафедрах теоретичної механіки і будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури (номер державної реєстрації - 0117 U 000484).

### **Мета і задачі досліджень.**

Метою дисертаційної роботи є розробка на базі основних ідей методів малого параметра і методу граничних елементів методу розрахунку залізобетонних каркасних будівель на квазістатичні і динамічні (зокрема сейсмічні) впливи з урахуванням геометричної нелінійності конструкцій і фізичної нелінійності матеріалів, а також виникнення залишкових деформацій.

Для досягнення цієї мети були вирішені наступні задачі:

1. Розробити метод дослідження згину одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель з урахуванням геометричної нелінійності конструкції і фізичної нелінійності матеріалів із застосуванням методу малого параметра в разі малої нелінійної залежності між напруженнями і деформаціями.

2. Провести подальший розвиток розробленого методу дослідження згину одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель з урахуванням геометричної нелінійності конструкції і фізичної нелінійності матеріалів для застосування його у випадках великої нелінійної залежності між напруженнями і деформаціями.

3. Розробити метод побудови диференціальних рівнянь нелінійного пружнопластичного згину плоских моделей залізобетонних каркасних будівель в разі складного навантаження на основі теорії пластичної течії Р. Мізеса.

4. На основі побудованих диференціальних рівнянь отримати подальший розвиток методу граничних елементів для розв'язання плоских

нелінійних пружнопластичних задач статички і динаміки плоских моделей залізобетонних каркасних будівель.

5. За допомогою модифікованого методу граничних елементів провести дослідження плоских задач динаміки багатопрольотних і багатоповерхових каркасних споруд при складному навантаженні.

6. Розробити метод побудови диференціальних рівнянь просторового нелінійного пружнопластичного згину залізобетонних каркасних будівель і споруд при складному навантаженні.

7. Провести дослідження просторових нелінійних квазістатичних і динамічних задач для просторових моделей залізобетонних каркасних будівель на основі методу граничних елементів.

**Об'єкт дослідження** - залізобетонні каркасні будівлі та споруди, що знаходяться під динамічними впливами.

**Предмет дослідження** - розрахункові динамічні моделі напружено-деформованого стану залізобетонних каркасних будівель і споруд з урахуванням геометричної нелінійності конструкцій і фізичної нелінійності і пластичних властивостей матеріалів.

**Методи досліджень.** У процесі досліджень були використані наступні методи:

- побудова на основі теорії скінченних деформацій з використанням деформаційної теорії пластичності і методу малого параметра нелінійних диференціальних рівнянь для вирішення квазістатичних і динамічних задач згину елементів залізобетонних каркасних будівель з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичних властивостей бетону;

- побудова на основі теорії Мізеса пластичної течії зі зміцненням на основі асоційованого закону пластичної течії диференціальних рівнянь приростів прогинів при згині елементів залізобетонних каркасних будівель в залежності від приростів навантаження;

- застосування вказаних рівнянь для побудови матриць, необхідних для створення алгоритму методу граничних елементів при розрахунках залізобетонних каркасних будівель з урахуванням зазначених вище нелінійностей і властивостей матеріалів;
- використання створеного алгоритму при покроковому вирішенні як квазістатичних, так і динамічних задач, з використанням методу лінійного прискорення Ньюмарка при вирішенні динамічних задач;
- для реалізації запропонованого алгоритму розроблено комплекс програм на мові програмування Maple.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає в наступному:

1. Вперше для вирішення нелінійних пружнопластичних квазістатичних і динамічних задач для одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель у випадках малої нелінійності матеріалів розроблено метод, заснований на методі малого параметра.

2. Розроблений метод поширено на рішення нелінійних пружнопластичних динамічних задач для одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель у випадках великої нелінійності матеріалів.

3. Розроблено метод побудови диференціальних рівнянь нелінійного пружнопластичного згину плоских моделей залізобетонних каркасних будівель з використанням теорії пластичної течії Р. Мізеса.

4. Одержав подальший розвиток метод граничних елементів для використання його при вирішенні нелінійних пружнопластичних задач статички і динаміки плоских моделей залізобетонних каркасних будівель.

5. Вперше за допомогою модифікованого методу граничних елементів проведено дослідження нелінійних пружнопластичних статичних та динамічних задач для багатоповерхових багатопрольотних каркасних будівель.

6. Розроблено метод побудови диференціальних рівнянь просторового пружнопластичного згину елементів залізобетонних каркасних будівель і

споруд.

7. Отримав подальший розвиток метод граничних елементів для дослідження статичних і динамічних нелінійних пружнопластичних задач для просторових моделей залізобетонних каркасних будівель.

### **Практичне значення отриманих результатів.**

В результаті виконаних досліджень вирішена важлива науково-технічна проблема – розроблені нові методи і моделі розрахунку залізобетонних каркасних будівель і споруд при динамічних впливах, підвищення точності результатів розрахунків будівельних конструкцій, зменшення витрат комп'ютерних ресурсів шляхом застосування нових математичних моделей і науково обгрунтованих методик.

Розроблені методи можуть бути використані

- 1) при розрахунках і конструюванні морських і річкових причалів на хвильові і сейсмічні впливи;
- 2) при проектуванні і розрахунках висотних будівель в сейсмічно небезпечних районах;
- 3) при науково-технічному супроводі об'єктів підвищеної відповідальності при розрахунках на сейсмічні впливи.

Всі розроблені алгоритми можуть бути реалізовані в легкодоступних для широкого кола проектувальників програмах без залучення дорогих і складних спеціальних комплексів.

Результати досліджень по дисертаційній роботі в проектну практику ДП «НДІБК» (м.Київ), ТОВ «Стальпроект-АБ» (м.Одеса) та НДЦ «Екобуд» (м.Одеса) при виконанні розрахунків каркасних будівель на сейсмічні впливи, а також впроваджені в навчальний процес Одеської державної академії будівництва та архітектури при проведенні лекційних та практичних занять для магістрів з дисциплін «Будівельна механіка» і «Залізобетонні конструкції»,

**Особистий внесок здобувача.** Дисертаційна робота є результатом особистого наукового дослідження. Основні положення і висновки є науково



обґрунтованими, розроблені особисто автором. У дослідженнях, виконаних і опублікованих разом зі співавторами, особистий внесок здобувача полягає в постановці завдань, науковому обґрунтуванні та безпосередній участі в їх реалізації.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і отримали позитивну оцінку на конференціях і семінарах:

1. Міжнародна науково-технічна конференція «Структурутворення, міцність і механіка руйнування композиційних будівельних матеріалів і конструкцій», присв. 70-річчя з дня народження д.т.н., проф. В.С. Дорофєєва, Одеса, 20-21 вересня 2012 р.

2. Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми теорії і практики будівельних конструкцій», присв. 100-річчя від дня нар. д.т.н., проф. І.Є. Прокоповича, Одеса, 15-17 квітня 2013 р.

3. Міжнародна науково-технічна конференція «Гідротехнічне і транспортне будівництво », Одеса, 3-6 липня 2015 р.

4. Десята ювілейна всеукраїнська науково-технічна конференція «Будівництво в сейсмічних районах України», Одеса, 14-18 вересня 2015 р.

5. Третя міжнародна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки », Одеса-Київ, 10-14 травня 2016 р.

6. Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми теорії та практики сейсмостійкого будівництва », присв. 90-річчю від дня нар. д.т.н., проф. В.К. Єгупова, Одеса, 25-29 жовтня 2016 р.

7. Четверта міжнародна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки », Одеса, 16-19 травня 2017 р.

8. Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми збереження архітектурної спадщини півдня України», присвяченої пам'яті академіка В.А. Лісенка (1937-2016) Одеса, 18 – 19 травня 2017 р.

9. 74-а науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури 17-18 травня 2018 року.

10. 6th International Congress on Technology-Engineering and Science, Kuala Lumpur.-Malaysia, July 19-20, 2018.

**Публікації.** Основні положення дисертаційної роботи опубліковані в 44 роботах, з яких 25 статей у фахових спеціалізованих виданнях України, три з яких у виданнях, що індексуються базою Index Copernicus, 5 статей у наукових періодичних виданнях інших держав, одна з яких у індексується базою Scopus, 7 тез доповідей у збірниках наукових конференцій, а також 7 статей, що додатково відображають результати роботи.

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, шести розділів, основних висновків, списку використаних джерел (344 найменування) і додатків. Робота викладена на 380 сторінках, в тому числі 278 сторінок основного тексту, 37 сторінок списку використаних джерел, 39 сторінок додатків, містить 112 рисунків.

## **РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД РОЗВИТКУ ДИНАМІЧНИХ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ І РОЗРАХУНКОВИХ МОДЕЛЕЙ СПОРУД. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ.**

### **1.1 Динамічні впливи на споруди**

Динамічний розрахунок споруд проводиться на наступні типи впливів:

а) навантаження, викликані роботою стаціонарного обладнання [203,210,258];

б) навантаження від рухомого підйомно-транспортного устаткування [18,49,113, 194,210];

в) навантаження від наземного, підземного і повітряного транспорту [35,47,83,84,113, 258,259];

г) навантаження від вітрового впливу [17,49];

д) навантаження від впливу хвиль (для гідротехнічних споруд) [51-54, 56,205];

є) ударні і вибухові впливи [1,21,38,45,46,116,175,183,193,194,259,326];

ж) сейсмічні впливи [1,5,12,22,29,35-37,44,45,48,60,65,68,70,71,74-77,101,102,104,114,119-125,140,132,142,149,150,152,173,178,181,185,186,189, 208, 254–257,267-278,284 – 288,291-298,302-319,325-327,330,332-344].

Слід зазначити, що найбільш руйнівними для споруд з'яляються сейсмічні, ударні та вибухові впливи.

Аналізу впливів сильних землетрусів на будівельні (зокрема, залізобетонні) конструкції присвячена велика кількість робіт [2-6, 43,64,65,71,86,87,90–92,97,98,103,104,127–130,144,146,168,169,171,172,176, 177,179-181,188,189,209,309],. У них проводиться глибокий і ретельний

аналіз характеру руйнувань, а також причин, що призвели до цих руйнувань. Під час землетрусу 13.03.1992 р в Східній Туреччині в м Ерзінджан були пошкоджені близько 15 тисяч будівель, понад 4 тисячі були повністю зруйновані або отримали дуже великі руйнування. Накопичення непружних деформацій і локальних руйнувань призвело до збільшення періодів власних коливань конструкцій і до деградації міцності бетону в колонах.

Залізобетонні каркасні будівлі відносяться до особливо вразливих конструкцій при землетрусах [86,257]. В якості однієї з основних причин руйнувань каркасних будівель вказується наявність длінноперіодних складових прискорень ґрунту, які виявилися близькими власним частотам коливань конструкцій внаслідок збільшення періодів власних коливань. В результаті виникли великі нелінійні горизонтальні переміщення і перекося поверхів будівель.

Довгоперіодні складові прискорень ґрунту в діапазоні від 1 с до 2,5 с були присутні також в землетрусі 17.08.99 р і 12.11.99 р. в Туреччині. В результаті було зруйновано понад 20 тисяч будівель, більшість з яких представляли собою залізобетонні каркасні конструкції.

Аналогічні явища спостерігалися в 1988 р в Вірменії. Під час землетрусу були повністю зруйновані залізобетонні каркасні будівлі серії 111. При цьому великопанельні збірні житлові будівлі отримали незначні пошкодження. Початкові періоди основного тону власних коливань каркасних будівель серії 111 дорівнювали приблизно 0,55 - 0,6 с. Під час землетрусу ці періоди при багатоциклових коливаннях будівель збільшувалися, що і призвело до катастрофічних руйнувань.

До числа додаткових причин руйнувань будівель серії 111 під час Спитакського землетрусу можна віднести порівняно велику тривалість коливань (більше 1 хвилини).

На руйнування каркасних будівель вплинули також великі вертикальні навантаження від власної ваги конструкцій. Зусилля, викликані цими діями, в поєднанні з вертикальною складовою сейсмічних прискорень привели до

крихких руйнувань колон. Виникнення параметричних резонансів при цьому також вплинуло на характер і ступінь руйнувань.

Цілком доречною видається тут цитата з монографії Н. Ньюмарка і Е.Розенблюета [152]: «Землетруси систематично виявляють помилки, допущені при проектуванні і будівництві - навіть самі незначні помилки; ця особливість сейсмостійкого будівництва підкреслює труднощі і привабливі сторони рішення його проблем, а також його загальноосвітнє значення, що виходить за межі безпосереднього використання результатів досліджень».

Поблизу Одеської області розташований одна з ділянок активного пояса Землі, що є зоною зчленування древніх платформних плит з тонкою корою Чорноморської западини. У цих зонах, як правило, відбуваються часті дрібні сейсмічні події, проте можуть виникати рідкісні, але досить потужні і високочастотні, а, отже, дуже небезпечні, землетруси.

Дослідження українських вчених свідчать про те, що сейсмічна небезпека в Одеському регіоні істотно занижена. Досить висока ймовірність виникнення землетрусів з інтенсивністю 7 балів. У зв'язку з наявністю великих підземних виробок, з різким підйомом ґрунтових вод небезпека землетрусів ще більш зростає.

Близько одинадцяти мільйонів чоловік (понад 20 відсотків населення України) проживають в сейсмічно небезпечних зонах з інтенсивністю від 6 до 9 балів: Закарпатська (7 б.), Чернівецька (6-7 б.), Львівська (6 б.), Тернопільська (6 б.), Хмельницька (6 б.), Вінницька (6 б.), Кіровоградська (6 б.), Одеська (6-9 б.) області відносяться до таких небезпечних регіонів.

Відповідно до даних, наведених на нових картах сейсмічного районування території України ЗСР-2004, сейсмічна небезпека в ряді районів країни насправді вище, ніж було позначено на попередніх нормативних картах СР-78 і СР-68. Виходячи з цього, можна констатувати, що частина будівель і споруд в сейсмічно небезпечних районах можуть виявитися недостатньо сейсмостійкими.

Міжвідомча комісія з питань науково-технологічної безпеки при Раді національної безпеки і оборони України, 3 квітня 2008 р. прийняла рішення «Про стан забезпечення сейсмічної безпеки та проблем розвитку сейсмостійкого будівництва в Україні».

Слід визнати, що існує нагальна потреба у підвищенні надійності систем життєзабезпечення населення країни і зниження ризиків виникнення надзвичайних ситуацій при сейсмічних впливах. Розрахункові параметри сейсмічної небезпеки з урахуванням місцевих сейсмічних умов повинні бути істотно уточнені.

На фоні різкого стрибка сейсмічності узбережжя здійснюється освоєння шельфу Чорного моря, створення екологічно небезпечних виробництв - нафтотерминалів і нафтопроводів, що вимагає нагального забезпечення надійності морських споруд при впливі землетрусів і морських хвиль.

## **1.2 Основні етапи розвитку методів розрахунку споруд на сейсмічні впливи**

Вперше спроба провести аналіз поведінки будівель під час землетрусу і створити на основі цього аналізу метод розрахунку і проектування споруд була проведена японським вченим Оморі в 1900 році. У цій теорії постулювалось, що будівля являє собою абсолютно тверде тіло, жорстко закріплене в ґрунт і рухається разом з переміщенням верхнього шару ґрунту. При цьому передбачалося, що споруда не робить обертальних рухів, тобто рухається тільки поступально. Звідси випливає, що прискорення будь-якої точки конструкції дорівнює прискоренню ґрунту. Якщо максимальне прискорення ґрунту  $a_{0,\max}$ , то значення максимальної сили інерції будь-якого елемента конструкції з вагою  $Q$  дорівнює

$$S = \frac{a_{0,\max}}{g} Q = k_c Q. \quad (1.1)$$

Тут  $k_c$  - сейсмічний коефіцієнт, що залежить від рівня сейсмічності району. Таким чином, знання значення максимального прискорення ґрунту давало можливість отримати наближену оцінку сейсмічних сил, що діють на елементи конструкції, тобто зробити перевірку міцності споруди. При цьому ці сили передбачалися доданими статично, що визначило назву теорії - статична.

Постулат про недеформіруемість споруд, покладений в основу статичної теорії, виправдовує себе тільки для дуже жорстких конструкцій, деформації яких нехтовно малі в порівнянні з переміщеннями підстави. Для висотних будівель, поперечні деформації яких досить великі, теорія Оморі не дозволяла отримувати достовірні результати. Досвід дослідження результатів подальших землетрусів виявив недоліки статичної теорії.

Вперше розглядати будівлю як пружне тіло, що деформується, при визначенні сейсмічних навантажень спробував японський вчений Мононобе в 1921 р. [305] Передбачалося при цьому, що підстава конструкції робить коливання за синусоїдальним законом

$$y_0(t) = y_{0\max} \sin pt.$$

Конструкція моделювалася стержнем, коефіцієнт жорсткості якого по відношенню до зосередженої маси  $m$ , розташованої на його кінці, дорівнює  $K$ . Диференціальне рівняння коливань вантажу без урахування сил опору має наступний вигляд:

$$m\ddot{y}(t) + Ky(t) = -m\ddot{y}_0(t). \quad (1.2)$$

Тут  $y(t)$  - зміщення маси щодо підстави, а  $y_0(t)$  - зсув підстави стержня відносно нерухомої системи координат.

Сейсмічна сила, що діє на конструкцію, визначається за формулою:

$$S(t) = m[\ddot{y}(t) + \ddot{y}_0(t)]. \quad (1.3)$$

Якщо враховувати тільки вимушені коливання (частота яких збігається з частотою підстави споруди), то для максимального значення сейсмічної сили має місце рівність:

$$S_{\max} = \beta_1 k_c Q, \quad (1.4)$$

де  $Q$  – вага споруди,  $k_c = \frac{\ddot{y}_{0\max}}{g}$  – коефіцієнт сейсмічності,  $\beta_1$  – динамічний

коефіцієнт:

$$\beta_1 = 1 / \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right), \quad (1.5)$$

де  $T = \frac{2\pi}{p}$  – період коливань підстави,  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  – період власних коливань

конструкції. Теорія визначення сейсмічних навантажень, запропонована Мононобе, отримала назву динамічної.

Таким чином, максимальне сейсмічне навантаження залежить не тільки від амплітуди прискорення основи, але і від динамічних параметрів самої споруди. Звідси впливає проблема визначення таких параметрів споруди, які надали б сейсмічному навантаженню мінімальне значення.

Для жорстких будівель  $T \ll T_0$  і тому динамічний коефіцієнт  $\beta_1$  є близьким до одиниці. Якщо період власних коливань є близьким до  $T$ , то коефіцієнт  $\beta_1$  набагато більше одиниці і при  $T \rightarrow T_0$  динамічний коефіцієнт може приймати як завгодно велике значення. Такий результат пояснюється недосконалістю прийнятої моделі споруди. Необхідно врахувати загасаючий характер коливань ґрунту і дисипації енергії в самій споруді. Крім того, в теорії Мононобе не враховувався виникнення вільних коливань, які накладаються на вимушені і створюють посилений спільний ефект. Це підтверджується руйнівним ефектом афтершоків, коли вільні коливання, викликані першим поштовхом, ще не встигають згаснути.

У 1927 р. радянський вчений К.С. Заврієв [76,77] удосконалив динамічну теорію Мононобе, в якій враховувалися тільки сталі коливання, запропонувавши прийняти в розгляд також перехідні процеси. Для цього пропонувалося для руху підстави прийняти косинусоїдальний закон

$$y_0(t) = y_{0\max} \cos pt, \quad (1.6)$$

що дозволяє врахувати раптовий характер початку сейсмічного впливу. Якщо



не враховувати сили опору, то запропонована теорія дає такий вираз для сейсмічної сили:

$$S_{\max} = \beta_2 k_c Q, \quad (1.7)$$

де динамічний коефіцієнт  $\beta_2$  обчислюється за формулою

$$\beta_2 = 2 / \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right). \quad (1.8)$$

Для жорстких споруд (тобто. при  $T = 0$ )

$$S_{\max} = 2k_c Q, \quad (1.9)$$

тобто динамічний коефіцієнт враховує дію раптово прикладеного навантаження.

Максимальні величини сейсмічних навантажень, отримані за формулою Мононобе в два рази менше величин, отриманих за формулою Заврієва. Таким чином, робота К.С. Заврієва [76] представляє собою подальший розвиток динамічної теорії Мононобе.

На закінчення слід зауважити, що основною відмінністю і перевагою динамічної теорії є можливість шляхом зміни динамічних характеристик конструкції впливати на величини сейсмічних сил. Динамічна теорія була істотним кроком вперед в розвитку теорії сейсмостійкості споруд, однак через обмеженість інформації про дійсний характер руху ґрунту обмежилася схематичним поданням його у вигляді гармонійного коливання.

Насправді реальні коливання ґрунту під час землетрусу мають набагато більш складний характер. Наступним етапом у розвитку теорії сейсмостійкості стала спектральна теорія, завдяки якій динамічна теорія була істотно вдосконалена шляхом введення спектральних функцій, що описують залежності максимальних прискорень, швидкостей і переміщень лінійного осцилятора від періоду його власних коливань.

У 1934 році М. Біо [271,272] запропонував метод визначення сейсмічних сил по інструментальних записах коливань поверхні ґрунту при землетрусах. Цей метод дозволяв, виходячи з інструментального запису землетрусу, побудувати аналітичний вираз для величини сейсмічної сили, що діє на

конструкцію з одним ступенем свободи. В якості розрахункової характеристики інтенсивності землетрусу М. Біо запропонував використовувати спектральну функцію сейсмічних прискорень, визначаючи динамічний ефект на моделях. Для цього ряд маятників з різними періодами власних коливань встановлювався на платформі, якій надавався рух, ідентичний руху поверхні ґрунту під час землетрусу. Залежність між максимальними прискореннями маятників і їх періодами носить назву спектральної функції прискорень (або скорочено спектра прискорень) під час землетрусу, а, будучи представленою графічно на кресленні, називається спектральною кривою.

Необхідність обліку дисипації енергії при дослідженні коливань стимулювала поява наступного етапу в розвитку теорії сейсмостійкості споруд. У роботах американського вченого Г. Хаузнера [254] показано великий вплив загасання коливань на величини сейсмічних сил. У найпростішому випадку системи з одним ступенем свободи урахування загасання проводиться відповідно до гіпотезою Фойгта:

$$R_c = \gamma \dot{y}(t) \quad (1.10)$$

( $\gamma$  – коефіцієнт опору).

Диференціальне рівняння коливань в цьому випадку виглядає так:

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -\ddot{y}_0(t), \quad (1.11)$$

где  $\varepsilon = \gamma/2m$  – коефіцієнт загасання.

Використовуючи інтеграл Дюамеля, сейсмічну силу, діючу на конструкцію з одним ступенем свободи, можна записати в такий спосіб:

$$S(t) = -\frac{2\pi m}{T} \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \frac{2\pi}{T}(t-\tau) d\tau. \quad (1.12)$$

З (1.12) випливає, що

$$S_{\max} = \frac{Q}{g} C_w(T), \quad (1.13)$$

де  $C_w(T) = \max_t |W(t, \varepsilon, T)|$ ,  $W(t, \varepsilon, T) = \frac{2\pi}{T} \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \frac{2\pi}{T}(t-\tau) d\tau$ .

У нормах  $C_w(T)$  представлено наступним чином:

$$C_w(T) = k_c g \beta(T), \quad (1.14)$$

де  $\beta(T)$  – коефіцієнт динамічності, завдяки чому формула (1.13) може бути записана у вигляді, аналогічному (1.4):

$$S_{\max} = \beta(T) k_c Q. \quad (1.13a)$$

Для коефіцієнта динамічності  $\beta(T)$  прийнято такий вираз:

$$\beta(T) = 1/T, \text{ але не більш } 3 \text{ і не менш } 0,8.$$

Подальший розвиток спектральної теорії пов'язаний з поширенням її на одновимірні, двовимірні і тривимірні пружні системи із скінченним числом ступенів свободи [22,44,45,61–63,66-77,93,101,114,118,145, 149,150,154,173, 178,185,186,208, 275,278, 287, 296,313].

### 1.3 Розрахункові моделі споруд

Розглянемо ряд моделей споруд, що застосовуються при динамічних розрахунках.

**Одновимірна (консольна) модель (рис. 1.1).** Ця модель розроблена на основі застосування спеціальної процедури "стискання" споруди по ширині і довжині. Найпростіша модель такого типу для будівель і споруд – консольна являє собою колону, жорстко закріплену в ґрунті, на якій

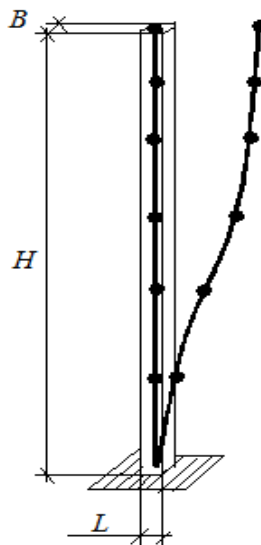


Рис. 1.1 Одновимірна пружна динамічна модель

розташована система зосереджених мас. У нормах СРСР (СНіП11-7-81\* редакція 1991р.) та інших країн ця модель була прийнята в якості основної при визначення частот і форм власних коливань конструкцій, а також для формування сейсмічних навантажень. Слід зауважити, що при цьому процедура стискання моделі не була обумовлена тими чи іншими чіткими правилами, що призвело до того, що в різних конкретних випадках процедура моделювання призводила до моделей з різними параметрами.

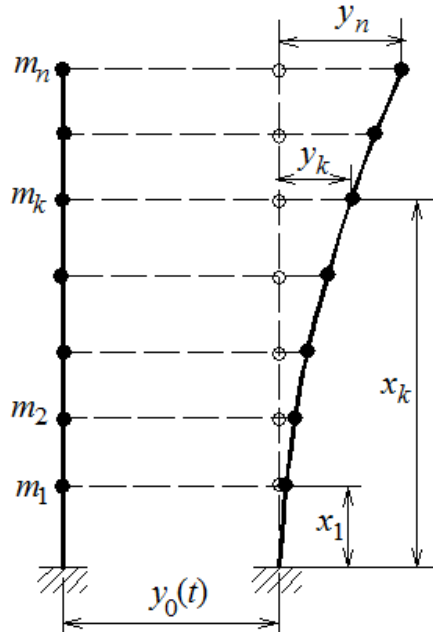


Рис. 1.2 Деформація одновимірної пружної системи із скінченним числом ступенів свободи

Система диференціальних рівнянь коливань системи матеріальних точок  $m_k$  ( $k= 1,2,\dots,n$ ) одновимірної руної системи без урахування сил опору в матричному вигляді записується так:

$$M\ddot{y} + Ky = -M\ddot{y}_0. \quad (1.15)$$

Тут  $M$  - матриця мас,  $K$  - матриця жорсткостей пружної системи. Кругові частоти вільних коливань пружної системи  $\omega_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), амплітудні вектори цих коливань  $Y_i = [Y_{1,i}, Y_{2,i}, \dots, Y_{n,i}]$  визначаються з рівностей

$$KY_i - \omega_i^2 MY_i = 0 \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

Потім амплітудні вектори нормуються.

Переміщення матеріальних точок (зосереджених мас) можуть бути представлені так:

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n Y_{k,i} q_i(t) \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (1.16)$$

Тут  $q_i(t) (i=1,2,\dots,n)$  – узагальнені координати. У матричному вигляді рівності (1.16) записуються так:

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}\mathbf{q}. \quad (1.17)$$

Тут  $\mathbf{V}$  – матриця нормованих амплітудних векторів:  $V_{k,i} = Y_{k,i} (k,i = 1,2,\dots,n)$ ,  $\mathbf{q}$  – вектор узагальнених координат. Після підстановки (1.17) в (1.15) і множення зліва на транспоновану матрицю нормованих амплітудних векторів  $\mathbf{V}^T$  рівність (1.15) приймає наступний вигляд:

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{q} = -\hat{\mathbf{Q}}, \quad (1.18)$$

$\hat{\mathbf{M}}$  – діагональна матриця узагальнених мас:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} M_1 & & & & \\ & M_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & M_n \end{bmatrix}$$

( $M_k$  – узагальнені маси,  $M_i = \sum_{k=1}^n m_k Y_{ki}^2$ ),  $\hat{\mathbf{K}}$  – матриця узагальнених

жорсткостей:

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} M_1\omega_1^2 & & & & \\ & M_2\omega_2^2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & M_n\omega_n^2 \end{bmatrix},$$

$\hat{\mathbf{Q}}$  – вектор з компонентами  $Q_i = \sum_{k=1}^n m_k Y_{ki}$ .

Рівність (1.18) еквівалентна системі скалярних рівностей

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -\frac{Q_i}{M_i} \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (1.19)$$

При урахуванні сил опору рівняння руху зосереджених мас виглядають наступним чином:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = -M\ddot{y}_0, \quad (1.20)$$

де  $C$  – матриця демпфірування коливань. За пропозицією Релея вона може бути представлена так:

$$C = \beta_1 K + \beta_2 M.$$

Тоді рівняння (1.20) приймають такий вигляд:

$$M\ddot{y} + (\beta_1 K + \beta_2 M)\dot{y} + Ky = -M\ddot{y}_0.$$

З використанням перетворень, представлених вище, ця система приводиться до системи незалежних диференціальних рівнянь

$$\ddot{q}_i + (\beta_1 \omega_i^2 + \beta_2)\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -D_i \ddot{y}_0 \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (1.21)$$

Тут  $D_i = \sum_{j=1}^n m_j Y_{ij} / \sum_{j=1}^n m_j Y_{ij}^2$ . Рішення  $i$ -го рівняння (1.21) при нульових

початкових умовах записується так:

$$q_i(t) = -\frac{D_i}{\omega_i} \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-\varepsilon_i(t-\tau)} \sin \omega_i(t-\tau) d\tau,$$

де  $\varepsilon_i = \frac{1}{2}(\beta_1 \omega_i^2 + \beta_2)$ . Інерційна сейсмічна сила, що діє на точку  $T_K$  при коливаннях по  $i$ -й формі визначається за формулою

$$S_{ik}(t) = -m_k Y_{ki} D_i \omega_i \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-\varepsilon_i(t-\tau)} \sin \omega_i(t-\tau) d\tau.$$

Тоді

$$(S_{ik})_{\max} = \frac{Q_k}{g} \eta_{ik} C_W(T_i), \quad (1.22)$$

де  $\eta_{ik} = Y_{ki} D_i$ . Відповідно (1.14)

$$(S_{ik})_{\max} = k_c \beta_i \eta_{ik} Q_k, \quad (1.23)$$

**Двовимірна (плоска) рамна модель (рис. 1.3).** Такого типу модель

виникає в результаті застосування операції математичного "стискання"

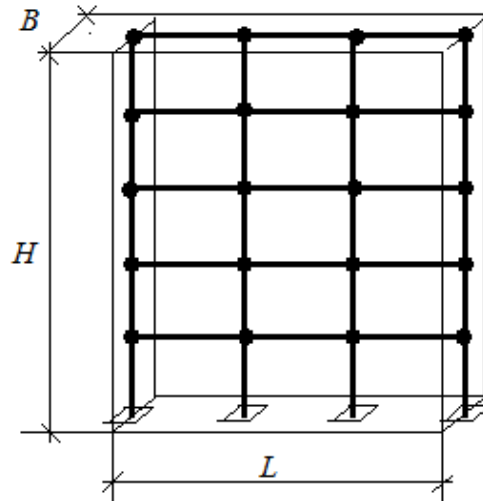


Рис. 1.3 Двовимірна рамна модель

по ширині. Сама процедура "стискання" абсолютно аналогічна застосовуваній при побудові одновимірної моделі. В результаті виходить модель, що представляє собою плоску перехресну систему, що складається з вертикальних і горизонтальних стержнів. Вертикальні стержні моделюють поперечники, а горизонтальні - перекриття будівлі. Двовимірна модель дозволяє врахувати наступні динамічні ефекти: повороти будівлі, деформації перекриття в плані, зміну параметрів поля коливань по довжині споруди, а також інші явища, пов'язані з довжиною споруди.

**Тривимірна (просторова) рамна модель** (рис. 1.4). Очевидно, що така що така модель найбільш близька до реальних конструкцій. Вона являє собою систему пов'язаних скінченних елементів у вигляді стержнів і пластин. Застосування тривимірних моделей є найбільш прогресивним напрямком серед сучасних методів розрахунку будівельних конструкцій [66-73]. Слід зауважити однак, що використання таких моделей пов'язане з витратами великої кількості часу на підготовку вихідних даних, формування розрахункової моделі і призводить до вирішення систем рівнянь дуже великої розмірності. Крім того, як відзначено у [125], не вирішені повністю проблеми, пов'язані з накопиченням похибок і стійкістю обчислювального алгоритму.

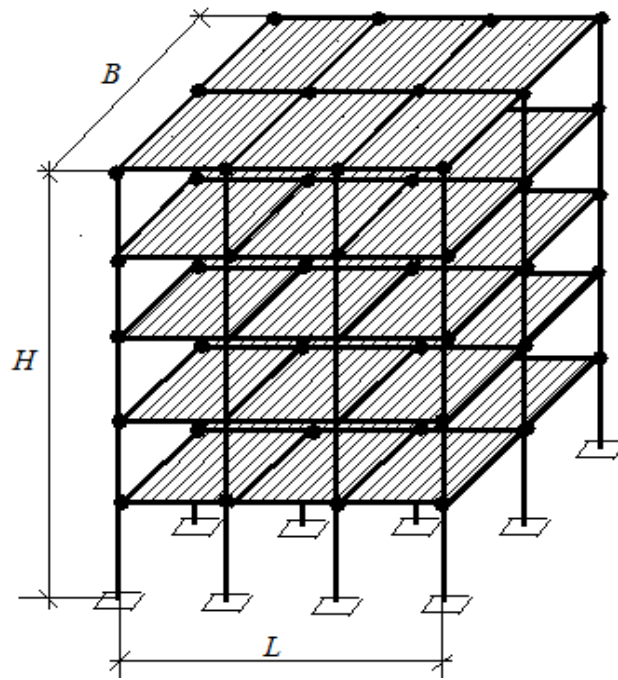


Рис. 1.4 Тривимірна рамна модель

Останнім часом змінилася технологія зведення будівельних споруд, що призвело до істотної зміни конструкції і архітектурної форми. Використання розрахункових сейсмічних навантажень, які були прийняті при розрахунках конструкцій за класичними методами, при проектуванні нових типів будівель і споруд призводять до серйозних помилок, так як нові будівлі не мають тієї регулярності форм і резервів сейсмостійкості, які характерні для старих класичних зразків. Свого часу при підготовці норм СН-8-57 відомий вчений І.Л. Корчинський враховував катастрофічні наслідки Ашхабадського землетрусу. В якості одного з нововведень він пропонував збільшити максимум динамічного коефіцієнта до трьох, що викликало заперечення багатьох фахівців. Мабуть, причина полягала в тому, що розрахунки І.Л. Корчинського були орієнтовані на цегляні будівлі старого спорудження. У багатьох країнах норми з проектування сейсмостійких споруд з'являють собою деякий набір емпіричних формул для визначення сейсмічних сил на будівлю і його елементи, які дають більш-менш прийнятні результати при урахуванні землетрусів силою до 7 балів. Перехід до нелінійних просторових розрахункових моделей не вирішує всіх проблем, але, цілком очевидно, що



розвиток в цьому напрямку необхідний. Дослідження поведінки конструкцій під час землетрусів свідчить про просторовий і нелінійний характер деформування конструкцій навіть в тих випадках, коли ці конструкції мають регулярну структуру і мають симетрію жорсткостей і мас.

Просторові моделі споруд дають можливість враховувати зміну пружних і пластичних властивостей земної поверхні по довжині і ширині споруди. В іншому випадку динамічні ступені свободи не будуть повністю задіяні, що призводить до обнулення сейсмічних сил при крутильних і згинальних в плані коливаннях каркасних будівель з рамною конструктивною схемою. Аналогічні висновки можуть бути зроблені і по відношенню до інших споруд [142,145,191,334-340,342-344].

З приводу недоліків консольної розрахункової моделі відомий фахівець в області сейсмостійкості А.Г.Назаров [137] зробив таке зауваження: "Розрахунок будівлі на сейсмостійкість по суті зведений до розрахунку деякого еквівалентного бруса з урахуванням деформацій згину і зсуву. Для забезпечення роботи будівлі як бруса необхідно, щоб він був досить жорстким у плані і забезпечував недеформованість поперечного перерізу. Для цього потрібні можливо менші розміри відсіків, потрібна досить розвинена мережа внутрішніх поперечних і поздовжніх стін. Необхідно забезпечення достатньої зв'язку цих стін між собою. Міжповерхові перекриття повинні представляти собою жорсткі поперечні діафрагми. Ці діафрагми повинні бути пов'язані зі стінами. Вкрай бажана розстановка антисейсмічних поясів. Словом, потрібно ряд істотних конструктивних обмежень для того, щоб будівля могла б з відомим наближенням розглядатися як брус з жорстким незмінним перерізом. Для того, щоб розрахувати будівлю необхідно на нього накласти ряд конструктивних обмежень для наближення його до розрахункової схеми бруса."

Про недоліки консольної моделі можна навести думку і інших відомих фахівців в області динаміки споруд Н.А.Ніколаенко і Ю.П.Назарова [150]:

«Принципово одновимірні моделі не придатні для дослідження комплек-

су питань про просторової роботі споруд при будь-яких видах збурень (одновимірних або багатовимірних).

Максимальне сейсмічне прискорення, на яке треба розраховувати спорудження, залежить від довжини хвилі або розміру споруди в плані. Чим більше довжина хвилі, тим менше максимальне прискорення, тобто з ростом довжини хвилі або розмірів споруди в плані (жорстких фундаментів) розрахункове прискорення зменшується. Викладена обставина ніяк не може бути врахована в рамках одновимірної моделі.»

#### 1.4. Основи теорії пластичності матеріалів

У ряді робіт А.В. Гришина, С.Ф. Клованича і їх учнів [51-55,94-96] розглянуті статичні і динамічні задачі для масивних залізобетонних споруд з урахуванням нелінійно-пружних і пластичних властивостей бетону і запропоновані їх вирішення на основі МСЕ.

Найпростішим варіантом теорії пластичності матеріалів є деформаційна [94,100]. Ця теорія є розвитком теорії малих пружнопластичних деформацій А.А. Іллюшина [85]. Найбільш обґрунтованою і загальною стосовно бетону вважається теорія Г.А. Генієва [41]. Метою всіх деформаційних теорій є побудова нелінійних залежностей між компонентами векторів напружень  $\sigma = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz}]$  и деформацій  $\epsilon = [\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz}]$ :

$$\sigma = D\epsilon, \quad (1.24)$$

де  $D$  – матриця механічних характеристик, що залежить від досягнутого рівня напружень і деформацій.

При визначенні компонент матриці прийняті наступні допущення:

1. матеріал є однорідним і ізотропним,
2. зв'язок між октаедричними напруженнями  $\tau_0$  і зсувами має наступний

вигляд:

$$\tau_0 = G(\gamma_0)\gamma_0, \quad (1.25)$$

( $G(\gamma_0)$  – січний модуль зсуву),

3. зв'язок між октаедричними нормальними напруженнями і об'ємними деформаціями таких [96]:

$$\sigma_0 = \bar{K}(\gamma_0)(\varepsilon_0 - \rho\gamma_0^2) \quad (1.26)$$

(другий доданок в дужках обумовлений дилатацією,  $\rho$  - модуль дилатації,  $\bar{K}(\gamma_0)$  - січний модуль об'ємних деформацій). Для визначення січних модулів використовується гіпотеза про єдину криву деформування [85], згідно з якою форма співвідношення між напруженнями і деформаціями не залежить від виду напруженого стану, тобто залежність між  $\tau_0$  і  $\gamma_0$  така ж, як при одноосьовому стиску. Звідси слідує що

$$G(\gamma_0) = G_0 \frac{1}{1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3}, \quad (1.27)$$

де  $\eta = \frac{\gamma_0}{\hat{\gamma}_0}$ ,  $\hat{\gamma}_0 = \lambda \frac{\hat{\tau}_0}{G_0}$ ,  $C = \lambda \frac{1 - \xi_r}{\xi_r(\eta_r - 1)^2} - \frac{1}{\eta_r}$ ,  $B = 1 - 2C$ ,  $A = C + \lambda - 2$ ,  $G_0$  -

початковий модуль зсуву,  $\hat{\gamma}_0$  і  $\hat{\tau}_0$  - координати вершини діаграми (1.25),  $\eta_r$  і  $\xi_r$  - відносні координати точки на кривій, що характеризує нахил спадаючої гілки,  $\lambda$  - коефіцієнт пружнопластичних деформацій, що залежить від виду бетону.

Аналогічним чином визначається січний модуль об'ємних деформацій

$$\bar{K}(\gamma_0) = K_0 f(\gamma_0), \quad (1.28)$$

( $K_0$  - початковий об'ємний модуль),

За допомогою (1.31) вираз (1.29) може бути представлений так:

$$\sigma_0 = K(\varepsilon_0, \gamma_0),$$

де  $K(\varepsilon_0, \gamma_0) = \bar{K}(\varepsilon_0) f_d(\varepsilon_0, \gamma_0)$ ,  $f_d(\varepsilon_0, \gamma_0) = 1 - \rho\gamma_0^2 / \varepsilon_0$ .

Січний модуль пружності  $E$  і коефіцієнт Пуассона можуть бути виражені через  $K(\varepsilon_0, \gamma_0)$  та  $G(\gamma_0)$  за допомогою відомих формул

$$E(\varepsilon_0, \gamma_0) = \frac{3K(\varepsilon_0, \gamma_0)G(\gamma_0)}{G(\gamma_0) + K(\varepsilon_0, \gamma_0)}, \quad \nu(\varepsilon_0, \gamma_0) = \frac{E(\varepsilon_0, \gamma_0)}{2G(\gamma_0)} - 1. \quad (1.29)$$

Матриця механічних характеристик  $D$  має стандартний для ізотропного матеріалу вид

$$D = \frac{2G}{1-\mu} \begin{bmatrix} 1 & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix},$$

де  $\mu = \nu/(1 - \nu)$ , а модуль  $G$  і коефіцієнт  $\nu$  визначаються за формулами (1.27) і (1.29).

У наведені вирази входять значення граничних характеристик міцності  $\hat{\tau}_0$  і деформацій октаедричного зсуву  $\hat{\gamma}_0$ , що відповідають вершинам діаграм (1.25), які можуть бути визначені за формулами, наведеними в [94-96].

Слід зауважити, що деформаційна теорія пластичності може застосовуватися при вирішенні практичних задач, в яких розглядаються випадки простого навантаження, коли навантаження, що діють на конструкцію, змінюються пропорційно одному параметру. У випадках же складного навантаження для урахування пластичних властивостей матеріалів необхідно використовувати теорію пластичної течії. Теорія пластичної течії була сформульована в роботах Сен-Венана, М. Леві, Р. Мізеса, Л. Прандтля, Е. Рейсса, Г. Генки [190,115,131,315,182,42]. Відповідно до цієї теорії приріст деформацій  $[d\varepsilon]$  представляється у вигляді суми приростів пружних  $[d\varepsilon_e]$  і пластичних  $[d\varepsilon_p]$  деформацій

$$[d\varepsilon] = [d\varepsilon_e] + [d\varepsilon_p]. \quad (1.30)$$

Пружні деформації визначаються через прирости напружень за допомогою закону Гука

$$[d\varepsilon_e] = D_0^{-1}[d\sigma], \quad (1.31)$$

де  $D_0$  – початкова матриця пружності.

Прирости пластичних деформацій є потенційними і визначаються відповідно до так званого асоційованого закону течії:

$$[d\varepsilon_p] = \vartheta \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]}, \quad (1.32)$$

тобто асоціюються з деякою потенційною функцією  $\Phi$ . Прирости пластичних деформацій спрямовані уздовж нормалі до поверхні, яка визначається цією функцією. Скалярний параметр  $\vartheta$  характеризує величину приросту пластичних деформацій. Функція  $\Phi$  залежить не тільки від напружень  $[\sigma]$ , але і від скалярного параметра  $\chi$ , іменованого параметром зміцнення:

$$\Phi = \Phi([\sigma], \chi) \quad (1.33)$$

і називається функцією навантаження. В окремому випадку при  $\chi = 0$  ця функція вироджується в функцію течії, що відокремлює в просторі напружень область пружного деформування від області пластичного деформування. З (1.33) випливає, що при пластичній деформації напруження знаходяться на поверхні навантаження, тобто при цьому

$$\Phi([\sigma], \chi) = 0.$$

Повний диференціал функції  $\Phi([\sigma], \chi)$

$$d\Phi = \left[ \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]} \right]^T [d\sigma] + \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} d\chi. \quad (1.34)$$

Процес навантаження називається активним, якщо

$$d\Phi = 0, \left[ \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]} \right]^T [d\sigma] > 0;$$

процес називається розвантаженням, якщо

$$\Phi = 0, d\Phi < 0, \left[ \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]} \right]^T [d\sigma] < 0;$$

Процес навантаження називається нейтральним, якщо

$$\Phi = 0, d\Phi = 0, \left[ \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]} \right]^T [d\sigma] = 0.$$

Слід зауважити, що при розвантаженні і нейтральному навантаженні приріст пластичних деформацій і параметра зміцнення дорівнюють нулю:  $[d\varepsilon_p] = \chi = d\chi = 0$ .

Підставлення (1.31) і (1.32) в (1.30) приводить до наступного співвідношення:

$$[d\varepsilon] = \mathbf{D}_0^{-1}[d\sigma] + \vartheta \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]}. \quad (1.35)$$

З (1.34) випливає, що диференціал функції навантаження може бути представлений так:

$$d\Phi = \left[ \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]} \right]^T [d\sigma] - \Lambda \vartheta,$$

де

$$\Lambda = -\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} d\chi \frac{1}{\vartheta}, \quad (1.36)$$

причому в процесі навантаження

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]} \right]^T [d\sigma] - \Lambda \vartheta = 0. \quad (1.37)$$

Виключення з (1.38) і (1.40) параметра  $\vartheta$  призводить до наступного співвідношення [78,94-96]:

$$[\partial \sigma] = \mathbf{D}_{ep}[d\varepsilon], \quad (1.38)$$

де

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_0 - \mathbf{D}_0 \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]} \left[ \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]} \right]^T \mathbf{D}_0 \left\{ \left[ \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]} \right]^T \mathbf{D}_0 \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]} + \Lambda \right\}^{-1} \quad (1.39)$$

( $\mathbf{D}_{ep}$  – пружнопластична матриця матеріалу,  $\mathbf{D}_0$  – початкова матриця пружності).

При урахуванні зміцнення, коли  $\Lambda \neq 0$  приріст параметра  $\chi$  визначається формулою для роботи напружень на пластичних деформаціях [78,94-96]

$$d\chi = [\sigma]^T [d\varepsilon_p].$$

Використовуючи (1.32), знаходимо

$$d\chi = \mathfrak{g}[\sigma]^T \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]}. \quad (1.40)$$

Підставляючи (1.40) в (1.36), отримуємо

$$\Lambda = -\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} [\sigma]^T \frac{\partial \Phi}{[\partial \sigma]}. \quad (1.41)$$

Таким чином, отримані формули для всіх елементів пружнопластичної матриці (1.39).

Вираз для функції, яка визначає граничну поверхню для бетону, наведено в [41]:

$f([\sigma]) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + (R_c - R_p)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - R_c R_p$   
 ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження,  $R_c$  і  $R_p$  – межі міцності матеріала при осьових стиску і розтязі: в дисертації прийнято, що  $R_c = R_{bn} = f_{ck}$ ,  $R_p = R_{btm} = f_{ctk}$ ), що в октаедричних напруженнях може бути представлено в такий спосіб:

$$f(\sigma_0, \tau_0) = \frac{9}{2} \tau_0^2 - 3\sigma_0(R_c - R_p) - R_c R_p. \quad (1.42)$$

Тоді функція навантаження буде мати наступний вигляд:

$$\Phi(\sigma_0, \tau_0, \chi) = f(\sigma_0, \tau_0) + h(\chi), \quad (1.43)$$

( $h(\chi)$  – функція зміцнення). В цьому випадку зручніше параметр  $\chi$  визначати через можливу роботу напружень на пластичних деформаціях в октаедричних координатах:

$$d\chi = \sigma_0 d\varepsilon_0^p + \tau_0 d\gamma_0^p. \quad (1.44)$$

Тут  $d\varepsilon_0^p$  і  $d\gamma_0^p$  – прирости об'ємних пластичних деформацій і пластичних деформацій октаедричного зсуву. оскільки

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \chi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_0} \frac{\partial \tau_0}{\partial \chi},$$

а

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \chi} = \frac{d\sigma_0}{\sigma_0 d\varepsilon_0^p + \tau_0 d\gamma_0^p} = \frac{K_p H_p}{\sigma_0 H_p + \tau_0 K_p}, \quad \frac{\partial \tau_0}{\partial \chi} = \frac{d\tau_0}{\sigma_0 d\varepsilon_0^p + \tau_0 d\gamma_0^p} = \frac{1}{\tau_0} G_p,$$

де  $K_p = \frac{d\sigma_0}{d\varepsilon_0^p}$  – пластичний об'ємний модуль,  $G_p = \frac{d\tau_0}{d\gamma_0^p}$  – пластичний модуль

зсуву,  $H_p = \frac{d\sigma_0}{d\gamma_0^p}$  – пластичний модуль дилатації, то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = \frac{K_p H_p}{\sigma_0 H_p + \tau_0 K_p} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_0} + \frac{1}{\tau_0} G_p \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_0}. \quad (1.45)$$

Для остаточного визначення величин, що входять в формулу (1.39), необхідно знайти значення пластичних модулів у формулі (1.45). Ці значення визначаються за допомогою діаграм деформування. Для визначення функцій  $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon_0, \gamma_0)$  и  $\tau_0 = \tau_0(\gamma_0)$  використовуються діаграми деформування, аналогічні діаграмі при осьовому стиску-розтязі. Так функція  $\tau_0 = \tau_0(\gamma_0)$  в відносних координатах  $\eta = \gamma_0 / \hat{\gamma}_0, \xi = \tau_0 / \hat{\tau}_0$  представляється у вигляді функції  $\xi = \xi(\eta)$ , графік якої наведено на рис. 1.5.

Вираз для цієї функції :

$$\xi = \frac{\lambda \eta}{1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3}. \quad (1.46)$$

значення параметрів  $\lambda, A, B$  и  $C$  ті ж самі, що і в формулі (1.30).

Пластичний модуль зсуву:

$$G_p = \frac{d\tau_0}{d\gamma_0^p} = \frac{d\tau_0}{d\gamma_0 - d\gamma_0^e} = \frac{G_0 G}{G_0 - G}, \quad (1.47)$$

$G_0$  - початковий модуль зсуву,  $G$  - модуль зсуву для повних деформацій:

$$G = \frac{\partial \tau_0}{\partial \gamma_0} = \frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\gamma}_0} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{G_0}{\lambda} \xi', \quad \xi' = \frac{\lambda(1 - B\eta^2 - 2C\eta^3)}{(1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3)^2}.$$

Для визначення пластичних модулів об'ємних деформацій і дилатації діаграма всебічного стиску представляється у вигляді добутку двох функцій

$$\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon_0, \gamma_0) = f_1(\varepsilon_0) f_2(\gamma_0),$$

перша з яких визначає нелінійність об'ємного деформування бетону, друга –



ефект дилатації. Функція  $f_1(\varepsilon_0)$  представляється так:

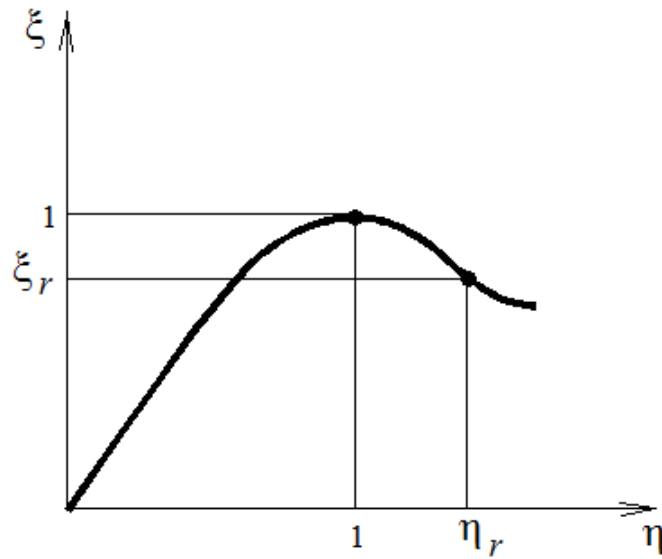


Рис. 1.5 Діаграма деформування бетону.

$$f_1(\varepsilon_0) = \hat{\sigma}_0 \xi(\eta),$$

де  $\eta = \frac{\varepsilon_0}{\hat{\varepsilon}_0}$ ,  $\hat{\varepsilon}_0 = \lambda \frac{\hat{\sigma}_0}{K_0}$ ,  $\hat{\sigma}_0$  і  $\hat{\varepsilon}_0$  – координати вершини діаграми об'ємного стиску. Функція  $f_2(\gamma_0)$  має наступний вигляд:

$$f_2(\gamma_0) = \exp\left(\frac{\omega \zeta}{1 - \zeta}\right),$$

де  $\omega = R_p / R_c$ ,  $\zeta = \gamma_0 / \hat{\gamma}_0$ .

Модулі об'ємних деформацій і дилатації визначаються за такими формулами:

$$K = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\varepsilon}_0} f_2(\gamma_0) \xi', \quad H = f_1(\varepsilon_0) f_2(\gamma_0) \frac{\omega}{\hat{\gamma}_0 (1 - \zeta)^2},$$

а відповідні пластичні модулі – по таким:

$$K_p = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_0^p} = \frac{d\sigma_0}{d\varepsilon_0 - d\varepsilon_0^e} = \frac{K_0 K}{K_0 - K}, \quad H_p = H.$$

Таким чином, представлені всі залежності, що визначають нелінійне деформування бетону при складному напруженому стані і складному навантаженні.

## **1.5 Розрахунок споруд на динамічні дії з урахуванням нелінійного і пластичного деформування матеріалів**

Подальший розвиток методів розрахунку будівель на динамічні дії пов'язаний з урахуванням нелінійного поведіння матеріалів за межами пружності. Розрахунки з використанням нелінійних моделей призводять зазвичай до більш реалістичних результатів, ніж розрахунки з застосуванням лінійно пружних моделей. Однак слід зауважити, що нелінійні динамічні розрахунки споруд є набагато складнішими як з аналітичної, так і з обчислювальної точки зору.

Задача нелінійного динамічного розрахунку споруд вперше була розглянута А.А. Гвоздьовим в роботах [38–40]. Автор використав теорію жорсткопластичного тіла і запропонував наближений кінематичний метод визначення залишкових деформацій в стержневих системах. Ця ж теорія була використана А.Р. Ржаніциним [184] при дослідженні динамічного згину балок і пластин.

При динамічному розрахунку споруд з урахуванням пружнопластичної стадії необхідно врахувати додаткові в порівнянні з розрахунками в пружній стадії чинники: 1) в процесі пружнопластичних деформацій знижуються жорсткісні характеристики конструкції, внаслідок чого відбувається зниження сейсмічних навантажень, 2) конструкція при цьому поглинає більшу кількість енергії, що також призводить до зниження сейсмічного навантаження.

У переважної частини публікацій на першому етапі досліджень поведінки конструкцій в пружнопластичній стадії при сейсмічних впливах розглядалися коливання одновимірних розрахункових моделей з одним ступенем свободи. При цьому в якості діаграм деформування використовувалися діаграми Прандтля і в рідкісних випадках діаграми з урахуванням зміцнення.

В п.2.2. норм в якості одного з основних прийнятий метод розрахунку в непружної стадії з використанням інструментальних записів руху підстави.

Однак передбачається, що при цьому буде використовуватися консольна модель будівлі з одним ступенем свободи. У зв'язку з цим слід навести думку відомих фахівців Н.А.Ніколаєнко і Ю.П.Назарова [150]:

"На нашу думку, досить важко отримати теоретичні  $R(x)$  для різних реальних споруд з урахуванням пружнопластичних деформацій і крихкого руйнування за експериментальними даними, які відносяться до окремих елементів. Отримання цієї характеристики для реальних об'єктів обходиться досить дорого. У розрахунки і дослідження вводяться умовні діаграми, які дуже наближено відображають реальні властивості споруд, тому результати досліджень цього комплексу питань орієнтовно відображають лише якісно сторону завдань в динаміці споруд. З цієї причини одномірні РДМ не придатні для дослідження питань про граничні стани споруд, тобто про поведінку споруди на всіх стадіях його роботи від пружної до руйнування. Для вирішення таких складних задач вони занадто примітивні. Задачі пружнопластичного розрахунку споруд, на нашу думку, повинні вирішуватися на базі окремих двомірних або тривимірних РДМ з використанням умов пластичності або залежності  $R(x)$  для кожного елемента."

Надалі дослідження поведінки пружнопластичних конструкцій проводилися з використанням більш складних консольних моделей, наприклад, багатопверхових. До них в першу чергу слід віднести роботи Е.Е. Хачіяна (монографії [255,256], в яких наведено результати досліджень коливань нелінійно-пружних і пружнопластичних конструкцій з використанням акселерограми сильних землетрусів. В [256] були застосовані білінійні діаграми деформування. У роботах Ржевського В.А. [185-187] представлені розрахункові динамічні пружнопластичні консольні і просторові багатопверхові однопрогонові моделі будівель, програми розрахунку і виконані чисельні дослідження динаміки багатопверхових залізобетонних каркасних будівель при впливі сильних землетрусів. При

цьому використовуються отримані експериментально діаграми деформування поверхів каркасних будівель.

Пружнопластичні властивості залізобетонної конструкції змінюються в процесі впливу динамічних навантажень. Це позначається на її жорсткостних властивостях. Тому в зазначені вище програми розрахунку доводиться додатково вводити формули для обліку змін жорсткості елементів конструкції [26,102,112,122,185–187,192,255]. Також були введені моделі, в яких враховуються локальні пошкодження і руйнування, що виникають в процесі коливань [1,7,256,297,312,313,330].

В останні десятиліття став проводитися прямий (тобто без використання будь-яких моделей, які спрощують конструкцію) динамічний розрахунок будівель і споруд з урахуванням нелінійної роботи матеріалів, зокрема, на набір акселерограм [42,48,49,118,148,170,316]. При цьому використовується скінченноелементна модель споруди. Однак до теперішнього часу такий розрахунок є складним завданням. Для залізобетонних конструкцій це пов'язано з тим, що при динамічному розрахунку за методом скінченних елементів необхідно враховувати напружено-деформований стан в точках конструкції, розподіл стиснутих і розтягнутих зон, зон навантаження і розвантаження, що вимагає досить детального розбиття конструкції на скінченні елементи, а отже, призводить до вирішення систем гігантської розмірності і великим обчислювальним і часовим витратам і накопиченню похибок рахунку.

Для того, щоб обійти проблему багатовимірності в роботах [89, 185-187] проводиться перехід від скінченноелементної до рамної моделі конструкції шляхом побудови діаграм  $R - u$  для елементів рами на основі діаграм  $\sigma - \epsilon$  в точках поперечного перерізу з використанням варіантів деформаційної моделі згину [28], в якій стержень представляється у вигляді сукупності поздовжніх волокон, до кожного з яких може бути застосована діаграма  $\sigma - \epsilon$  при одновимірному напруженому стані і які деформуються спільно завдяки прийнятій гіпотезі плоских перерізів.

В роботі [111] при побудові рамних моделей для переходу від діаграм  $\sigma - \epsilon$  до діаграм  $R - u$  також використовувався деформаційний метод [15, 16]. У статті [263] пропонується метод спрощеного нелінійного розрахунку конструкційних залізобетонних елементів (наприклад, балок), заснований на подання елемента у вигляді набору дрібніших подібних елементів, для яких залежність нормальних напружень на поперечних перерізах від поздовжніх деформацій може бути ототожнена з діаграмою  $\sigma - \epsilon$  для одновимірного розтягу або стиску.

Для вирішення проблем, що виникли в інженерній практиці багатьох країн, велике поширення при розрахунку сейсмостійкості будівель отримав метод спектра несучої спроможності (метод СНС) З. Фрімана [291], при використанні якого виконується нелінійний статичний розрахунок просторової моделі будівлі (побудова спектра несучої спроможності спорудженні), далі спеціальним чином визначаються параметри еквівалентної одномасової моделі, а потім виконується динамічний розрахунок цієї моделі. Потім з урахуванням отриманих результатів проводиться зворотний перехід до початкової моделі для визначення переміщень, деформацій і напружень в елементах конструкції. Методи обчислення несучої спроможності деяких типів будівельних конструкцій запропоновані в [325-327].

Метод СНС набув поширення в останні роки і рекомендується до використання Єврокодом-8 [284,285], кодом США (АТС-40 [267], АТС-55) і стандартом FEMA-356/440 [288]. Методи динамічного розрахунку будівель з урахуванням нелінійного деформування конструкцій на основі методу спектра несучої здатності опубліковані в роботах [20,33,207,268-270,274-276,291,292,302-304,307,314,316,317,333,341].

Для вирішення зазначеної вище проблеми при вирішенні нелінійних задач можуть бути застосовані також і інші методи: метод малого параметра і метод граничних елементів.

Метод малого параметра (метод збурень або асимптотичний метод) в його численних модифікаціях є одним з потужних засобів сучасної математики при вирішенні різноманітних задач математики, механіки і теоретичної фізики; з його допомогою можна отримувати наближені аналітичні представлення рішень досить складних нелінійних моделей, описуваних як звичайними диференціальними рівняннями, так і рівняннями в частинних похідних [8-11,13,23,24,27,34,105,110,111,126,133,135,136,138,139, 141,153,195,204,260,261,264,266,279-283,301,324,328,329,331]. Метод був запропонований А. Пуанкаре на початку 90-х років XIX століття для вирішення задач небесної механіки. В даний час в епоху бурхливого розвитку техніки методи малого параметра аж ніяк не втрачають свого значення. Вони служать для з'ясування якісних особливостей задач, для отримання асимптотик і побудови опорних "тестових" рішень, а в ряді випадків є також основою для розробки методів, що застосовуються в задачах теорії нелінійних коливань. Слід зазначити, що першорядну роль при використанні методу Пуанкаре грає теорія періодичних рішень і теорія стійкості руху диференціальних рівнянь, розвинена в той же період часу А.М. Ляпуновим. Тільки в тридцятих роках двадцятого сторіччя почалося широке використання методів Пуанкаре-Ляпунова в теорії нелінійних коливань. Тут в першу чергу слід відзначити роботи Н. М. Крилова і М.М. Боголюбова [111], А.А. Андронова і А.А. Вітта [11]. У цих роботах, поряд з дослідженням ряду задач, розроблявся сам метод. Суть методу полягає в тому, що в разі малої нелінійності, тобто коли залежність між навантаженнями і переміщеннями точок пружної системи мало відрізняється від лінійної, рішення представляється у вигляді асимптотичних розкладів за ступенями малого параметра, що визначає відхилення нелінійної залежності від лінійної, а потім отримане представлення підставляється в диференціальні рівняння нелінійних коливань. В результаті підстановки виходять рівності, ліві і праві частини яких є розклади за ступенями малого параметра, а коефіцієнтами диференціальні співвідношення, що містять

шукані переміщення точок системи. В результаті прирівнювання коефіцієнтів при однакових ступенях малого параметра виходять диференціальні рівняння, послідовні рішення яких дозволяють знайти коефіцієнти розкладу шуканого рішення в зазначені вище ряди. Слід зазначити, що асимптотичні методи отримали застосування і при вирішенні лінійних задач для об'єктів складної структури, фізичні та геометричні параметри яких досить близькі параметрам об'єктів простої структури [9,27,153]. В роботах [79-81] метод малого параметру був застосований при вирішенні ряду статичних пружнопластичних задач. При цьому розглядалися випадки ідеальної пластичності, що відповідає білінійної діаграмі зв'язку  $\sigma - \epsilon$ , тобто діаграмі Прандтля.

Ідея методу граничних елементів, тобто ідея побудови наближеного розв'язання крайових задач теорії пружності та гідродинаміки шляхом дискретизації граничних умов і побудови фундаментальних функцій була розвинена в працях П.К. Бенерджі, Р. Баттерфілда, К. Бреббія, К. Тілеса, Л. Вроубела, С. Уокера, А.Г. Угодчікова і Н.М. Хуторянського [19,31,32,206]. Фундаментальну роль в появі методу граничних елементів для стержневих систем зіграли дослідження акад. А.Н. Крилова [110], який запропонував використовувати фундаментальні ортонормовані функції для визначення прогинів стержня. Розвиток методу граничних елементів для розв'язання лінійних статичних та динамічних задач, а також задач стійкості для стержневих систем було проведено в роботах В.А. Баженова, А.Ф. Дащенко, В.Ф. Оробея, Д. Д. Работягова і Н.Г. Сурьянінова [14,59,155-167,196-202]. При дослідженні статичних задач для залізобетонних рам з урахуванням наявності тріщин цей метод використовувався в роботах А. В. Коврова, А.М. Кушніра, А.В. Ковтуненко і Н.К. Височан [99].

Основна ідея методу в разі плоского згину полягає в побудові матриці  $A(x)$  фундаментальних функцій задачі Коші для диференціального рівняння згину стержня і побудові матриці-стовпця  $B(x)$  приватного рішення рівняння згину при нульових початкових умовах, за допомогою яких матриця-

стовпець  $Y(x)$  переміщень в перерізі з абсцисою  $x$  може бути представлена так:

$$Y(x) = A(x)Y(0) + B(x), \quad (1.48)$$

де

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & y_4'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & y_4''(x) \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) & y_4'''(x) \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} y_q(x) \\ y_q'(x) \\ y_q''(x) \\ y_q'''(x) \end{bmatrix}$$

( $y_q(x)$  – переміщення точок стержня, викликані поперечним навантаженням з інтенсивністю  $q$ ). Слід зазначити, що метод граничних елементів для стержневих систем призначений для вирішення лінійно пружних задач. У роботі [99] цей метод був поширений на рішення статичних задач для залізобетонних рамних конструкцій з урахуванням процесів тріщиноутворення. При цьому розрахунок проводиться в кілька етапів. На першому етапі методом граничних елементів в припущенні лінійно-пружної роботи проводиться обчислення згинальних моментів в елементах рами. Для тих ділянок елементів конструкції, де значення згинальних моментів перевищують значення моменту тріщиноутворення, обчислюються нові значення жорсткостей також за емпіричними формулами. Потім проводиться новий розрахунок конструкції як лінійно пружного за допомогою методу граничних елементів. Так триває до тих пір, поки відносна похибка обчислення згинальних моментів на всіх ділянках, тобто

$$\delta_{k,j} = \frac{|M_k^j - M_k^{j+1}|}{|M_k^j|}$$

( $k$  – номер ділянки,  $j$  – номер кроку наближень) не стає менше 0,01.

Отже, в зв'язку з тим, що при використанні методу скінченних елементів при дослідженні нелінійних задач динаміки залізобетонних каркасних споруд виникають труднощі, пов'язані з рішенням системи алгебраїчних рівнянь дуже високого порядку і величезними



обчислювальними і часовими витратами і накопиченням похибок розрахунку, доводиться використовувати альтернативні методи.

Одним з них є використання переходу від діаграми  $\sigma - \epsilon$  в поперечному перерізі елемента конструкції до діаграми «сила - переміщення» для елемента в цілому з використанням деформаційної теорії згину, а потім - розрахунок динаміки споруди як рамної конструкції.

Другим з альтернативних методів є використання діаграм «сила - прогин» для елементів конструкції при вирішенні динамічних завдань. Експериментальна побудова таких діаграм для елементів реальних споруд обходиться дуже дорого. Через це в розрахунки вводяться умовні діаграми, які дуже наближено відображають реальні властивості споруд, тому результати досліджень дуже наближено відображають тільки якісну сторону завдань динаміки споруд.

Третім з альтернативних методів з'являється метод спектра несучої спроможності (СНС). Проте слід зауважити, що метод СНС виявився досить ефективним для залізобетонних каркасних споруд простої форми з регулярним розподілом несучих елементів в плані і по вертикалі. Для інших конструкцій будівель він дає суттєві похибки в порівнянні з нелінійними динамічними методами.

Тому автором були запропоновані додаткові альтернативні по відношенню до методу скінчених елементів методи: ґрунтовані на методі малого параметра і методі граничних елементів, для яких необхідна наявність диференціальних рівнянь згину елементів конструкції з урахуванням нелінійного деформування і пластичності матеріалів.

В зв'язку з вищесказаним були поставлені завдання дослідження, які приведені во Вступі.

## **1.6 Висновки за розділом 1**

1. У нормах [50] зазначено, що для особливо відповідальних споруд крім розрахунку за нормами має бути обов'язково проведений прямий динамічний

розрахунок споруди з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей на сейсмічні впливи у вигляді спеціально підбраного пакету акселерограм. Такий розрахунок пов'язаний зі значними обчислювальними і аналітичними труднощами в зв'язку з тим, що існуючі програмні комплекси засновані на методі скінченних елементів. При динамічному розрахунку залізобетонних конструкцій за методом скінченних елементів необхідно враховувати напружено-деформований стан в точках конструкції, розподіл стиснутих і розтягнутих зон, зон навантаження і розвантаження, що вимагає досить детального розбиття елементів конструкції на скінченні елементи, а отже, призводить до вирішення систем великої розмірності і великим обчислювальним витратам (що вимагає багато часу) і накопиченню похибок рахунку. Тому при подібних розрахунках доводиться застосовувати альтернативні методи.

Один з варіантів - перехід від діаграми  $\sigma - \epsilon$  в поперечному перерізі елемента конструкції до діаграми «сила – переміщення» для елемента в цілому з використанням деформаційної теорії згину, а потім - розрахунок динаміки споруди як рамної конструкції. Цей метод істотно спирається на гіпотезу плоских перерізів при згині.

Другий варіант - застосування експериментально отриманих діаграм «сила - переміщення» для елементів конструкції при дослідженні динаміки споруди на сейсмічні впливи. Цей варіант виявляється технічно дуже важко здійсненим при дослідженні сейсмостійкості існуючих будівель або при проектуванні нових.

Третій варіант - побудова спектра несучої спроможності споруди і подальший перехід до одномасової лінійно пружного моделі. Цей метод виявився досить ефективним для залізобетонних каркасних споруд простої форми з регулярним розподілом несучих елементів в плані і по вертикалі. Для інших конструкцій будівель він дає суттєві похибки в порівнянні з нелінійними динамічними методами.

2. Як показали дослідження автора, існують і інші варіанти прямого

динамічного розрахунку споруд – з використанням методу малого параметра і методу граничних елементів, в яких число невідомих дорівнює ступеню статичної невизначеності, тобто в сотні і тисячі разів менше числа невідомих при використанні методу скінченних елементів.

Використання цих методів вимагає наявності диференціальних рівнянь згину залізобетонних балок з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності бетону. При цьому диференціальні рівняння різні для різних теорій пластичності – деформаційної теорії і теорії пластичної течії, перша з яких використовується для випадків простого навантаження, а друга – для випадків складного навантаження.

Тому метою досліджень є розробка методів побудови диференціальних рівнянь для прямих динамічних методів розрахунку залізобетонних каркасних будівель і споруд, що враховують нелінійні і пластичні властивості матеріалів, і розробка методів використання метода малого параметра і метода граничних елементів на основі побудованих диференціальних рівнянь.

## РОЗДІЛ 2

НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ЕЛЕМЕНТІВ ТА ОДНОВИМІРНИХ  
МОДЕЛЕЙ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КАРКАСНИХ БУДІВЕЛЬ

(метод малого параметру)

2.1 Побудова варіанта методу малого параметру для дослідження  
задач нелінійної теорії пружності у випадках малої нелінійності

Розглянемо деформацію балки постійного прямокутного поперечного перерізу, підданого дії сил, що лежать в одній з площин симетрії перерізу. В цьому випадку балка буде відчувати не тільки поперечний згин, а й поздовжню деформацію розтягу або стиску.

Виберемо в недеформованому стані балки систему координат  $x_1, x_2, x_3$  так, як показано на рис.2.1, причому вісь  $x_1$  направимо вздовж осі балки (тобто через центри ваги поперечних перерізів).

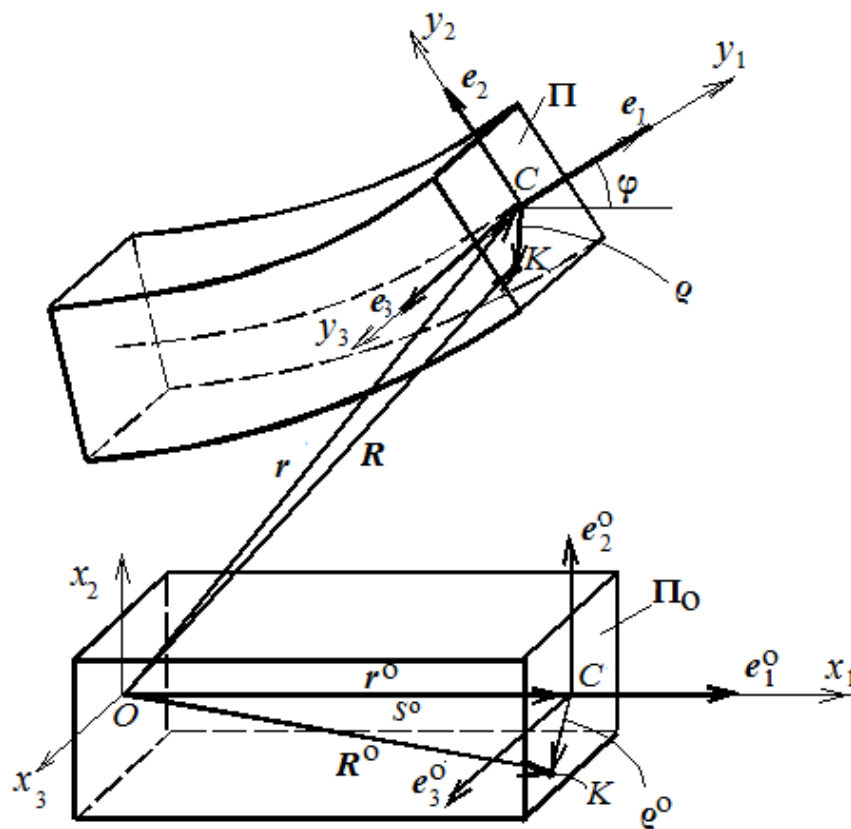


Рис. 2.1 Схема деформації ділянки балки

Виберемо матеріальну точку  $M$  балки, положення якої в недеформованому стані визначається трьома матеріальними координатами  $x_1, x_2, x_3$ . Радіус-вектор  $\mathbf{R}^0$  точки може бути представлений так:

$$\mathbf{R}^0(s^0, x_2, x_3) = \mathbf{r}^0(s^0) + \rho^0(x_2, x_3), \quad \rho^0(x_2, x_3) = x_2 \mathbf{e}_2^0 + x_3 \mathbf{e}_3^0, \quad (2.1)$$

де  $s^0$  - довжина недеформованого відрізка осі балки між поперечним перерізом  $\Pi^0$ , що містить точку  $M$ , і лівим кінцем балки (тобто  $s^0$  дорівнює координаті  $x_1$  точки  $M$ ;  $\mathbf{r}(s^0)$  - радіус-вектор центра ваги перерізу  $K$ );  $\mathbf{e}_2^0$  і  $\mathbf{e}_3^0$  - два взаємно перпендикулярних орта в площині  $\Pi^0$ , причому  $\mathbf{e}_2^0$  лежить в площині згину, а  $\mathbf{e}_3^0$  перпендикулярний цій площині.

Положення точки  $M$  після деформації визначимо за допомогою її радіус-вектора  $\mathbf{R}(s^0, x_2, x_3)$  в такий спосіб:

$$\mathbf{R}(s^0, x_2, x_3) = \mathbf{r}(s^0) + \rho(x_2, x_3), \quad \rho(x_2, x_3) = A \mathbf{e}_1 + B \mathbf{e}_2 + C \mathbf{e}_3. \quad (2.2)$$

Тут  $\mathbf{r}(s^0)$  - радіус-вектор точки  $K$  після деформації;  $A, B$  і  $C$  - скалярні функції координат  $x_2$  і  $x_3$ ;  $\mathbf{e}_1$  - одиничний вектор дотичної до деформованої осі балки в точці  $K$ ;  $\mathbf{e}_2$  і  $\mathbf{e}_3$  - два взаємно перпендикулярних орта в площині  $\Pi^0$ , перпендикулярній вектору  $\mathbf{e}_1$ , які проведені аналогічно векторам  $\mathbf{e}_2^0$  і  $\mathbf{e}_3^0$ . При цьому, очевидно, що  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^0$ . З (2.2) випливає, що виконання гіпотези плоских перерізів не припускається, тому що перший доданок в правій частині формули для  $\rho(x_2, x_3)$  дає зміщення точки  $M$  в напрямку, перпендикулярному площині  $\Pi$ , тобто представляє депланацію перерізу. Зневажимо деформацією балки в напрямку вектора  $\mathbf{e}_3^0$ . Тоді функції  $A$  і  $B$  будуть функціями тільки координати  $x_2$ , тобто

$$A \equiv A(x_2), \quad B \equiv B(x_2), \quad C \equiv x_3. \quad (2.3)$$

Побудуємо тензор  $\mathbf{F}$ , іменованій в [262] градієнтом руху, користуючись діадним представленням його як подвійного тензора

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^0. \quad (2.4)$$

Тут

$$\mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i}, \quad \mathbf{R}_i^0 = \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

Розкладемо вектори  $\mathbf{R}_i$  і  $\mathbf{R}_i^0$  по векторах базисів  $\mathbf{e}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) і  $\mathbf{e}_k^0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) відповідно:

$$\mathbf{R}_i = \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{R}_i^0 = \sum_{k=1}^3 R_{ik}^0 \mathbf{e}_k^0. \quad (2.6)$$

Крім того, розкладемо вектори  $\mathbf{e}_k^0$  по векторах базису  $\mathbf{e}_m$  ( $m = 1, 2, 3$ )

$$\mathbf{e}_k^0 = \sum_{m=1}^3 \beta_{km} \mathbf{e}_m. \quad (2.7)$$

Підставивши (2.6) і (2.7) в (2.4), будемо мати

$$\mathbf{F} = \sum_{m,l=1}^3 F_{ml} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l, \quad F_{ml} = \sum_{i,k=1}^3 \beta_{km} R_{ik} R_{il}^0. \quad (2.8)$$

Враховуючи що  $\frac{d\mathbf{r}^0}{ds^0} = \mathbf{e}_1^0$ , з (2.1) отримаємо

$$R_{ik}^0 = 0 \quad (i \neq k), \quad R_{ii}^0 = 1 \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (2.9)$$

Приймаючи до уваги, що [262]

$$\frac{d}{ds^0} = \lambda_s \frac{d}{ds} \quad (\lambda_s = \frac{ds}{ds^0}), \quad \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \phi' \mathbf{e}_2, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\phi' \mathbf{e}_1 \quad (\phi' = \frac{d\phi}{ds}), \quad (2.10)$$

знаходимо з (2.2), що

$$\mathbf{R}_1 = \lambda_s [(1 - B\phi') \mathbf{e}_1 + A\phi' \mathbf{e}_2], \quad \mathbf{R}_2 = A_2 \mathbf{e}_1 + B_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{e}_3, \quad (2.11)$$

де  $A_2 = dA/dx_2$ ,  $B_2 = dB/dx_2$ ,  $\phi$  - кут між  $\mathbf{e}_1$  і  $\mathbf{e}_1^0$ . Зауважимо, що  $\lambda_s$  називається кратністю подовження осі стержня [262] і характеризує ступінь подовження або стиску осі стержня в даному перерізі.

З (2.11) отримаємо

$$R_{11} = \lambda_s (1 - B\phi'), \quad R_{12} = \lambda_s A\phi', \quad R_{21} = A_2, \quad R_{22} = B_2, \quad R_{33} = 1, \quad (2.12)$$

а інші коефіцієнти  $R_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) дорівнюють нулю.

Неважко переконатися в тому, що

$$\beta_{11} = \cos \phi, \quad \beta_{12} = -\sin \phi, \quad \beta_{21} = \sin \phi, \quad \beta_{22} = \cos \phi, \quad \beta_{33} = 1, \quad (2.13)$$

а решта  $\beta_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) дорівнюють нулю.

Підставляючи (2.10),(2.12) і (2.13) в (2.8), знаходимо

$$\begin{aligned} F_{11} &= \lambda_s [(1 - B\phi') \cos \phi + A\phi' \sin \phi], \quad F_{12} = A_2 \cos \phi + B_2 \sin \phi, \\ F_{21} &= \lambda_s [-(1 - B\phi') \sin \phi + A\phi' \cos \phi], \quad F_{22} = -A_2 \sin \phi + B_2 \cos \phi, \\ F_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Решта величин  $F_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) дорівнюють нулю.

Використовуючи формули [262]

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} + \mathbf{F}^*) - \mathbf{I}, \quad \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{F}^*) \quad (2.15)$$

( $\mathbf{F}^*$  - тензор, спряжений до тензора  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{I}$  - одиничний тензор) отримуємо тензори лінійних деформацій і обертання. З їх допомогою визначаються елементи тензора скінчених деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon}$  [151]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= e_{ii} + \frac{1}{2}[e_{ii}^2 + (e_{ik} - \omega_{ik})^2 + (e_{im} - \omega_{im})^2], \\ \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + \frac{1}{2}[e_{ii}(e_{ij} + \omega_{ij}) + e_{jj}(e_{ij} - \omega_{ij}) + (e_{ik} - \omega_{ik})(e_{jk} - \omega_{jk})], \\ &(i < j, k \neq i, m \neq i, m \neq k, k \neq j) \end{aligned} \quad (2.16)$$

( $e_{ij}$  - елементи тензора лінійних деформацій,  $\omega_{ij}$  - елементи тензора обертання).

З (2.14) - (2.16) отримуємо

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\lambda_s^2 - 1 - 2\lambda_s^2 B\phi'), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(A_2^2 + B_2^2 - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\lambda_s A_2. \quad (2.17)$$

Інші елементи тензора скінчених деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon}$  дорівнюють нулю. При побудові (2.17) передбачалося, що складовими, що містять вирази  $(x_2\phi')^2$  можна знехтувати, тобто що радіус кривизни осі балки значно більше розмірів її поперечного перерізу.

В теорії малих пружно-пластичних деформацій [85] закон залежності між напруженнями і деформаціями може бути записаний в наступному вигляді:

$$\sigma_0 = 3K_0\kappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0, \quad T_1 = 2G_0\rho(\gamma_0)D_1. \quad (2.18)$$

Тут  $K_0$  - початковий модуль об'ємного стиску матеріалу балки (тобто значення цього модуля при лінійно пружної деформації матеріалу),  $G_0$  -

початковий модуль зсуву,  $\sigma_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$  - величина середнього напруження ( $\sigma_{ii}$  - елементи тензора напружень,  $i = 1, 2, 3$ ). Далі,  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3$  - величина середнього подовження,

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} + 3(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)]^{1/2}$$

- октаедрична деформація зсуву,  $T_1 = T - \sigma_0 I$  и  $D_1 = D - \varepsilon_0 I$  - девіатори тензорів напружень  $T$  и деформацій  $D$  відповідно. Функції  $\kappa(\varepsilon_0)$  і  $\rho(\gamma_0)$  характеризують нелінійно-пружну поведінку матеріалу, причому  $\kappa(0) = \rho(0) = 1$ . Зауважимо, що при  $\kappa(\varepsilon_0) \equiv \rho(\gamma_0) \equiv 1$  (2.18) переходить в звичайний закон Гука для ізотропних матеріалів. Будемо вважати, що деформації матеріалу, що виникають, такі, що відхилення співвідношення (2.18) від закону Гука не надто велике. Тоді функції  $\kappa(\varepsilon_0)$  і  $\rho(\gamma_0)$  можна представити в наступному вигляді:

$$\kappa(\varepsilon_0) = 1 + \mu \kappa_\mu(\varepsilon_0), \quad \rho(\gamma_0) = 1 + \mu \rho_\mu(\gamma_0), \quad (2.19)$$

де  $\mu$  - малий параметр,  $\kappa_\mu(x)$  и  $\rho_\mu(x)$  - безперервні функції. Тоді рівності (2.18) можна представити так

$$\sigma_0 = 3K_0[1 + \mu \kappa_\mu(\varepsilon_0)]\varepsilon_0, \quad T_1 = 2G_0[1 + \mu \rho_\mu(\gamma_0)]D_1. \quad (2.20)$$

Будемо розшукувати елементи тензорів напружень і деформацій у вигляді наступних асимптотичних розкладів:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \sigma_{ij}^{[k]}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon_{ij}^{[k]} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.21)$$

Тоді і  $\sigma_0, \varepsilon_0, \gamma_0, T_1$  і  $D_1$  можуть бути представлені так само

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \sigma_0^{[k]}, \quad \varepsilon_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon_0^{[k]}, \quad \gamma_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \gamma_0^{[k]}, \\ T_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k T_1^{[k]}, \quad D_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k D_1^{[k]}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Вважаючи, що функції  $\kappa_\mu(x)$  і  $\rho_\mu(x)$  нескінченно диференційовані (якщо це не так, то їх можна апроксимувати з будь-яким ступенем точності нескінченно диференційованими функціями), можна записати



$$\kappa_{\mu}(\varepsilon_0^{[0]} + x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa_{\mu}^{(m)}(\varepsilon_0^{[0]})}{m!} x^m. \quad (2.23)$$

Підставляючи в (2.23) замість  $x$  вираз  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_0^{[k]} \mu^k$ , отримаємо розклад  $\kappa_{\mu}(\varepsilon_0)$

за ступенми  $\mu$ :

$$\kappa_{\mu}(\varepsilon_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \kappa_{\mu}^{[k]}(\varepsilon_0). \quad (2.24)$$

Наприклад,

$$\kappa_{\mu}^{[0]}(\varepsilon_0) = \kappa_{\mu}(\varepsilon_0^{[0]}), \quad \kappa_{\mu}^{[1]}(\varepsilon_0) = \kappa'_{\mu}(\varepsilon_0^{[0]}) \varepsilon_0^{[1]}.$$

Аналогічно можна отримати вирази і для  $\rho_{\mu}(\gamma_0)$ :

$$\rho_{\mu}(\gamma_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \rho_{\mu}^{[k]}(\gamma_0), \quad (2.25)$$

причому

$$\rho_{\mu}^{[0]}(\gamma_0) = \rho_{\mu}(\gamma_0^{[0]}), \quad \rho_{\mu}^{[1]}(\gamma_0) = \rho'_{\mu}(\gamma_0^{[0]}) \gamma_0^{[1]}.$$

Тоді (2.20) можна представити в наступному вигляді:

$$\sigma_0 = 3K_0 [1 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k+1} \kappa_{\mu}^{[k]}(\varepsilon_0)] \varepsilon_0, \quad \mathbf{T}_1 = 2G_0 [1 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k+1} \rho_{\mu}^{[k]}(\gamma_0)] \mathbf{D}_1. \quad (2.26)$$

Підставляючи (2.22) в (2.26), матимемо для перших двох членів розкладу

$$\begin{aligned} \sigma_0^{[0]} &= 3K_0 \varepsilon_0^{[0]}, \quad \mathbf{T}_1^{[0]} = 2G_0 \mathbf{D}_1^{[0]}, \\ \sigma_0^{[1]} &= 3(K_0 \varepsilon_0^{[1]} + \tilde{K}^{[0]} \varepsilon_0^{[0]}), \quad \mathbf{T}_1^{[1]} = 2(G_0 \mathbf{D}_1^{[1]} + \tilde{G}^{[0]} \mathbf{D}_1^{[0]}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

де  $\tilde{K}^{[0]} = K_0 \kappa_{\mu}^{[0]}(\varepsilon_0)$ ,  $\tilde{G}^{[0]} = G_0 \rho_{\mu}^{[0]}(\gamma_0)$ .

З першого рядка (2.27) отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{[0]} + \sigma_{22}^{[0]} + \sigma_{33}^{[0]} &= 3K_0 (\varepsilon_{11}^{[0]} + \varepsilon_{22}^{[0]}), \\ 2\sigma_{11}^{[0]} - \sigma_{22}^{[0]} - \sigma_{33}^{[0]} &= 2G_0 (2\varepsilon_{11}^{[0]} - \varepsilon_{22}^{[0]}), \\ -\sigma_{11}^{[0]} + 2\sigma_{22}^{[0]} - \sigma_{33}^{[0]} &= 2G_0 (-\varepsilon_{11}^{[0]} + 2\varepsilon_{22}^{[0]}), \\ -\sigma_{11}^{[0]} - \sigma_{22}^{[0]} + 2\sigma_{33}^{[0]} &= -2G_0 (\varepsilon_{11}^{[0]} + \varepsilon_{22}^{[0]}), \\ \sigma_{13}^{[0]} = \sigma_{31}^{[0]} = \sigma_{23}^{[0]} = \sigma_{32}^{[0]} &= 0, \quad \sigma_{12}^{[0]} = \sigma_{21}^{[0]} = 2G_0 \varepsilon_{12}^{[0]}, \end{aligned} \quad (2.28a)$$

а з другого

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{[1]} + \sigma_{22}^{[1]} + \sigma_{33}^{[1]} &= 3[K_0(\varepsilon_{11}^{[1]} + \varepsilon_{22}^{[1]}) + \tilde{K}^{[0]}(\varepsilon_0)(\varepsilon_{11}^{[0]} + \varepsilon_{22}^{[0]})], \\
2\sigma_{11}^{[1]} - \sigma_{22}^{[1]} - \sigma_{33}^{[1]} &= 2[G_0(2\varepsilon_{11}^{[1]} - \varepsilon_{22}^{[1]}) + \tilde{G}^{[0]}(\gamma_0)(2\varepsilon_{11}^{[0]} - \varepsilon_{22}^{[0]})], \\
-\sigma_{11}^{[1]} + 2\sigma_{22}^{[1]} - \sigma_{33}^{[1]} &= 2[G_0(-\varepsilon_{11}^{[1]} + 2\varepsilon_{22}^{[1]}) + \tilde{G}^{[0]}(\gamma_0)(-\varepsilon_{11}^{[0]} + 2\varepsilon_{22}^{[0]})], \\
-\sigma_{11}^{[1]} - \sigma_{22}^{[1]} + 2\sigma_{33}^{[1]} &= -2[G_0(\varepsilon_{11}^{[1]} + \varepsilon_{22}^{[1]}) + \tilde{G}^{[0]}(\gamma_0)(\varepsilon_{11}^{[0]} + \varepsilon_{22}^{[0]})], \\
\sigma_{13}^{[1]} = \sigma_{31}^{[1]} = \sigma_{23}^{[1]} = \sigma_{32}^{[1]} &= 0, \quad \sigma_{12}^{[1]} = \sigma_{21}^{[1]} = 2[G_0\varepsilon_{12}^{[1]} + \tilde{G}^{[0]}(\gamma_0)\varepsilon_{12}^{[0]}.
\end{aligned} \tag{2.28б}$$

З (2.28а) знаходимо

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{[0]} &= K_1^{[0]}\varepsilon_{11}^{[0]} + K_2^{[0]}\varepsilon_{22}^{[0]}, \\
\sigma_{22}^{[0]} &= K_2^{[0]}\varepsilon_{11}^{[0]} + K_1^{[0]}\varepsilon_{22}^{[0]}, \\
\sigma_{12}^{[0]} &= 2G^{[0]}\varepsilon_{12}^{[0]},
\end{aligned} \tag{2.29а}$$

де  $K_1^{[0]} = (3K_0 + 4G_0)/3$ ,  $K_2^{[0]} = (3K_0 - 2G_0)/3$ ,  $G^{[0]} = G_0$ .

З (2.28б) отримаємо

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{[1]} &= K_1^{[0]}\varepsilon_{11}^{[1]} + K_2^{[0]}\varepsilon_{22}^{[1]} + K_1^{[1]}(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_{11}^{[0]} + K_2^{[1]}(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_{22}^{[0]}, \\
\sigma_{22}^{[1]} &= K_1^{[0]}\varepsilon_{22}^{[1]} + K_2^{[0]}\varepsilon_{11}^{[1]} + K_1^{[1]}(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_{22}^{[0]} + K_2^{[1]}(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_{11}^{[0]}, \\
\sigma_{12}^{[1]} &= 2G^{[0]}\varepsilon_{12}^{[1]} + 2G^{[1]}(\psi_0)\varepsilon_{12}^{[0]},
\end{aligned} \tag{2.29б}$$

де  $K_1^{[1]}(\varepsilon_0, \gamma_0) = [3K^{[1]}(\varepsilon_0) + 4G^{[1]}(\gamma_0)]/3$ ,  $K_2^{[1]}(\varepsilon_0, \gamma_0) = [3K^{[1]}(\varepsilon_0) - 2G^{[1]}(\gamma_0)]/3$ .

Представимо функції  $A(x_2)$  і  $B(x_2)$  з (2.3), а також кут повороту перерізу  $\phi$  і кратність подовження осі стержня  $\lambda_z$  в вигляді розкладів за ступенями  $\mu$ :

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A^{[k]}, \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k B^{[k]}, \quad \phi = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \phi^{[k]}, \quad \lambda_s = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \lambda_s^{[k]}. \tag{2.30}$$

Підставивши (2.30) в (2.19), матимемо для перших двох членів розкладу (2.21)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^{[0]} &= [(\lambda_s^{[0]})^2 - 1 - 2(\lambda_s^{[0]})^2 B^{[0]} \frac{d\phi^{[0]}}{ds}] / 2, \\
\varepsilon_{22}^{[0]} &= [(A_2^{[0]})^2 + (B_2^{[0]})^2 - 1] / 2, \\
\varepsilon_{12}^{[0]} &= \lambda_s^{[0]} A_2^{[0]} / 2,
\end{aligned} \tag{2.31а}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^{[1]} &= \lambda_s^{[0]} \lambda_s^{[1]} - [(\lambda_s^{[0]})^2 B^{[0]} \frac{d\phi^{[1]}}{ds} + (\lambda_s^{[0]})^2 B^{[1]} \frac{d\phi^{[0]}}{ds} + 2\lambda_s^{[0]} \lambda_s^{[1]} B^{[0]} \frac{d\phi^{[0]}}{ds}], \\
\varepsilon_{22}^{[1]} &= (A_2^{[0]} A_2^{[1]} + B_2^{[0]} B_2^{[1]}) / 2, \quad \varepsilon_{12}^{[1]} = (\lambda_s^{[0]} A_2^{[1]} + \lambda_s^{[1]} A_2^{[0]}) / 2.
\end{aligned} \tag{2.31б}$$

Тут

$$A_2^{[k]}(x_2) = \frac{dA^{[k]}(x_2)}{dx_2}, B_2^{[k]}(x_2) = \frac{dB^{[k]}(x_2)}{dx_2} \quad (k = 0,1).$$

Отже, в цьому параграфі побудовані асимптотичні розклади (2.21) для елементів тензорів напружень і деформацій за ступенями малого параметра  $\mu$ , який характеризує рівень нелінійності деформаційних властивостей матеріалів, а також отримані співвідношення (2.29а) і (2.29б) між ними для першого і другого наближень. Крім того, отримані співвідношення (2.31а) і (2.31б), зв'язуючі елементи тензора деформацій з кратністю подовження  $\lambda_s$  осі балки (чи колони) та з кутом повороту  $\varphi$  поперечного перерізу її осі для першого і другого наближень. Все це необхідно для побудови диференціальних рівнянь першого і другого наближень згину залізобетонної балки з урахуванням нелінійної деформативності матеріалів.

## 2.2 Диференціальне рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням нелінійних деформаційних властивостей матеріалів в першому наближенні

Будемо розшукувати функції  $A^{[k]}$  і в наступному вигляді:

$$A^{[k]} = a_1^{[k]}x_2 + a_2^{[k]}x_2^2 + a_3^{[k]}x_2^3, B^{[k]} = b_1^{[k]}x_2 + b_2^{[k]}x_2^2. \quad (2.32)$$

Тоді

$$\begin{aligned} A_2^{[k]} &= \frac{dA^{[k]}}{dx_2} = a_1^{[k]} + 2a_2^{[k]}x_2 + 3a_3^{[k]}x_2^2, \\ B_2^{[k]} &= \frac{dB^{[k]}}{dx_2} = b_1^{[k]} + 2b_2^{[k]}x_2. \end{aligned} \quad (2.32a)$$

Дотичні напруження на верхній і нижній гранях балки дорівнюють нулю:

$$\sigma_{12} = 0 \text{ при } x_2 = \pm \frac{h}{2} \quad (2.33)$$

( $h$  - висота поперечного перерізу).

Звідси і з (2.28а) отримуємо

$$\varepsilon_{12}^{[0]} = 0 \text{ при } x_2 = \pm \frac{h}{2}. \quad (2.34)$$

З (2.31) і (2.32) знаходимо:

$$a_1^{[0]} + 2a_2^{[0]}x_2 + 3a_3^{[0]}x_2^2 = 0 \text{ при } x_2 = \pm h/2, \quad (2.35)$$

звідки випливає, що

$$\begin{aligned} a_2^{[0]} = 0, \quad a_1^{[0]} = -\frac{3}{4}h^2 a_3^{[0]}, \quad A^{[0]} = -a_3^{[0]}d(x_2), \quad d(x_2) = \frac{3}{4}h^2 x_2 - x_2^3, \\ A_2^{[0]} = -a_3^{[0]}d_2(x_2), \quad d_2(x_2) = \frac{3}{4}h^2 - 3x_2^2, \quad \varepsilon_{12}^{[0]} = -\frac{1}{2}\lambda_s^{[0]}a_3^{[0]}d_2(x_2). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Нормальні напруження на верхній і нижній гранях також дорівнюють нулю:

$$\sigma_{22} = 0 \text{ при } x_2 = \pm \frac{h}{2} \quad (2.37)$$

З (2.29) отримаємо

$$K_2^{[0]}\varepsilon_{11}^{[0]} + K_1^{[0]}\varepsilon_{22}^{[0]} = 0 \text{ при } x_2 = \pm \frac{h}{2} \quad (2.38)$$

тобто

$$\begin{aligned} K_2^{[0]}[(\lambda_s^{[0]})^2 - 1 - 2(\lambda_s^{[0]})^2(b_1^{[0]}x_2 + b_2^{[0]}x_2^2)\frac{d\phi^{[0]}}{ds}] + \\ + K_1^{[0]}[(b_1^{[0]} + 2b_2^{[0]}x_2)^2 - 1] = 0 \text{ при } x_2 = \pm \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Нехтуючи складовими, що містять  $(\frac{d\phi^{[0]}}{ds})^2$ , знаходимо з (2.39)

$$\begin{aligned} b_2^{[0]} = \frac{K_2^{[0]}(\lambda_s^{[0]})^2}{2K_1^{[0]}} \frac{d\phi^{[0]}}{ds}, \quad b_1^{[0]} = \sqrt{1 + \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}[1 - (\lambda_s^{[0]})^2]}, \\ \varepsilon_{11}^{[0]} = \frac{1}{2}[(\lambda_s^{[0]})^2 - 1 - 2(\lambda_s^{[0]})^2 b_1^{[0]}x_2 \frac{d\phi^{[0]}}{ds}]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Введемо позначення

$$\varepsilon_s = \lambda_s - 1. \quad (2.41)$$

Легко бачити, що  $\varepsilon_s$  - поздовжня відносна деформація балки. З (2.41)

впливають такі формули для коефіцієнтів розкладу:

$$\varepsilon_s^{[0]} = \lambda_s^{[0]} - 1, \quad \varepsilon_s^{[k]} = \lambda_s^{[k]} \quad (k > 0). \quad (2.41a)$$

Враховуючи високу поздовжню жорсткість елементів будівельних конструкцій, тобто вважаючи  $\varepsilon_s \ll 1$ , можемо записати

$$\begin{aligned} \lambda_s^{[0]} &= 1 + \varepsilon_s^{[0]}, (\lambda_s^{[0]})^2 = 1 + 2\varepsilon_s^{[0]}, b_1^{[0]} = 1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} \varepsilon_s^{[0]}, b_2^{[0]} = \frac{K_2^{[0]}}{2K_1^{[0]}} \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}, \\ \varepsilon_{11}^{[0]} &= \varepsilon_s^{[0]} - b_1^{[0]} x_2 \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}, \varepsilon_{22}^{[0]} = \frac{1}{2} [(a_3^{[0]})^2 d_2^2 + 2 \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} (\frac{d\varphi^{[0]}}{ds} x_2 - \varepsilon_s^{[0]})], \\ \sigma_{11}^{[0]} &= E_1^{[0]} (\varepsilon_s^{[0]} - x_2 \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}) + \frac{K_2^{[0]}}{2} (a_3^{[0]})^2 d_2^2, \sigma_{22}^{[0]} = \frac{K_1^{[0]}}{2} (a_3^{[0]})^2 d_2^2, \\ \sigma_{33}^{[0]} &= E_2^{[0]} (\varepsilon_s^{[0]} - x_2 \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}) + \frac{K_2^{[0]}}{2} (a_3^{[0]})^2 d_2^2, \sigma_{12}^{[0]} = -Ga_3^{[0]} d_2(x_2). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Тут

$$E_1^{[0]} = K_1^{[0]} - \frac{(K_2^{[0]})^2}{K_1^{[0]}}, \quad E_2^{[0]} = K_2^{[0]} - \frac{(K_2^{[0]})^2}{K_1^{[0]}}.$$

Головний вектор  $Q$  внутрішніх зусиль в перерізі  $\Pi$  дорівнює

$$Q = Q_b + Q_u + Q_d \quad (2.43)$$

де  $Q_b$  - головний вектор внутрішніх зусиль в бетоні,  $Q_u$  і  $Q_d$  - зусилля у верхній і нижній арматурі відповідно (рис.2.2).

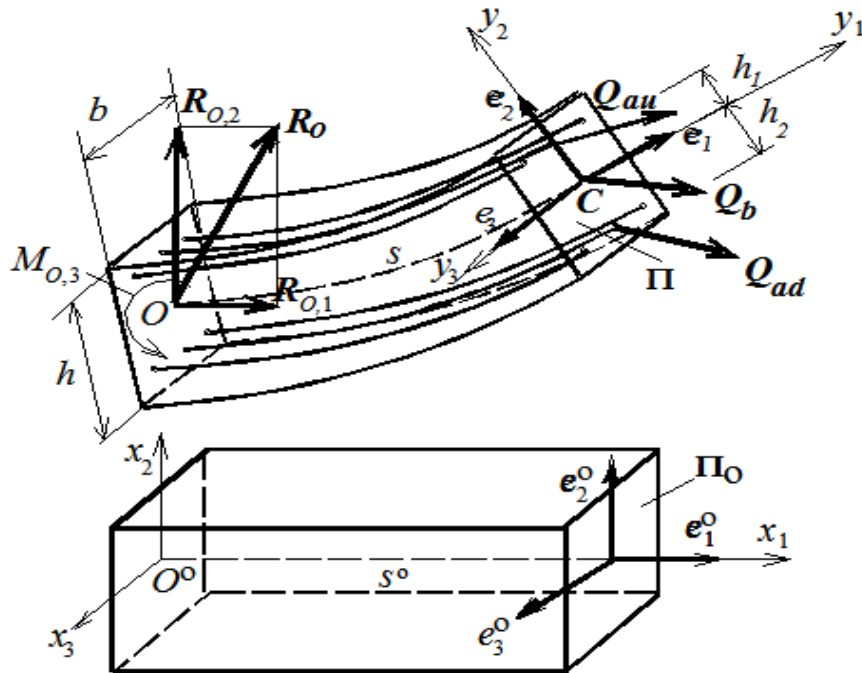


Рис. 2.2 Зусилля, що діють на ділянку залізобетонної балки

З умови рівноваги ділянки  $AC$  балки випливає

$$\mathbf{Q}_b + \mathbf{Q}_u + \mathbf{Q}_d = -\mathbf{R}_O \quad (2.44)$$

( $\mathbf{R}_O$  – сила, прикладена до лівого кінця балки).

Якщо балка статично невизначена, то її опорні реакції залежать від пружних властивостей матеріалу. Тоді  $\mathbf{R}_O$ , а також її горизонтальна  $\mathbf{R}_{O,1}$  і вертикальна  $\mathbf{R}_{O,2}$  складові, теж можуть бути представлені у вигляді асимптотичних розкладів за ступенями  $\mu$ :

$$\mathbf{R}_O = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{R}_O^{[k]}, \quad \mathbf{R}_{O,1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{R}_{O,1}^{[k]}, \quad \mathbf{R}_{O,2} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{R}_{O,2}^{[k]}. \quad (2.45)$$

Якщо ж балка статично визначна, то

$$\mathbf{R}_O = \mathbf{R}_O^{[0]}, \quad \mathbf{R}_{O,1} = \mathbf{R}_{O,1}^{[0]}, \quad \mathbf{R}_{O,2} = \mathbf{R}_{O,2}^{[0]}.$$

Зауважимо, що в другому наближенні вектор  $\mathbf{R}_O = \mathbf{R}_{O,1} + \mathbf{R}_{O,2}$ , а також кут  $\phi$  можуть бути представлені так:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_O &= \mathbf{R}_O^{[0]} + \mu \mathbf{R}_O^{[1]} = \mathbf{R}_{O,1}^{[0]} + \mathbf{R}_{O,2}^{[0]} + \mu (\mathbf{R}_{O,1}^{[1]} + \mathbf{R}_{O,2}^{[1]}), \\ \phi &= \phi^{[0]} + \mu \phi^{[1]}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Тоді проекція вектора  $\mathbf{R}_A$  на напрям вектора  $\mathbf{e}_2$  дорівнює

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{O,2} &= \tilde{R}_{O,2}^{[0]} + \mu \tilde{R}_{O,2}^{[1]} = -(R_{O,1}^{[0]} + \mu R_{O,1}^{[1]}) \sin(\phi^{[0]} + \mu \phi^{[1]}) + \\ &+ (R_{O,2}^{[0]} + \mu R_{O,2}^{[1]}) \cos(\phi^{[0]} + \mu \phi^{[1]}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Оскільки  $\mu$  мало, то  $\sin \mu \phi^{[1]} \approx \mu \phi^{[1]}$ ,  $\cos \mu \phi^{[1]} \approx 1$ . Прирівнюючи коефіцієнти при  $\mu^0$  та при  $\mu^1$ , отримуємо з (2.47)

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{O,2}^{[0]} &= -R_{O,1}^{[0]} \sin \phi^{[0]} + R_{O,2}^{[0]} \cos \phi^{[0]}, \\ \tilde{R}_{O,2}^{[1]} &= -\phi^{[1]} (R_{O,1}^{[0]} \cos \phi^{[0]} + R_{O,2}^{[0]} \sin \phi^{[0]}) - R_{O,1}^{[1]} \sin \phi^{[0]} + R_{O,2}^{[1]} \cos \phi^{[0]}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Аналогічно можна отримати рівності

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{O,1}^{[0]} &= R_{O,1}^{[0]} \cos \phi^{[0]} + R_{O,2}^{[0]} \sin \phi^{[0]}, \\ \tilde{R}_{O,1}^{[1]} &= -\phi^{[1]} (R_{O,1}^{[0]} \sin \phi^{[0]} - R_{O,2}^{[0]} \cos \phi^{[0]}) + R_{O,1}^{[1]} \cos \phi^{[0]} + R_{O,2}^{[1]} \sin \phi^{[0]}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Зауважимо, що якщо балка статично визначна, то

$$R_{O,1}^{[k]} = R_{O,2}^{[k]} = 0 \text{ при } k > 0.$$

Проектуючи векторну рівність (2.44) на напрямок вектора  $e_2$ , отримаємо для першого наближення

$$Q_{b,2}^{[0]} + Q_{u,2}^{[0]} + Q_{d,2}^{[0]} = -\tilde{R}_{O,2}^{[0]}. \quad (2.50)$$

Тут  $\tilde{R}_{O,2}^{[0]}$  – проекція  $R_O^{[0]}$  на вісь  $y_2$ .

Припустимо, що матеріал, з якого виготовлена арматура, в розглянутому діапазоні деформацій мало відрізнеться від лінійно пружного. Крім того, припустимо, що арматура і основний матеріал балки деформуються спільно. Тоді за законом Гука для першого наближення матимемо

$$Q_{u,2}^{[0]} = G_a \varepsilon_{12}^{[0]}(h_1) S_1, \quad Q_{d,2}^{[0]} = G_a \varepsilon_{12}^{[0]}(-h_2) S_2, \quad (2.51)$$

де  $G_a$  – модуль зсуву матеріалу арматури,  $S_1$  та  $S_2$  – площі поперечних перерізів верхньої і нижньої арматури відповідно,

$$\varepsilon_{12}^{[0]}(h_1) = -\frac{1}{2} a_3^{[0]} d_2^{[0]}(h_1), \quad \varepsilon_{12}^{[0]}(-h_2) = -\frac{1}{2} a_3^{[0]} d_2^{[0]}(h_2) \quad (2.52)$$

( $h_1$  і  $h_2$  – відстані від центра ваги перерізу до верхньої і нижньої арматури).

Проекцію головного вектора внутрішніх зусиль в бетоні на напрямок вектора  $e_2$  визначаємо з формули

$$Q_{b,2}^{[0]} = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}^{[0]} dx_2. \quad (2.53)$$

( $b$  – ширина перерізу балки).

З (2.36) отримаємо

$$Q_{b,2}^{[0]} = -b G_0 \lambda_s^{[0]} a_3^{[0]} \frac{h^3}{2}. \quad (2.54)$$

З (2.51)-(2.54) впливає

$$a_3^{[0]} = \frac{2R_{O,2}^{[0]}}{G_0 b h^3 + G_a d_2(h_1) S_1 + G_a d_2(h_2) S_2}. \quad (2.55)$$

Помітимо, що  $a_3^{[0]} h^2 \ll 1$ , і тому в подальшому викладі складовими, що містять квадрат цієї величини, будемо нехтувати.

Аналогічно (2.50) отримуємо рівність

$$Q_{b,1} + Q_{u,1} + Q_{d,1} = -\tilde{R}_{O,1}. \quad (2.56)$$

Тут  $\tilde{R}_{O,1}^{[0]}$  – проекція  $R_O^{[0]}$  на вісь  $y_1$ .

Згідно із законом Гука для арматури маємо

$$Q_{u,1}^{[0]} = E_a \varepsilon_{11}^{[0]}(h_1) S_1, \quad Q_{d,1}^{[0]} = E_a \varepsilon_{11}^{[0]}(-h_2) S_2, \quad (2.57)$$

де  $E_a$  – модуль пружності матеріалу арматури.

З (2.42) випливає

$$Q_{u,1}^{[0]} = E_a S_1 \left( \varepsilon_s^{[0]} - h_1 \frac{d\phi^{[0]}}{ds} \right), \quad Q_{d,1}^{[0]} = E_a S_2 \left( \varepsilon_s^{[0]} + h_2 \frac{d\phi^{[0]}}{ds} \right). \quad (2.58)$$

Проекція головного вектора внутрішніх зусиль в бетоні на напрямок вектора  $e_1$  визначається з формули

$$Q_{b,1}^{[0]} = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}^{[0]} dx_2. \quad (2.59)$$

Нехтуючи складовими, що містять  $\left(\frac{d\phi^{[0]}}{ds}\right)^2$ , отримуємо

$$Q_{b,1}^{[0]} = S \left[ E_1^{[0]} \varepsilon_s^{[0]} + \frac{K_2^{[0]}}{20} (a_3^{[0]})^2 h^4 \right], \quad S = bh. \quad (2.60)$$

З (2.56)–(2.60) знаходимо

$$\varepsilon_s^{[0]} = \left[ -\frac{3}{20} S K_2^{[0]} (a_3^{[0]})^2 h^4 + E_a \frac{d\phi^{[0]}}{ds} (S_1 h_1 - S_2 h_2) - \tilde{R}_{O,1}^{[0]} \right] / H_l, \quad (2.61)$$

$$H_l = S E_1^{[0]} + E_a (S_1 + S_2).$$

Головний момент внутрішніх зусиль в першому наближенні в перерізі  $\Pi$  щодо осі, що збігається з напрямком вектора  $e_3$ , визначається за формулою

$$M_3^{[0]} = M_b^{[0]} - h_1 Q_{u,1}^{[0]} + h_2 Q_{d,1}^{[0]},$$

$$M_b^{[0]} = -b \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{11}^{[0]} dx_2. \quad (2.62)$$

З (2.62) отримуємо

$$M_b^{[0]} = -E_1^{[0]} J \frac{d\phi^{[0]}}{ds}. \quad (2.63)$$

Тоді



$$M_3^{[0]} = [E_1^{[0]}J + E_a(S_1h_1^2 + S_2h_2^2)] \frac{d\phi^{[0]}}{ds} + E_a \varepsilon_s^{[0]}(S_2h_2 - S_1h_1), J = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.64)$$

Враховуючи (2.61), знаходимо

$$M_3^{[0]} = H \frac{d\phi^{[0]}}{ds} + E_a(S_1h_1 - S_2h_2) \frac{\frac{3}{20}SK_2^{[0]}(a_3^{[0]})^2h^4 + \tilde{R}_{O,1}^{[0]}}{H_l}. \quad (2.65)$$

Тут

$$H = E_1^{[0]}J + E_a(S_1h_1^2 + S_2h_2^2) - \frac{E_a^2}{H_l}(S_1h_1 - S_2h_2)^2. \quad (2.65a)$$

Скористаємося співвідношенням [262]

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q}, \quad (2.66)$$

де  $\mathbf{M}$  – головний момент внутрішніх зусиль в перерізі балки відносно її центра ваги,  $\mathbf{Q}$  – їх головний вектор.

Проектуючи рівність (2.66) на напрямок вектора  $\mathbf{e}_3$ , отримуємо для першого наближення

$$\frac{dM_3^{[0]}}{ds} = -Q_2^{[0]}. \quad (2.67)$$

З умови рівноваги маємо  $Q_2^{[0]} = -R_{O,2}^{[0]}$ . Звідси і з (2.60) знаходимо

$$H \frac{d^2\phi^{[0]}}{ds^2} + \frac{E_a(S_1h_1 - S_2h_2)}{H_l} \frac{d\tilde{R}_{O,1}^{[0]}}{ds} = \tilde{R}_{O,2}^{[0]}. \quad (2.68)$$

Відповідно до (2.48) і (2.49) рівність (2.68) можна записати так

$$H \frac{d^2\phi^{[0]}}{ds^2} + (R_{O,1} \sin \phi^{[0]} - R_{O,2} \cos \phi^{[0]}) [1 - D \frac{d\phi^{[0]}}{ds}] = 0, D = \frac{E_a(S_1h_1 - S_2h_2)}{H_l}. \quad (2.69)$$

За допомогою підстановки

$$\frac{R_{O,1}}{R_O} = \cos \delta, \quad \frac{R_{O,2}}{R_O} = \sin \delta \quad (2.70)$$

рівняння (2.69) приводиться до наступного вигляду:

$$H \frac{d^2\theta^{[0]}}{ds^2} + [1 - \frac{E_a(S_1h_1 - S_2h_2)}{H_l} \frac{d\theta^{[0]}}{ds}] R_O^{[0]} \sin \theta^{[0]} = 0 \quad (\theta^{[0]} = \phi^{[0]} - \delta^{[0]}), \quad (2.71)$$

рішення якого при  $S_1 h_1 = S_2 h_2$  виражається через еліптичні інтеграли Якобі [174,262].

У цьому параграфі побудовано диференціальне рівняння (2.69) згину елемента залізобетонного каркасного спорудження першого наближення ( $\varphi^{[0]}$  - перше наближення кута повороту поперечного перерізу).

### 2.3. Диференціальне рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням нелінійних деформаційних властивостей матеріалів в другому і наступних наближеннях

З рівності (2.33) знаходимо для другого наближення

$$\sigma_{12}^{[1]} = 0 \text{ при } x_2 = \pm \frac{h}{2}, \quad (2.72)$$

звідки випливає

$$\varepsilon_{12}^{[1]} = 0 \text{ при } x_2 = \pm \frac{h}{2}. \quad (2.73)$$

З (2.31б) і (2.32) отримуємо:

$$a_1^{[1]} + 2a_2^{[1]}x_2 + 3a_3^{[1]}x_2^2 = 0 \text{ при } x_2 = \pm \frac{h}{2}, \quad (2.74)$$

звідки випливає, що

$$\begin{aligned} a_2^{[1]} = 0, \quad a_1^{[1]} = -\frac{3}{4}h^2 a_3^{[1]}, \quad A^{[1]}(x_2) = -a_3^{[1]}d(x_2), \\ A_2^{[1]}(x_2) = -a_3^{[1]}d_2(x_2), \quad \varepsilon_{12}^{[1]} = -\frac{1}{2}a_3^{[1]}d_2(x_2). \end{aligned} \quad (2.75)$$

З (2.31б), нехтуючи складовими, що містять добутки типу  $\varepsilon_s^{[k]} \frac{d\phi^{[m]}}{ds}$ ,

отримуємо

$$\varepsilon_{11}^{[1]} = \varepsilon_s^{[1]} - B^{[1]}(x_2) \frac{d\phi^{[0]}}{ds} - B^{[0]}(x_2) \frac{d\phi^{[1]}}{ds}. \quad (2.76)$$

З (2.37) випливає

$$\sigma_{22}^{[1]} = 0 \text{ при } x_2 = \pm \frac{h}{2}, \quad (2.77)$$

звідки з урахуванням (2.12б) і (2.5) знаходимо, що

$$\begin{aligned} & \frac{K_1^{[0]}}{2} [A_2^{[0]} (\pm \frac{h}{2}) A_2^{[1]} (\pm \frac{h}{2}) + B_2^{[0]} (\pm \frac{h}{2}) B_2^{[1]} (\pm \frac{h}{2})] + K_2^{[0]} [\varepsilon_s^{[1]} - B^{[1]} (\pm \frac{h}{2}) \frac{d\phi^{[0]}}{ds} - \\ & - B^{[0]} (\pm \frac{h}{2}) \frac{d\phi^{[1]}}{ds}] + K_1^{[1]} (\pm \frac{h}{2}) \varepsilon_{22}^{[0]} (\pm \frac{h}{2}) + K_2^{[1]} (\pm \frac{h}{2}) \varepsilon_{11}^{[0]} (\pm \frac{h}{2}) = 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Тут і в подальшому викладі під виразом  $K_j^{[1]}(x_2)$  ( $j=1,2$ ) розуміється

$K_j^{[1]}(\varepsilon_0(x_2), \gamma_0(x_2))$  ( $j=1,2$ ). З (2.78) отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{b_1^{[1]}}{2} [K_1^{[0]} (b_1^{[0]} + b_2^{[0]} h) - K_2^{[0]} h \frac{d\phi^{[0]}}{ds}] + \frac{b_2^{[1]}}{2} [K_1^{[0]} (b_1^{[0]} h + b_2^{[0]} h^2) - \frac{K_2^{[0]} h^2}{2} \frac{d\phi^{[0]}}{ds}] = \\ & = -K_2^{[0]} (\varepsilon_s^{[1]} - b_1^{[0]} \frac{h}{2} \frac{d\phi^{[1]}}{ds}) - K_1^{[1]} (\frac{h}{2}) \varepsilon_{22}^{[0]} (\frac{h}{2}) - K_2^{[1]} (\frac{h}{2}) \varepsilon_{11}^{[0]} (\frac{h}{2}), \\ & \frac{b_1^{[1]}}{2} [K_1^{[0]} (b_1^{[0]} - b_2^{[0]} h) + K_2^{[0]} h \frac{d\phi^{[0]}}{ds}] + \frac{b_2^{[1]}}{2} [K_1^{[0]} (-b_1^{[0]} h + b_2^{[0]} h^2) - \frac{K_2^{[0]} h^2}{2} \frac{d\phi^{[0]}}{ds}] = \\ & = -K_2^{[0]} (\varepsilon_s^{[1]} + b_1^{[0]} \frac{h}{2} \frac{d\phi^{[1]}}{ds}) - K_1^{[1]} (-\frac{h}{2}) \varepsilon_{22}^{[0]} (-\frac{h}{2}) - K_2^{[1]} (-\frac{h}{2}) \varepsilon_{11}^{[0]} (-\frac{h}{2}). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Складаючи і віднімаючи рівняння (2.79), отримуємо наступну систему рівнянь для визначення  $b_1^{[1]}$  і  $b_2^{[1]}$ :

$$\begin{aligned} & b_1^{[1]} K_1^{[0]} b_1^{[0]} + b_2^{[1]} h^2 [K_1^{[0]} b_2^{[0]} - \frac{K_2^{[0]}}{2} \frac{d\phi^{[0]}}{ds}] = -2K_2^{[0]} \varepsilon_s^{[1]} - D^+, \\ & b_1^{[1]} h [K_1^{[0]} b_2^{[0]} - K_2^{[0]} \frac{d\phi^{[0]}}{ds}] + b_2^{[1]} h K_1^{[0]} b_1^{[0]} = h K_2^{[0]} b_1^{[0]} \frac{d\phi^{[1]}}{ds} - D^-. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Тут

$$\begin{aligned} D^+ &= K_1^{[1]} (\frac{h}{2}) \varepsilon_{22}^{[0]} (\frac{h}{2}) + K_1^{[1]} (-\frac{h}{2}) \varepsilon_{22}^{[0]} (-\frac{h}{2}) + K_2^{[1]} (\frac{h}{2}) \varepsilon_{11}^{[0]} (\frac{h}{2}) + K_2^{[1]} (-\frac{h}{2}) \varepsilon_{11}^{[0]} (-\frac{h}{2}), \\ D^- &= K_1^{[1]} (\frac{h}{2}) \varepsilon_{22}^{[0]} (\frac{h}{2}) - K_1^{[1]} (-\frac{h}{2}) \varepsilon_{22}^{[0]} (-\frac{h}{2}) + K_2^{[1]} (\frac{h}{2}) \varepsilon_{11}^{[0]} (\frac{h}{2}) - K_2^{[1]} (-\frac{h}{2}) \varepsilon_{11}^{[0]} (-\frac{h}{2}). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Враховуючи що  $b_2^{[0]} \sim \frac{d\phi^{[0]}}{ds}$  і нехтуючи  $(\frac{d\phi^{[0]}}{ds})^2$ , отримуємо з (2.80)

$$b_1^{[1]} = -\frac{2K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} \varepsilon_s^{[1]} - \frac{1}{K_1^{[0]}} D^+, \quad b_2^{[1]} = \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} \frac{d\phi^{[1]}}{ds} - \frac{1}{K_1^{[0]} h} D^-. \quad (2.82)$$

Другий член розкладу проекції головного вектора внутрішніх зусиль в бетоні на напрямок вектора  $e_2$  відповідно до (2.28б) визначається з формули

$$Q_{\sigma_2}^{[1]} = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}^{[1]} dx_2 = 2b [G^{[0]} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{12}^{[1]} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} G^{[1]}(\gamma_0) \varepsilon_{12}^{[0]} dx_2]. \quad (2.83)$$

Використовуючи (2.75), знаходимо

$$Q_{\sigma_2}^{[1]} = b \left[ -\frac{G_0}{2} a_3^{[1]} h^3 + 2 \int_{-h/2}^{h/2} G^{[1]}(\gamma_2) \varepsilon_{12}^{[0]} dx_2 \right]. \quad (2.84)$$

Проекція зусилля у верхній арматурі на напрямок вектора  $e_2$  (тобто зрізаючий зусилля в ній) визначається за формулою

$$Q_{u,2}^{[1]} = G_a \varepsilon_{12}^{[1]}(h_1) S_1 = -\frac{G_a}{2} d_2(h_1) S_1 a_3^{[1]}. \quad (2.85)$$

Аналогічно для нижньої арматури отримуємо

$$Q_{d,2}^{[1]} = G_a \varepsilon_{12}^{[1]}(-h_2) S_2 = -\frac{G_a}{2} d_2(h_2) S_2 a_3^{[1]}. \quad (2.86)$$

З умови рівноваги маємо

$$Q_{\sigma,2}^{[1]} + Q_{u,2}^{[1]} + Q_{d,2}^{[1]} + R_{A,2}^{[1]} = 0. \quad (2.87)$$

Враховуючи (2.81) - (2.87), отримуємо

$$a_3^{[1]} = -2[\phi^{[1]}(R_{O,1}^{[0]} \sin \phi^{[0]} + R_{O,2}^{[0]} \cos \phi^{[0]}) - R_{O,2}^{[1]} \cos \phi^{[0]} + R_{O,1}^{[1]} \sin \phi^{[0]} - 2b \int_{-h/2}^{h/2} G^{[1]}(\gamma_2) \varepsilon_{12}^{[0]} dx_2] / \{bG^{[0]}h^3 + G_a[S_u d_2(h_1) + S_d d_2(h_2)]\}. \quad (2.88)$$

Аналогічно (2.87) отримуємо рівність

$$Q_{\sigma,1}^{[1]} + Q_{u,1}^{[1]} + Q_{d,1}^{[1]} + \tilde{R}_{O,1}^{[1]} = 0. \quad (2.89)$$

Відповідно до закону Гука маємо для зусиль в арматурі

$$Q_{u,1}^{[1]} = E_a \varepsilon_{11}^{[1]}(h_1) S_1, \quad Q_{d,1}^{[1]} = E_a \varepsilon_{11}^{[1]}(-h_2) S_2 \quad (2.90)$$

З (2.76) і (2.82) випливає

$$Q_{u,1}^{[1]} = E_a S_1 \left[ \varepsilon_s^{[1]} + \frac{d\phi^{[0]}}{ds} \frac{h_1}{K_1^{[0]}} (D^+ + \frac{h_1}{h} D^-) - h_1 \frac{d\phi^{[1]}}{ds} \right], \quad (2.91)$$

$$Q_{d,1}^{[1]} = E_a S_2 \left[ \varepsilon_s^{[1]} + \frac{d\phi^{[0]}}{ds} \frac{h_2}{K_1^{[0]}} (-D^+ + \frac{h_2}{h} D^-) + h_2 \frac{d\phi^{[1]}}{ds} \right].$$

Проекція головного вектора внутрішніх зусиль в бетоні на напрямок

вектора  $e_1$  для другого наближення визначається з формули

$$Q_{b,1}^{[1]} = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}^{[1]} dx_2 \quad (2.92)$$

Використовуючи (2.296), (2.76) і (2.82), маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{[1]} = & E_1^{[0]} \varepsilon_s^{[1]} - E_1^{[0]} x_2 \frac{d\phi^{[1]}}{ds} + E_1^{[1]}(x_2) \varepsilon_s^{[0]} + \frac{d\phi^{[0]}}{ds} \left[ x_2 (D^+ \frac{K_1^{[0]} + E_1^{[0]}}{2K_1^{[0]}} - \right. \\ & \left. - E_1^{[1]}(x_2)) + x_2^2 \frac{D^- E_1^{[0]}}{h K_1^{[0]}} \right] - \frac{K_2^{[0]}}{2K_1^{[0]}} (D^+ + \frac{2D^-}{h} x_2). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Тут введено позначення  $E_1^{[1]}(x_2) = K_1^{[1]}(x_2) - K_2^{[1]}(x_2) \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}$ .

З (2.92) і (2.93) отримуємо

$$Q_{b,1}^{[0]} = S \left[ E_1^{[0]} \varepsilon_s^{[1]} + \frac{E_1^{[0]}}{K_1^{[0]}} D^- \frac{h}{12} \frac{d\phi^{[0]}}{ds} - \frac{K_2^{[0]}}{2K_1^{[0]}} D^+ \right] + b \tilde{E}_1^{[1]} \varepsilon_s^{[0]}, \quad (2.94)$$

де  $\tilde{E}_1^{[1]} = \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]}(x_2) dx_2$ .

З (2.89)–(2.94) знаходимо

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^{[1]} = & -\frac{E_a}{H_l} (S_1 h_1 - S_2 h_2) \frac{d\phi^{[1]}}{ds} - \frac{\tilde{R}_{O,1}^{[1]}}{H_l} - \tilde{\varepsilon}_s^{[0]}, \\ \tilde{\varepsilon}_s^{[0]} = & \frac{\varepsilon_s^{[0]} b \tilde{E}_1^{[1]} + \frac{d\phi^{[0]}}{ds} \left\{ \frac{E_1^{[0]} S h D^-}{12 K_1^{[0]}} + \frac{E_a}{K_1^{[0]}} [(S_1 h_1 - S_2 h_2) D^+ + \frac{(S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2) D^-}{h}] \right\}}{H_l}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Зауважимо, що  $\tilde{\varepsilon}_s^{[0]}$  залежить тільки від величин, знайдених на попередньому кроці, тобто в першому наближенні.

Аналогічно (2.57) головний момент внутрішніх зусиль у другому наближенні в перерізі  $\Pi$  щодо осі, що збігається з напрямком вектора  $e_3$ , визначається за формулою

$$\begin{aligned} M_3^{[0]} = & -M_b^{[1]} - h_1 Q_{a,1}^{[1]} + h_2 Q_{d,1}^{[1]}, \\ M_b^{[1]} = & b \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{11}^{[1]} dx_2. \end{aligned} \quad (2.96)$$

З (2.96) отримуємо

$$M_b^{[1]} = J[-E_1^{[0]} \frac{d\phi^{[1]}}{ds} + \frac{(K_1^{[0]} + E_1^{[0]})D^+}{2K_1^{[0]}} \frac{d\phi^{[0]}}{ds} - \frac{K_2^{[0]} D^-}{K_1^{[0]} h}] +$$

$$+ b\tilde{E}_1^{[1]*} \varepsilon_s^{[0]} - b\tilde{E}_1^{[1]**} \frac{d\phi^{[0]}}{ds}, \quad (2.97)$$

$$M_3^{[1]} = H \frac{d\phi^{[1]}}{ds} + \frac{E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2)}{H_l} R_{A,1}^{[1]} + \tilde{M}_3^{[0]}, \quad (2.98)$$

$$\tilde{M}_3^{[0]} = -E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2) \varepsilon_s^{[0]} - [\frac{K_1^{[0]} + E_1^{[0]}}{2K_1^{[0]}} JD^+ + \frac{E_a}{K_1^{[0]}} S_1 h_1^2 (D^+ + \frac{h_1}{h} D^-) +$$

$$+ \frac{E_a}{K_1^{[0]}} S_2 h_2^2 (D^+ - \frac{h_2}{h} D^-) - b\tilde{E}_1^{[1]**}] \frac{d\phi^{[0]}}{ds} + J \frac{K_2^{[0]} D^-}{K_1^{[0]} h} - b\tilde{E}_1^{[1]*} \varepsilon_s^{[0]}.$$

Так само як і  $\tilde{\varepsilon}_s^{[0]}$ ,  $\tilde{M}_3^{[0]}$  виражається тільки через величини, знайдені в першому наближенні.

Аналогічно (2.62) маємо

$$\frac{dM_3^{[1]}}{ds} = \tilde{R}_{O,2}^{[1]}. \quad (2.99)$$

Звідси і з (2.98) знаходимо

$$H \frac{d^2 \phi^{[1]}}{ds^2} + (R_{O,1}^{[1]} \sin \phi^{[1]} - R_{O,2}^{[1]} \cos \phi^{[1]}) [1 - D \frac{d\phi^{[1]}}{ds}] = -\frac{d\tilde{M}_3^{[0]}}{ds}. \quad (2.100)$$

Аналогічно (2.71) це рівняння можна записати так

$$H \frac{d^2 \phi^{[1]}}{ds^2} + R_{O,1}^{[1]} \sin \phi^{[1]} - R_{O,2}^{[1]} \cos \phi^{[1]} = -\frac{d\tilde{M}_3^{[0]}}{ds}. \quad (2.101)$$

**Зауваження.** Аналогічним чином можуть бути побуловані диференціальні рівняння для наступних наближень. Вони мають такий же вигляд, як (2.101). Кількість потрібних наближень визначається абсолютною величиною відповідного доданку в асимптотичному розкладі прогину консолі. Якщо вона стає меншою ніж деяка величина, яка пов'язана з потребою точністю обчислень, побудову наближень можна припинити.

У цьому параграфі побудовано диференціальне рівняння згину елементу залізобетонного каркасного спорудження (2.69) другого наближення ( $\varphi^{[1]}$  - друге наближення кута повороту поперечного перерізу,  $\tilde{M}_3^{[0]}(s)$  виражається через величини, знайдені в першому наближенні).

#### 2.4 Застосування методу малого параметру при дослідженні плоского поздовжньо-поперечного згину залізобетонної консольної балки

Досліджується плоский поздовжньо-поперечний згин консольної балки, виготовленої із залізобетону, з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей, диференціальні рівняння якого запропоновані в пункті 1 цього розділу. При цьому передбачається, що матеріал арматури по своїм деформаційним властивостям мало відрізняється від лінійно пружного.

Розглянемо плоский згин армованої консольної балки, що знаходиться під дією двох сил  $F_1$  і  $F_2$  (рис. 2.3). Поперечний переріз балки представлено на рис. 2.4.

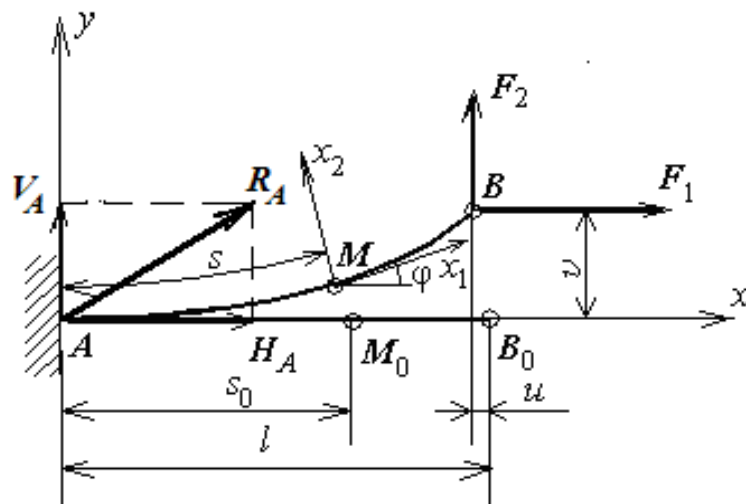


Рис. 2.3 Схема деформації консольної балки при плоскому згині

У п. 2.1 кут повороту  $\varphi(s)$  поперечного перерізу балки, абсциса якого в недеформованому стані балки дорівнює  $s$ , представлений в наступному вигляді:

$$\varphi(s) = \varphi^{[0]}(s) + \varphi^{[1]}(s), \quad (2.102)$$

причому перше наближення  $\phi^{[0]}(s)$  визначається з диференціального рівняння

$$H \frac{d^2 \phi^{[0]}}{ds^2} + (R_{O,1} \sin \phi^{[0]} - R_{O,2} \cos \phi^{[0]}) \left[ 1 - D \frac{d\phi^{[0]}}{ds} \right] = 0, \quad (2.103)$$

де

$$H = E_1^{[0]} J + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2) - \frac{E_a^2 (S_1 h_1 - S_2 h_2)^2}{H_1}, \quad (2.103a)$$

$$D = \frac{E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2)}{H_1}, \quad H_1 = S E_1^{[0]} + E_a (S_1 + S_2)$$

( $E_1^{[0]} = \frac{E_0}{1 - \nu^2}$ ,  $E_0$  – модуль пружності бетону,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $J$  –

момент інерції поперечного перерізу,  $E_a$  – модуль пружності арматури;  $S_1$  і  $S_2$  – площі поперечних перерізів верхньої і нижньої арматури;  $S = bh$ ; розміри  $h$ ,  $h_1$  і  $h_2$  показані на рис. 2.4).

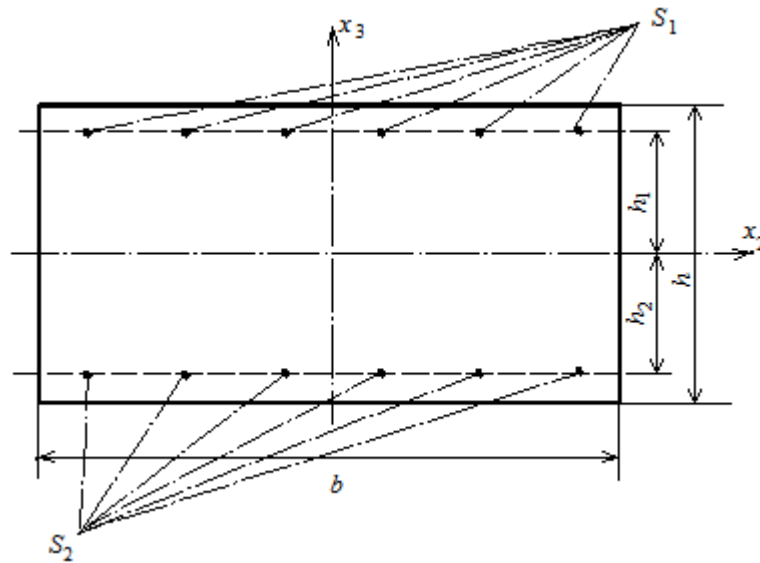


Рис.2.4 Поперечний переріз балки

Надалі будемо вважати, що балка армована симетрично, тобто що  $S_1 = S_2$  и  $h_1 = h_2$ . Беручи також до уваги, що  $R_{O,1} = -F_1$  і  $R_{O,2} = -F_2$ , представляємо (2.103) в наступному вигляді:

$$\frac{d^2 \phi^{[0]}}{ds^2} - \frac{1}{l^2} (\alpha \sin \phi^{[0]} - \beta \cos \phi^{[0]}) = 0, \quad (2.104)$$



де

$$\alpha = \frac{F_1 l^2}{H}, \beta = \frac{F_2 l^2}{H}. \quad (2.104a)$$

Користуючись малістю кута  $\phi^{[0]}$ , представимо  $\sin \phi^{[0]}$  і  $\cos \phi^{[0]}$  так

$$\begin{aligned} \sin \phi^{[0]} &= \phi^{[0]} - (\phi^{[0]})^3 / 6, \\ \cos \phi^{[0]} &= 1 - (\phi^{[0]})^2 / 2 \end{aligned}$$

і будемо шукати рішення рівняння (2.104) за наступною схемою:

$$\frac{d^2 \phi_{n+1}^{[0]}}{ds^2} = \frac{1}{l^2} \left\{ \alpha \left[ \phi_n^{[0]} - \frac{(\phi_n^{[0]})^3}{6} \right] - \beta \left[ 1 - \frac{(\phi_n^{[0]})^2}{2} \right] \right\}. \quad (2.105)$$

Припускаючи, що  $\phi_0^{[0]} = 0$ , знаходимо

$$\frac{d^2 \phi_1^{[0]}}{ds^2} = -\frac{\beta}{l^2}. \quad (2.106)$$

Двічі інтегруючи по  $s$ , отримуємо

$$\frac{d\phi_1^{[0]}}{ds} = -\frac{\beta}{l^2} s + c_0, \quad \phi_1^{[0]} = -\frac{\beta}{l^2} \frac{s^2}{2} + c_0 s + c_1. \quad (2.107)$$

З граничних умов

$$\phi(0) = 0, \quad \frac{d\phi}{ds}(l) = 0 \quad (2.108)$$

(друге випливає з рівності  $M_z(l) = 0$ ) знаходимо

$$c_0 = \frac{\beta}{l}, \quad c_1 = 0. \quad (2.109)$$

Зауважимо, що величини  $\alpha$  і  $\beta$  малі, в чому можна переконатися на конкретному прикладі, наведеному нижче. Підставляючи  $\phi_1^{[0]}$  в праву частину (2.105), двічі інтегруючи по  $s$  і обмежуючись складовою частиною другого порядку малості по  $\alpha$  і  $\beta$ , отримуємо

$$\phi_2^{[0]} = \sum_{k=0}^4 \Phi_k^{[0]} s^k. \quad (2.110)$$

$$\text{де } \Phi_2^{[0]} = -\frac{\beta}{2l^2}, \quad \Phi_3^{[0]} = \frac{\alpha\beta}{6l^3}, \quad \Phi_4^{[0]} = -\frac{\alpha\beta}{24l^4}.$$

Коефіцієнти  $\Phi_0^{[0]}$  і  $\Phi_1^{[0]}$  визначаються з граничних умов (2.108):

$$\Phi_0^{[0]} = 0, \Phi_1^{[0]} = -\sum_{k=2}^4 k \Phi_k^{[0]} l^{k-1} = \frac{\beta(3-\alpha)}{3l}. \quad (2.111)$$

Для складової  $\varphi^{[1]}$  другого наближення в (2.102) в разі симетричного армування маємо наступне диференціальне рівняння:

$$H \frac{d^2 \varphi^{[1]}}{ds^2} - (F_1 \cos \varphi^{[0]} + F_2 \sin \varphi^{[0]}) \varphi^{[1]} = -\frac{dM_{3,0}^{[1]}}{ds}. \quad (2.112)$$

Тут

$$\begin{aligned} M_{3,0}^{[1]} &= -[D_1 \Delta^+ - b \tilde{E}_1^{[1]**}] \psi^{[0]} + D_2 \Delta^- - b E_1^{[1]*} \varepsilon_s^{[0]}, \\ \psi^{[0]} &= \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}, D_1 = \frac{K_1^{[0]} + E_1^{[0]}}{2K_1^{[0]}} J + 2 \frac{E_a}{K_1^{[0]}} S_1 h_1^2, D_2 = \frac{K_2^{[0]} J}{K_1^{[0]} h}, \\ K_1^{[0]} &= \frac{3K_0 + 4G_0}{3}, K_2^{[0]} = \frac{3K_0 - 2G_0}{3}, \tilde{E}_1^{[1]*} = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]} x_2 dx_2, \tilde{E}_1^{[1]**} = \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]} x_2^2 dx_2, E_1^{[1]} = K_1^{[1]} - K_2^{[1]} \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}, \\ K_1^{[1]} &= \frac{3K^{[1]}(\varepsilon_0^{[0]}) + 4G^{[1]}(\gamma_0^{[0]})}{3}, K_2^{[1]} = \frac{3K^{[1]}(\varepsilon_0^{[0]}) - 2G^{[1]}(\gamma_0^{[0]})}{3}, \\ \Delta^+ &= K_1^{[1]} \left(\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{22}^{[0]} \left(\frac{h}{2}\right) + K_1^{[1]} \left(-\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{22}^{[0]} \left(-\frac{h}{2}\right) + K_2^{[1]} \left(\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{11}^{[0]} \left(\frac{h}{2}\right) + \\ &+ K_2^{[1]} \left(-\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{11}^{[0]} \left(-\frac{h}{2}\right), \\ \Delta^- &= K_1^{[1]} \left(\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{22}^{[0]} \left(\frac{h}{2}\right) - K_1^{[1]} \left(-\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{22}^{[0]} \left(-\frac{h}{2}\right) + K_2^{[1]} \left(\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{11}^{[0]} \left(\frac{h}{2}\right) + \\ &- K_2^{[1]} \left(-\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{11}^{[0]} \left(-\frac{h}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.113)$$

( $\varepsilon_s^{[0]}$  – поздовжня відносна деформація осі балки в першому наближенні,  $K_0$  і  $G_0$  – початкові, тобто відповідні лінійно пружній деформації модулі об'ємного стиску і зсуву бетону,  $\varepsilon_0^{[0]} = (\varepsilon_{11}^{[0]} + \varepsilon_{22}^{[0]} + \varepsilon_{33}^{[0]})/3$  – величина середнього подовження,  $\gamma_0^{[0]} = 2\{(\varepsilon_{11}^{[0]})^2 + (\varepsilon_{22}^{[0]})^2 + (\varepsilon_{33}^{[0]})^2 - \varepsilon_{11}^{[0]} \varepsilon_{22}^{[0]} - \varepsilon_{22}^{[0]} \varepsilon_{33}^{[0]} + (\varepsilon_{23}^{[0]})^2 + (\varepsilon_{31}^{[0]})^2\}^{1/2}/3$  – октаедрична деформація зсуву,  $\varepsilon_{ij}^{[0]}$  – елементи тензора скінчених деформацій в точках балки, визначені в першому наближенні).

Величини, що стоять в правих частинах рівності (2.113), являють со-

бою функції координати  $s$  (за винятком  $K_1^{[0]}$  і  $K_2^{[0]}$ , які є константами, і  $K_1^{[1]}$  і  $K_2^{[1]}$ , які є функціями координати  $x_2$ ), проте аргумент  $x_2$  цих функцій не вказано, за винятком випадків, коли цей аргумент приймає певне значення. Функції  $K^{[1]}(\varepsilon_0)$  і  $G^{[1]}(\varepsilon_0)$  фігурують в наступному представленні січного об'ємного модуля пружності і січного модуля зсуву для нелінійно пружного матеріалу:

$$K(\varepsilon_0) = K_0 + K^{[1]}(\varepsilon_0), G(\varepsilon_0) = G_0 + G^{[1]}(\varepsilon_0). \quad (2.114)$$

Надалі обмежуємося випадком, коли

$$\begin{aligned} K^{[1]}(\varepsilon_0) &= \tilde{K}^{[1+]} \varepsilon_0, G^{[1]}(\gamma_0) = \tilde{G}^{[1+]} \gamma_0 \quad (\text{при } \varepsilon_{11} \geq 0), \\ K^{[1]}(\varepsilon_0) &= \tilde{K}^{[1-]} \varepsilon_0, G^{[1]}(\gamma_0) = \tilde{G}^{[1-]} \gamma_0 \quad (\text{при } \varepsilon_{11} < 0), \end{aligned} \quad (2.115)$$

де  $\tilde{K}^{[1+]}$ ,  $\tilde{K}^{[1-]}$ ,  $\tilde{G}^{[1+]}$ ,  $\tilde{G}^{[1-]}$  – постійні величини.

У додатку А показано, що

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{[0]} &= \varepsilon_s^{[0]} - \left(1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} \varepsilon_s^{[0]}\right) \psi^{[0]} x_2, \\ \varepsilon_{22}^{[0]} &= \frac{1}{2} [a_3^* d_2^2(x_2) + 2 \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} (\psi^{[0]} x_2 - \varepsilon_s^{[0]})], \\ \varepsilon_{12}^{[0]} &= -\frac{1}{2} (1 + \varepsilon_s^{[0]}) a_3^{[0]} d_2(x_2), \varepsilon_{33}^{[0]} = \varepsilon_{13}^{[0]} = \varepsilon_{23}^{[0]} = 0. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Тут

$$\begin{aligned} a_3^* &= (a_3^{[0]})^2, \varepsilon_s^{[0]} = \left(-\frac{3}{20} S K_2^{[0]} a_3^* h^4 + F_1 \cos \phi^{[0]} + F_2 \sin \phi^{[0]}\right) / H_l, \\ a_3^{[0]} &= (F_1 \sin \phi^{[0]} - F_2 \cos \phi^{[0]}) / H_s, H_l = S E_1^{[0]} + 2 E_a S_1, \\ H_s &= G^{[0]} b \frac{h^3}{2} + 2 G_a d_2(h_1), d_2(x_2) = \frac{3}{4} h^2 - x_2^2 \end{aligned} \quad (2.117)$$

( $G_a$  – модуль зсуву арматури).

Зауважимо, що  $\phi^{[0]}$ ,  $\psi^{[0]}$ ,  $\alpha_3^*$  и  $\varepsilon_s^{[0]}$  можуть бути представлені так:

$$\begin{aligned} \phi^{[0]} &= \beta \bar{\phi}^{[0]}, \psi^{[0]} = \beta \frac{1}{l} \bar{\psi}^{[0]}, a_3^{[0]} = -\beta A_3 \bar{a}_3^{[0]}, a_3^* = \beta^2 A_3^2 \bar{a}_3^*, \\ \varepsilon_s^{[0]} &= \beta \frac{E_{s,1}}{l} \bar{\psi}^{[0]} + \alpha E_{s,2} + \beta^2 (E_{s,2} \bar{\phi}^{[0]} - E_{s,0} A_3^2 \bar{a}_3^2) \end{aligned} \quad (2.118)$$

де

$$\begin{aligned}
 A_3 &= H/l^2 H_s, \quad E_{s,0} = 3SK_2^{[0]} h^4, \quad E_{s,1} = E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2), \\
 E_{s,2} &= H/l^2 H_l, \quad \bar{\phi}^{[0]} = (1 - \alpha/3)\zeta - \zeta^2/2 + \alpha\zeta^3/6 - \alpha\zeta^4/24, \\
 \bar{\psi}^{[0]} &= 1 - \alpha/3 - \zeta + \alpha\zeta^{2/2} - \alpha\zeta^3/6, \quad \bar{a}_3^{[0]} = 1 - \alpha\bar{\phi}^{[0]}, \\
 \bar{a}_3^* &= (\bar{a}_3^{[0]})^2, \quad \zeta = s/l.
 \end{aligned}
 \tag{2.118a}$$

Зауважимо, що при симетричному армуванні  $E_{s,1} = 0$ .

Відповідно до (2.115) обчислення інтегралів при визначенні величин  $\tilde{E}_1^{[1]*}$  і  $\tilde{E}_1^{[1]**}$  в (А.12) (додаток А) залежить від координати  $x_{2,n}$  нейтральної лінії в даному перерізі, яка визначається рівністю

$$\varepsilon_{11} = 0. \tag{2.119}$$

Враховуючи (2.118), запишемо це рівняння в наступному вигляді:

$$\varepsilon_s^{[0]} - x_2 \psi^{[0]} = 0. \tag{2.120}$$

Беручи до уваги, що балка симетрично армована, отримуємо з (2.120)

$$x_{2,n} = E_{s,2} l (\alpha + \beta^2 \bar{\phi}^{[0]}) / \beta \bar{\phi}^{[0]}. \tag{2.121}$$

Якщо розглядати випадок, коли  $\beta^2 \ll |\alpha|$ , то (2.121) значно спроститься

$$x_{2n} = E_{s,2} l \alpha / \beta \bar{\phi}^{[0]}. \tag{2.122}$$

Положення нейтральної лінії при  $\alpha > 0$  і  $\beta > 0$  показано на рис. 2.5. У цьому випадку верхня зона є зоною стиску, а нижня - зоною розтягу.

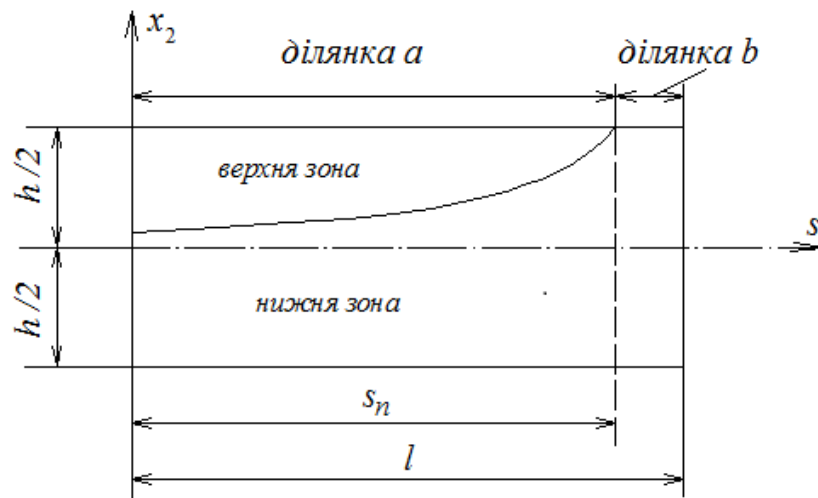


Рис. 2.5 Положення нейтральної лінії при  $\alpha > 0$  і  $\beta > 0$

Координата  $s_n$ , яка визначає точку перетину нейтральної лінії з верхньою або нижньою поверхнею балки, знаходиться з умови  $|x_{2,n}| = h/2$ . З (А.21) випливає, що  $\zeta_n = s_n/l$  є коренем рівняння

$$\bar{\psi}^{[0]}(\zeta) = R_0 |\alpha/\beta|, R_0 = 2E_{s,2}l/h. \quad (2.123)$$

Утримуючи в розкладі функції  $\bar{\psi}^{[0]}(\zeta)$  перші три члена, отримаємо

$$s_n = l(1 - \frac{\alpha}{3} - R_0 |\frac{\alpha}{\beta}|). \quad (2.124)$$

З (2.122) і (2.123) знаходимо

$$x_{2,n} = \frac{h}{2} \frac{\bar{\psi}^{[0]}(\zeta_n)}{\bar{\psi}^{[0]}(\zeta)} \operatorname{sgn}(\alpha\beta). \quad (2.125)$$

Назвемо відрізок балки  $s \leq s_n$  ділянкою  $a$ . Він містить як зону растягу, так і зону стиску. Відрізок балки  $s_n < s \leq l$  назвемо ділянкою  $b$ . Він містить тільки одну зону, знак якої залежить від знака  $\alpha$ . Якщо за формулою (2.124) виходить, що  $s_n \leq 0$  (легко перекопатися, що при цьому  $|\beta| \leq R_0 |\alpha| / (1-\alpha/3)$ ), то це означає, що балка складається тільки з однієї ділянки  $b$ . Якщо ж з формули (2.124) випливає, що  $s_n \geq l$  (це можливо тільки при  $\alpha < 0$  і  $|\beta| \geq 3R_0$ ), то балка складається тільки з ділянки  $a$ . При  $R_0 |\alpha| / (1-\alpha/3) < |\beta| < R_0$  балка містить обидві ділянки.

Враховуючи що  $a_3^* \sim \beta^2$ , і залишаючи величини першого порядку малості щодо  $\alpha$  і  $\beta$ , отримуємо

$$\varepsilon_0^{[0]} = \frac{1}{3} (1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}) (\varepsilon_s^{[0]} - x_2 \psi^{[0]}), \quad \gamma_0^{[0]} = \frac{2}{3} \sqrt{K_3^{[0]}} |\varepsilon_s^{[0]} - x_2 \psi^{[0]}|, \quad (2.126)$$

де  $K_3^{[0]} = 1 + 2K_2^{[0]} / K_1^{[0]} + 4(K_2^{[0]} / K_1^{[0]})^2$ .

З (2.113а), (2.115) и (2.126) випливає

$$\tilde{E}_1^{[1]*} = (1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}) [\tilde{K}^{[1]} \varepsilon_0^{[0]}]^* + \frac{2}{3} (2 + \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}) [\tilde{G}^{[1]} \gamma_0^{[0]}]^*. \quad (2.127)$$

Прийнято наступні позначення:

$$[f(x_2)]^* = \int_{-h/2}^{h/2} f(x_2) x_2 dx_2, \quad [f(x_2)]^{**} = \int_{-h/2}^{h/2} f(x_2) x_2^2 dx_2.$$

Використовуючи (2.127), знаходимо

$$\begin{aligned} [\tilde{K}^{[1]} \varepsilon_0^{[0]}]^* &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right) (\varepsilon_s^{[0]} [\tilde{K}^{[1]}]^* - \Psi^{[0]} [\tilde{K}^{[1]}]^{**}), \\ [\tilde{G}^{[1]} \gamma_0^{[0]}]^* &= \frac{2}{3} \sqrt{K_3^{[0]}} \left([\tilde{G}^{[1]} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]})]^* - \Psi^{[0]} [\tilde{G}^{[1]} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]})]^{**}\right). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Якщо ж поперечний переріз знаходиться на ділянці  $a$ , то

$$\begin{aligned} [\tilde{K}^{[1]}]^* &= \tilde{K}^{[1]d} \int_{-h/2}^{x_{2,n}} x_2 dx_2 + \tilde{K}^{[1]u} \int_{x_{2,n}}^{h/2} x_2 dx_2 = \frac{1}{2} (\tilde{K}^{[1]u} - \tilde{K}^{[1]d}) \left(\frac{h^2}{4} - x_{2,n}^2\right), \\ [\tilde{K}^{[1]}]^{**} &= \tilde{K}^{[1]d} \int_{-h/2}^{x_{2,n}} x_2^2 dx_2 + \tilde{K}^{[1]u} \int_{x_{2,n}}^{h/2} x_2^2 dx_2 = \frac{1}{3} \left[\frac{h^3}{8} (\tilde{K}^{[1]u} + \tilde{K}^{[1]d}) - \right. \\ &\quad \left. - x_{2,n}^3 (\tilde{K}^{[1]u} - \tilde{K}^{[1]d}) \right] \end{aligned} \quad (2.129)$$

( $\tilde{K}^{[1]d}$  и  $\tilde{K}^{[1]u}$  – значення коефіцієнта  $\tilde{K}^{[1]}$  в нижній і верхній зонах, які дорівнюють  $\tilde{K}^{[1]+}$  або  $\tilde{K}^{[1]-}$  в залежності від знака  $\varepsilon_{11}^{[0]}$ ; таке ж зауваження можна зробити щодо  $\tilde{G}^{[1]d}$  і  $\tilde{G}^{[1]u}$ ).

Аналогічно отримуємо

$$\begin{aligned} [\tilde{G}^{[1]} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]})]^* &= -\frac{\operatorname{sgn} d(\varepsilon_{11}^{[0]})}{2} (\tilde{G}^{[1]u} + \tilde{G}^{[1]d}) \left(\frac{h^2}{4} - x_{2,n}^2\right), \\ [\tilde{G}^{[1]}]^{**} &= -\frac{\operatorname{sgn} d(\varepsilon_{11}^{[0]})}{3} \left[\frac{h^3}{8} (\tilde{G}^{[1]u} - \tilde{G}^{[1]d}) - x_{2,n}^3 (\tilde{G}^{[1]u} + \tilde{G}^{[1]d})\right]. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Тут  $\operatorname{sgn} d(\varepsilon_{11}^{[0]})$  – знак  $\varepsilon_{11}^{[0]}$  в нижній зоні.

Підставляючи (2.129) і (2.130) в (2.127), отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1,a}^{[1]*} &= E_{1,1,a}^{[1]*} \varepsilon_s^{[0]} - E_{1,2,a}^{[1]*} \Psi^{[0]}, E_{1,1,a}^{[1]*} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)^2 \left(\frac{h^2}{4} - x_{2,n}^2\right) (\tilde{K}^{[1]u} - \tilde{K}^{[1]d}) - \\ &\quad - \frac{2}{9} \operatorname{sgn} d(\varepsilon_{11}^{[0]}) \left(2 + \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right) \sqrt{K_3^{[0]}} \left(\frac{h^2}{4} - x_{2,n}^2\right) (\tilde{G}^{[1]u} + \tilde{G}^{[1]d}), \\ E_{1,2,a}^{[1]*} &= \frac{1}{9} \left(1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)^2 \left[\frac{h^3}{8} (\tilde{K}^{[1]u} + \tilde{K}^{[1]d}) - x_{2,n}^3 (\tilde{K}^{[1]u} - \tilde{K}^{[1]d})\right] - \\ &\quad - \frac{4}{27} \operatorname{sgn} d(\varepsilon_{11}^{[0]}) \left(2 + \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right) \sqrt{K_3^{[0]}} \left[\frac{h^3}{8} (\tilde{G}^{[1]u} - \tilde{G}^{[1]d}) - x_{2,n}^3 (\tilde{G}^{[1]u} + \tilde{G}^{[1]d})\right] \end{aligned} \quad (2.131)$$

( $\tilde{E}_{1,a}^{[1]*}$  – значення  $\tilde{E}_1^{[1]*}$  на ділянці  $a$ ).

Якщо переріз знаходиться на ділянці  $b$ , то

$$\begin{aligned} [\tilde{K}^{[1]}]^* &= \tilde{K}^{[1]} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 dx_2 = 0, [\tilde{K}^{[1]}]^{**} = \tilde{K}^{[1]} \int_{-h/2}^{h/2} x_2^2 dx_2 = h^3 \tilde{K}^{[1]} / 12, \\ [\tilde{G}^{[1]} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]})]^* &= 0, [\tilde{G}^{[1]}]^{**} = \operatorname{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]}) h^3 \tilde{G}^{[1]} / 12 \end{aligned} \quad (2.132)$$

і тоді

$$E_{1,1,b}^{[1]*} = 0, E_{1,2,b}^{[1]*} = \frac{1}{36} \left(1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)^2 h^3 \tilde{K}^{[1]} + \frac{1}{27} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]}) \left(2 + \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right) \sqrt{K_3^{[0]}} h^3 \tilde{G}^{[1]}, \quad (2.133)$$

тобто

$$\tilde{E}_{1,b}^{[1]*} = -E_{1,2,b}^{[1]*} \Psi^{[0]}.$$

Аналогічно знаходимо для ділянки  $a$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1,a}^{[1]**} &= E_{1,1,a}^{[1]**} \varepsilon_s^{[0]} - E_{1,2,a}^{[1]**} \Psi^{[0]}, \\ E_{1,1,a}^{[1]**} &= \frac{1}{9} \left(1 - K_2^{[0]} / K_1^{[0]}\right)^2 [(\tilde{K}^{[1]u} + \tilde{K}^{[1]d}) h^3 / 8 - x_{2,n}^3 (\tilde{K}^{[1]u} - \tilde{K}^{[1]d})] - \\ &- \frac{4}{27} \operatorname{sgn} d(\varepsilon_{11}^{[0]}) \left(2 + K_2^{[0]} / K_1^{[0]}\right) \sqrt{K_3^{[0]}} \left[\frac{h^3}{8} (\tilde{G}^{[1]u} - \tilde{G}^{[1]d}) - x_{2,n}^3 (\tilde{G}^{[1]u} + \tilde{G}^{[1]d})\right], \quad (2.134) \\ E_{1,2,a}^{[1]**} &= \frac{1}{12} \left(1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)^2 \left(\frac{h^4}{16} - x_{2,n}^3\right) (\tilde{K}^{[1]u} - \tilde{K}^{[1]d}) - \\ &- \frac{1}{9} \operatorname{sgn} d(\varepsilon_{11}^{[0]}) \left(2 + \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right) \sqrt{K_3^{[0]}} \left(\frac{h^4}{16} - x_{2,n}^3\right) (\tilde{G}^{[1]u} + \tilde{G}^{[1]d}). \end{aligned}$$

Використовуючи представлення (2.125) для  $x_{2,n}$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1,1,a}^{[1]*} &= E_{1,1,a,1}^{[1]*} + E_{1,1,a,2}^{[1]*} \left[\frac{\bar{\Psi}^{[0]}(\zeta_n)}{\bar{\Psi}^{[0]}(\zeta)}\right]^2, \\ \tilde{E}_{1,2,a}^{[1]*} &= E_{1,2,a,1}^{[1]*} + E_{1,2,a,2}^{[1]*} \left[\frac{\bar{\Psi}^{[0]}(\zeta_n)}{\bar{\Psi}^{[0]}(\zeta)}\right]^3 \operatorname{sgn}(\alpha\beta), \\ \tilde{E}_{1,1,a}^{[1]**} &= E_{1,1,a,1}^{[1]**} + E_{1,1,a,2}^{[1]**} \left[\frac{\bar{\Psi}^{[0]}(\zeta_n)}{\bar{\Psi}^{[0]}(\zeta)}\right]^3 \operatorname{sgn}(\alpha\beta), \\ \tilde{E}_{1,2,a}^{[1]**} &= E_{1,2,a,1}^{[1]**} + E_{1,2,a,2}^{[1]**} \left[\frac{\bar{\Psi}^{[0]}(\zeta_n)}{\bar{\Psi}^{[0]}(\zeta)}\right]^4, \end{aligned} \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned}
E_{1,1,a,1}^{[1]*} &= \left[ \frac{1}{6} K_4^{[0]} (\tilde{K}^{[1]u} - \tilde{K}^{[1]d}) - \frac{2}{9} K_5^{[0]} (\tilde{G}^{[1]u} + \tilde{G}^{[1]d}) \right] \frac{h^2}{4}, \\
E_{1,1,a,2}^{[1]*} &= \left[ -\frac{1}{6} K_4^{[0]} (\tilde{K}^{[1]u} - \tilde{K}^{[1]d}) + \frac{2}{9} K_5^{[0]} (\tilde{G}^{[1]u} + \tilde{G}^{[1]d}) \right] \frac{h^2}{4}, \\
E_{1,2,a,1}^{[1]*} &= E_{1,1,a,1}^{[1]**} = \left[ \frac{1}{9} K_4^{[0]} (\tilde{K}^{[1]u} + \tilde{K}^{[1]d}) - \frac{4}{27} K_5^{[0]} (\tilde{G}^{[1]u} - \tilde{G}^{[1]d}) \right] \frac{h^3}{8}, \\
E_{1,2,a,2}^{[1]*} &= E_{1,1,a,2}^{[1]**} = \left[ -\frac{1}{9} K_4^{[0]} (\tilde{K}^{[1]u} - \tilde{K}^{[1]d}) + \frac{4}{27} K_5^{[0]} (\tilde{G}^{[1]u} + \tilde{G}^{[1]d}) \right] \frac{h^3}{8}, \tag{2.136}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{1,2,a,1}^{[1]**} &= \left[ \frac{1}{12} K_4^{[0]} (\tilde{K}^{[1]u} - \tilde{K}^{[1]d}) - \frac{1}{9} K_5^{[0]} (\tilde{G}^{[1]u} + \tilde{G}^{[1]d}) \right] \frac{h^4}{16}, \\
E_{1,2,a,2}^{[1]**} &= \left[ -\frac{1}{12} K_4^{[0]} (\tilde{K}^{[1]u} - \tilde{K}^{[1]d}) + \frac{1}{9} K_5^{[0]} (\tilde{G}^{[1]u} + \tilde{G}^{[1]d}) \right] \frac{h^4}{16}, \\
K_4^{[0]} &= (1 - K_2^{[0]} / K_1^{[0]})^2, \quad K_5^{[0]} = \text{sgn } d (\varepsilon_{11}^{[0]}) (2 + K_2^{[0]} / K_1^{[0]}) \sqrt{K_3^{[0]}}.
\end{aligned}$$

Для ділянки  $b$  будемо мати

$$\begin{aligned}
E_{1,1,b}^{[1]**} &= \frac{1}{36} K_4^{[0]} h^3 \tilde{K}^{[1]} + \frac{1}{27} K_5^{[0]} h^3 \tilde{G}^{[1]}, \quad E_{1,2,b}^{[1]**} = 0, \quad \text{т.е.} \\
\tilde{E}_{1,b}^{[1]**} &= E_{1,1,b}^{[1]**} \varepsilon_s^{[0]}. \tag{2.137}
\end{aligned}$$

З (2.113а) знаходимо

$$\begin{aligned}
\Delta^\pm &= \frac{1}{3} \left\{ 3K^{[1]} \left( \frac{h}{2} \right) \left[ \varepsilon_{22}^{[0]} \left( \frac{h}{2} \right) + \varepsilon_{11}^{[0]} \left( \frac{h}{2} \right) \right] + 2G^{[1]} \left( \frac{h}{2} \right) \left[ 2\varepsilon_{22}^{[0]} \left( \frac{h}{2} \right) - \varepsilon_{11}^{[0]} \left( \frac{h}{2} \right) \right] \pm \right. \\
&\pm 3K^{[1]} \left( -\frac{h}{2} \right) \left[ \varepsilon_{22}^{[0]} \left( -\frac{h}{2} \right) + \varepsilon_{11}^{[0]} \left( -\frac{h}{2} \right) \right] + 2G^{[1]} \left( -\frac{h}{2} \right) \left[ 2\varepsilon_{22}^{[0]} \left( -\frac{h}{2} \right) - \varepsilon_{11}^{[0]} \left( -\frac{h}{2} \right) \right] \left. \right\}. \tag{2.138}
\end{aligned}$$

Використовуючи (2.115), отримуємо для ділянки  $a$

$$\begin{aligned}
\Delta_a^\pm &= \frac{1}{3} \left\{ 9\tilde{K}^{[1]u} \left[ \varepsilon_0^{[0]} \left( \frac{h}{2} \right) \right]^2 \pm 9\tilde{K}^{[1]d} \left[ \varepsilon_0^{[0]} \left( -\frac{h}{2} \right) \right]^2 + 2\tilde{G}^{[1]u} \gamma_0^{[0]} \left( \frac{h}{2} \right) \left[ 2\varepsilon_{22}^{[0]} \left( \frac{h}{2} \right) \right. \right. \\
&\left. \left. - \varepsilon_{11}^{[0]} \left( \frac{h}{2} \right) \right] \pm 2\tilde{G}^{[1]d} \gamma_0^{[0]} \left( -\frac{h}{2} \right) \left[ 2\varepsilon_{22}^{[0]} \left( -\frac{h}{2} \right) - \varepsilon_{11}^{[0]} \left( -\frac{h}{2} \right) \right] \right\}. \tag{2.139}
\end{aligned}$$

З (2.126) випливає

$$\Delta^\pm = (\varepsilon_s^{[0]} - h\Psi^{[0]} / 2)^2 \Delta_1 \pm (\varepsilon_s^{[0]} + \Psi^{[0]} / 2)^2 \Delta_2, \tag{2.140}$$

де для ділянки  $a$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_{1,a} = (K_4^{[0]} \tilde{K}^{[1]u} + 4K_5^{[0]} \tilde{G}^{[1]u}) / 3., \\
\Delta_2 &= \Delta_{2,a} = (K_4^{[0]} \tilde{K}^{[1]d} - 4K_5^{[0]} \tilde{G}^{[1]d}) / 3 \tag{2.140a}
\end{aligned}$$



і для ділянки  $b$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_b = (K_4^{[0]} \tilde{K}^{[1]} - 4K_5^{[0]} \tilde{G}^{[1]}) / 3. \quad (2.140б)$$

Використовуючи (2.140), запишемо формулу (2.113) так:

$$M_{3,0}^{[1]} = [D_2(\Delta_1 - \Delta_2) - bE_{1,1}^{[1]*}] (\varepsilon_3^{[0]})^2 + [b(E_{1,1}^{[1]**} + E_{1,2}^{[1]*}) - D_2h(\Delta_1 + \Delta_2)\varepsilon_3^{[0]}\psi^{[0]} + [D_2(\Delta_1 - \Delta_2)h^2/4 - bE_{1,2}^{[1]**}]] (\psi^{[0]})^2. \quad (2.141)$$

Утримуючи в (2.141) величини до другого порядку малості, отримуємо

$$\begin{aligned} M_{3,0}^{[1]} &= A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2, \quad A = [D_2(\Delta_1 - \Delta_2) - bE_{1,1}^{[1]*}] E_{s,2}^2, \\ B &= [b(E_{1,1}^{[1]**} + E_{1,2}^{[1]*}) - D_2h(\Delta_1 + \Delta_2)E_{s,2}\bar{\Psi}^{[0]}] / l, \\ C &= [D_2(\Delta_1 - \Delta_2)h^2/4 - bE_{1,2}^{[1]**}] (\bar{\Psi}^{[0]})^2 / l^2. \end{aligned} \quad (2.142)$$

З (2.134) і (2.135) випливає, що коефіцієнти  $A$ ,  $B$  і  $C$  на ділянці  $a$  можуть бути представлені так

$$\begin{aligned} A_a &= A_{1,a} + A_{2,a} (\bar{\Psi}^{[0]})^{-2}, \quad B_a = B_{1,a} + B_{2,a} (\bar{\Psi}^{[0]})^{-2}, \quad C_a = C_{1,a} + C_{2,a} (\bar{\Psi}^{[0]})^{-2}, \\ A_{1,a} &= [D_2(\Delta_{1,a} - \Delta_{2,a}) - bE_{1,1,a,1}^{[1]*}] E_2^2, \quad A_{2,a} = -bE_{1,1,a,2}^{[1]*} (\bar{\Psi}^{[0]}(\zeta_n))^2 E_2^2, \\ B_{1,a} &= [-D_2h(\Delta_{1,a} + \Delta_{2,a}) + b(E_{1,1,a,1}^{[1]**} + E_{1,2,a,1}^{[1]*})] E_2 / l, \quad B_{2,a} = b(E_{1,1,a,2}^{[1]**} + \\ &+ E_{1,2,a,2}^{[1]*}) (\bar{\Psi}^{[0]}(\zeta_n))^3 \operatorname{sgn}(\alpha\beta) E_2 / l, \quad C_{1,a} = [D_2(\Delta_{1,a} - \Delta_{2,a})h^2/4 - bE_{1,2,a,1}^{[1]**}] / l^2, \\ C_{2,a} &= -bE_{1,2,a,2}^{[1]**} (\bar{\Psi}^{[0]}(\zeta_n))^4 / l^2. \end{aligned} \quad (2.143)$$

З (2.133) і (2.136) отримуємо наступні значення  $A$ ,  $B$  і  $C$  на ділянці  $b$ :

$$\begin{aligned} A_b &= 0, \quad B_{1,b} = B_1 \bar{\Psi}^{[0]}, \quad C_b = 0, \\ B_{1,b} &= [-2D_2\Delta_b + b(E_{1,1,b}^{[1]**} + E_{1,2,b}^{[1]**})] E_2 / l. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Аналізуючи вирази (2.143) і (2.144), а також формули для величин, що фігурують в них, можна прийти до наступних висновків:

при зміні знака  $\beta$  величини коефіцієнтів  $A$ ,  $B$  і  $C$  залишаються незмінними, але  $A$  і  $C$  змінюють знак. Тому ці коефіцієнти можуть бути представлені так:

$$A = A^+ \operatorname{sgn}(\beta), \quad C = C^+ \operatorname{sgn}(\beta), \quad (2.145)$$

де  $A^+$  і  $C^+$  обчислюються при позитивних значеннях  $\beta$ .

Аналогічно рішенням рівняння (2.103) будемо вирішувати рівняння (2.112) методом послідовних наближень за наступною схемою:

$$\frac{d^2\phi_{n+1}^{[1]}}{ds^2} = \frac{1}{l^2}(\alpha + \beta\phi^{[0]})\phi_n^{[1]} - \frac{l}{H} \frac{dM_{3,0}^{[1]}}{ds}. \quad (2.146)$$

Вважаючи  $\phi_0^{[1]} = 0$  і двічі інтегруючи по  $s$ , знаходимо

$$\phi_1^{[1]} = -\frac{1}{H}[M_{3,0}^{[1]}]^\# + c_0s + c_1. \quad (2.147)$$

Знак # тут означає наступне:

$$[f]^\# = \int_0^s f(\tau)d\tau \quad (2.148)$$

(аргумент  $s$  функції  $[f]^\#$  в подальшому вказувати не будемо, за винятком випадків, коли цей аргумент набуває конкретного значення).

Надалі обмежимося першим наближенням, тому нижній індекс 1 у  $\phi_1^{[1]}$  пропустимо.

З граничної умови  $\phi^{[1]}(0) = 0$  випливає, що  $c_1 = 0$ . Значення  $c_0$  визначається з другої граничної умови

$$\frac{d\phi^{[1]}}{ds}(l) = -\frac{1}{H}M_{3,0}^{[1]}(l) + c_0l = 0. \quad (2.149)$$

Враховуючи що  $\bar{\psi}^{[0]}(l) = 0$ , отримуємо з урахуванням (2.142)

$$c_0 = A\alpha^2 / Hl. \quad (2.150)$$

Будемо вважати, що  $|\beta| < R_0$  (обчислення показали, що в іншому випадку в балці виникають деформації, що виходять за межі висхідних гілок діаграм розтягу і стиску). Тоді в балці обов'язково буде присутня ділянка  $b$ . Відповідно до (2.144)  $C_0 = 0$  і тоді (2.170) з урахуванням (2.167) приймає наступний вигляд:

$$\phi^{[1]} = -\frac{1}{H}([A]^\# \alpha^2 + [B]^\# \alpha\beta + [C]^\# \beta^2). \quad (2.151)$$

Використовуючи (2.143), отримуємо при  $s < s_0$  (коли переріз на ділянці  $a$ )

$$\begin{aligned} [A_a]^\# &= A_{1,a}s + A_{2,a}[(\bar{\psi}^{[0]})^{-2}]^\#, \\ [B_a]^\# &= B_{1,a}[\bar{\psi}^{[0]}]^\# + B_{2,a} \operatorname{sgn}(\alpha\beta)[(\bar{\psi}^{[0]})^{-2}]^\#, \\ [C_a]^\# &= C_{1,a}[(\bar{\psi}^{[0]})^2]^\# + C_{2,a} \operatorname{sgn}(\alpha\beta)[(\bar{\psi}^{[0]})^{-2}]^\#. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Після інтегрування по  $s$  отримуємо

$$\begin{aligned} [A]^\# &= [A_a]^\#(s_n), [B]^\# = [B_a]^\#(s_n) + B_{1,b} \int_{s_n}^s \overline{\psi}(\tau) d\tau = \\ &= [B_a]^\#(s_n) + B_{1,b} I f_5(\zeta), [C]^\# = [C_a]^\#(s_n), \end{aligned} \quad (2.153)$$

При  $s \geq s_n$  (тобто коли переріз знаходиться на ділянці  $b$ ) з (2.105) отримуємо

$$\begin{aligned} [A]^\# &= [A_a]^\#(s_n), [B]^\# = [B_a]^\#(s_n) + B_{1,b} \int_{s_n}^s \overline{\psi}(\tau) d\tau = \\ &= [B_a]^\#(s_n) + B_{1,b} I f_5(\zeta), [C]^\# = [C_a]^\#(s_n), \\ f_5(\zeta) &= (1 - \frac{\alpha}{3})(\zeta - \zeta_n) - \frac{1}{2}(\zeta^2 - \zeta_n^2). \end{aligned} \quad (2.154)$$

Тут  $[f]^\#(s_n) = \int_0^{s_n} f(\tau) d\tau$ .

З (2.151) – (2.154) випливає, що  $\phi^{[1]}(s)$  має на відрізках  $[0, s_n]$  (ділянка  $a$ ) і  $[s_n, l]$  (ділянка  $b$ ) різні аналітичні вирази  $\phi_a^{[1]}(s)$  і  $\phi_b^{[1]}(s)$ , а отже, різні розклади в степеневі ряди:

$$\phi_a^{[1]} = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1,a,k}^{[1]} s^k, \quad \phi_b^{[1]} = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1,b,k}^{[1]} s^k, \quad (2.155)$$

причому, згідно (2.141) коефіцієнти цих розкладів можуть бути представлені в наступному вигляді:

$$\Phi_{1,k}^{[1]} = \Phi_{1,k,1}^{[1]} \alpha^2 + \Phi_{1,k,2}^{[1]} \alpha \beta + \Phi_{1,k,3}^{[1]} \beta^2, \quad (2.156)$$

де  $\Phi_{1,k}^{[1]} = \Phi_{1,a,k}^{[1]}$ ,  $\Phi_{1,k,j}^{[1]} = \Phi_{1,a,k,j}^{[1]}$  на ділянці  $a$  и  $\Phi_{1,k}^{[1]} = \Phi_{1,b,k}^{[1]}$ ,  $\Phi_{1,k,j}^{[1]} = \Phi_{1,b,k,j}^{[1]}$  на ділянці  $b$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

З (2.102), (2.110) і (2.111) випливає, що

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1} &= \beta(1 - \frac{\alpha}{3})/l + \Phi_{1,1}^{[1]}, \quad \Phi_{1,2} = -\beta^2/2l^2 + \Phi_{1,2}^{[1]}, \\ \Phi_{1,3} &= \alpha\beta/6l^3 + \Phi_{1,3}^{[1]}, \quad \Phi_{1,4} = -\alpha\beta/24l^4 + \Phi_{1,4}^{[1]}, \end{aligned} \quad (2.157)$$

Тут  $\Phi_{1,k}$  – коефіцієнти розкладу

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1,k} s^k. \quad (2.158)$$

Зводячи (2.158) в квадрат і утримуючи складові, що містять ступені  $\alpha$  і  $\beta$  до другої включно, знаходимо

$$\begin{aligned} \Phi_{2,1} = 0, \quad \Phi_{2,3} = \Phi_{1,1}^2 = \frac{\beta^2}{l^2}, \quad \Phi_{2,3} = 2\Phi_{1,1}\Phi_{1,2} = -\frac{\beta^2}{2l^2}, \\ \Phi_{2,4} = 2\Phi_{1,1}\Phi_{1,3} + \Phi_{1,2}^2 = \frac{\beta^2}{4l^4}. \end{aligned} \quad (2.159)$$

В (2.159) представлені перші чотири члени розкладу

$$\phi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{2,k} s^k. \quad (2.160)$$

При малих поздовжніх деформаціях осі балки мають місце такі співвідношення [262]:

$$v'(s) = \sin \phi, \quad u'(s) = \cos \phi - 1 \quad (2.161)$$

( $v(s)$  – вертикальне переміщення точки осі балки,  $u(s)$  – горизонтальне).

Враховуючи малість  $\phi$ , знаходимо з (2.161)

$$v(s) = [\phi]^\#, \quad u(s) = -\frac{1}{2}[\phi^2]^\# \quad (2.162)$$

(з приводу позначень див. (2.148)).

Тоді

$$\begin{aligned} v(s) &= \frac{\beta}{2l} \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) s^2 - \frac{\beta}{6l^2} s^2 + \frac{\alpha\beta}{24l^3} s^4 - \frac{\alpha\beta}{120l^4} s^5 + [\phi^{[1]}]^\#, \\ u(s) &= -\frac{\beta^2}{2} \left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{8} + \frac{s^5}{25}\right). \end{aligned} \quad (2.163)$$

З (2.151) отримуємо

$$[\phi^{[1]}]^\# = -\frac{1}{H} ([A]^{##} \alpha^2 + [B]^{##} \alpha\beta + [C]^{##} \beta^2). \quad (2.164)$$

Використовуючи (2.153) знаходимо для  $s \leq s_n$

$$\begin{aligned}
[A_a]^{##} &= A_{1,a} l^2 g_1(\zeta) + A_{2,a} (1 - \alpha/3 - \zeta_n)^2 R_0^{-2} l^2 g_2(\zeta), \\
[B_a]^{##} &= B_{1,a} l^2 g_3(\zeta) + B_{2,a} (1 - \alpha/3 - \zeta_n)^3 R_0^{-3} l^2 g_2(\zeta), \\
[C_a]^{##} &= C_{1,a} l^2 g_4(\zeta) + C_{2,a} (1 - \alpha/3 - \zeta_n)^4 R_0^{-4} l^2 g_2(\zeta), \\
g_1(\zeta) &= \zeta^2 / 2, \quad g_2(\zeta) = \ln[(1 - \alpha/3)/(1 - \alpha/3 - \zeta)] - \zeta/(1 - \alpha/3), \\
g_3(\zeta) &= (1 - \alpha/3)^2 \zeta^2 / 2 - \zeta^3 / 6, \\
g_4(\zeta) &= (1 - \alpha/3)^2 \zeta^2 / 2 - (1 - \alpha/3) \zeta^3 / 3 + \zeta^4 / 12.
\end{aligned} \tag{2.165}$$

Введемо позначення

$$\eta = v(l) / l, \quad \xi = u(l) / l. \tag{2.166}$$

Тоді

$$\eta = \beta / 3 - 2\alpha\beta / 15 + [\phi^{[1]}]^{##}(l) / l, \quad \xi = -37\beta^2 / 80. \tag{2.167}$$

**Приклад 2.1** (квазістатичний згин одновимірної моделі). Розглянемо згин залізобетонної консольної балки, що знаходиться під дією двох сил: постійної сили  $F_1$  і сили  $F_2$ , величина якої зростає від нуля до  $F_2^* = 7.5$  кН. довжина балки  $l = 8$  м, розміри поперечного перерізу:  $b = 0,8$  м,  $h = 0,28$  м, матеріал - бетон класу В35. Армування симетричне - 12 стержнів діаметром 10 мм, матеріал - сталь А-III. Сила  $F_1$  – стискаюча:  $F_1 = -196,2$  кН. Графіки залежності прогинів кінця консолі від сили  $F_2$  представлені на рис. 2.6.

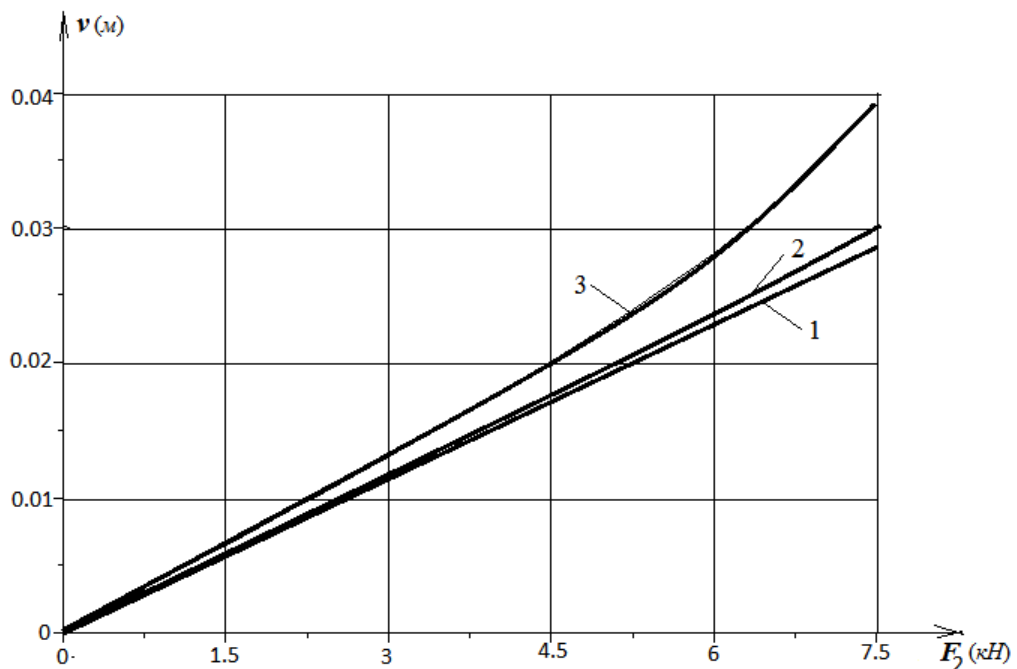


Рис. 2.6 Графіки залежності прогину консолі від величини сили  $F_2$

(Крива 1 - без урахування нелінійності, крива 2 - при урахуванні геометричної нелінійності і крива 3 - при урахуванні фізичної та геометричної нелінійностей).

У цьому параграфі детально описаний алгоритм застосування методу малого параметра при дослідженні нелінійного згину залізобетонної консольної балки. Результат застосування алгоритму продемонстровано на конкретному прикладі.

## 2.5 Дослідження нелінійних коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі при сейсмічному впливі за допомогою методу малого параметру

Досліджуються нестационарні коливання зосередженої маси, розташованої на кінці вертикальної залізобетонної колони (рис. 2.7) в тому випадку, коли точка закріплення колони здійснює горизонтальні коливання при заданому законі зміни прискорення  $W = W(t)$ .

Залежності між переміщеннями кінця консолі і діючими на неї силами визначені в параграфі 2.2 цього розділу.

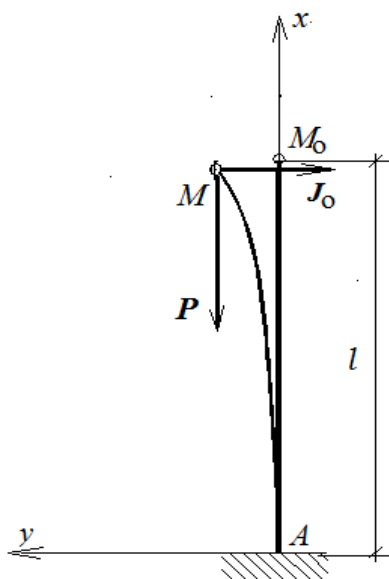


Рис.2.7 Схема моделі

Показано, що складові  $\xi$  і  $\eta$  переміщення кінця консолі можуть бути визначені за формулами

$$\xi = -\frac{37}{80}\beta^2, \eta = \frac{\beta}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\alpha\right) + \frac{1}{l}[\phi^{[1]}]^\#(l). \quad (2.168)$$

Тут  $\xi = u(l)/l$ ,  $\eta = v(l)/l$ ,  $\alpha = F_{1x}l^2/H$ ,  $\beta = F_{2y}l^2/H$  ( $l$  - довжина консолі,  $u(l)$  і  $v(l)$  - переміщення кінця балки в напрямку осей  $x$  і  $y$  відповідно,  $F_{1x}$  і  $F_{2y}$  - проекції сил  $F_1$  і  $F_2$ , прикладених до балки, на ці осі (рис. 2.6, повернений на  $90^\circ$  проти годинникової стрілки)).

У разі симетричного армування величина  $H$

визначається з формули

$$H = E_1^{[0]} J + 2E_a S_1 h_1^2 \quad (2.169)$$

( $E_1^{[0]} = E^{[0]} / (1 - \nu^2)$ ),  $E^{[0]}$  – модуль лінійної пружності основного матеріалу,  $\nu$  – його коефіцієнт Пуассона;  $J = dh^3 / 12$  – момент інерції поперечного перерізу,  $E_a$  – модуль пружності арматури;  $S_1$  – площа перерізу верхньої і нижньої арматури,  $S = dh$ ; розміри  $d$ ,  $h$  і  $h_1$  показані на рис. 2.7).

Величина  $[\phi^{[1]}]^\#(l)$  визначається з формули

$$[\phi^{[1]}]^\#(l) = -\frac{1}{H} ([A]^\#\#(l)\alpha^2 + [B]^\#\#(l)\alpha\beta + [C]^\#\#(l)\beta^2), \quad (2.170)$$

Вирази для величин  $[A]^\#\#(l)$ ,  $[B]^\#\#(l)$  і  $[C]^\#\#(l)$ , що входять в праву частину (2.170), наводяться в п. 2.4. Відзначимо тільки, що вони є безперервними функціями параметрів  $\alpha$  і  $\beta$  при  $|\beta| \geq \beta_0$ , при цьому  $[A]^\#\#(l)$  і  $[C]^\#\#(l)$  є кососиметричними функціями  $\beta$ , а  $[B]^\#\#(l)$  – симетричною:

$$\begin{aligned} [A]^\#\#(l) &= [A]^\#\#+(l) \operatorname{sgn}(\beta), \quad [C]^\#\#(l) = [C]^\#\#+(l) \operatorname{sgn}(\beta), \\ [B]^\#\#(l) &= [B]^\#\#+(l), \end{aligned} \quad (2.171)$$

де  $[A]^\#\#+(l)$ ,  $[B]^\#\#+(l)$  и  $[C]^\#\#+(l)$  обчислені при  $\beta > 0$ .

З (2.170) і (2.171) випливає, що рівність (2.168) може бути записана так

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\beta}{3} \left(1 - \frac{2}{5} \alpha\right) - \frac{1}{lH} ([A]^\#\#+(l)\alpha^2 \operatorname{sgn}(\beta) + \\ &+ [B]^\#\#+(l)\alpha\beta + [C]^\#\#+(l)\beta^2 \operatorname{sgn}(\beta)) \end{aligned} \quad (2.172)$$

де  $[A]^\#\#(l)$ ,  $[B]^\#\#(l)$  и  $[C]^\#\#(l)$  залежать від того, чи містить балка ділянку, що складається з розтягнутої і стиснутої зон. При  $|\beta| \leq \beta_0$  ( $\beta_0 = R_0 |\alpha| / (1 - \alpha/3)$ ) балка такої ділянки не містить, тобто вона цілком складається з однієї зони - розтягнутої або стиснутої - в залежності від знака  $\alpha$ . В цьому випадку

$$[A]^\#\#(l) = [C]^\#\#(l) = 0, \quad [B]^\#\#(l) = B_{1,b} l^2 g_5(1,0), \quad (2.173)$$

$$(g_5(\zeta, \zeta_n) = \frac{1}{2} [(1 - \alpha/3 - \zeta_n)^2 (\zeta - \zeta_n) + \frac{(1 - \alpha/3 - \zeta)^3 - (1 - \alpha/3 - \zeta_n)^3}{3}]).$$

У п. 2.4 показано, що  $B_{1,b}$  являє собою постійну величину, що залежить

від пружних властивостей основного матеріалу і арматури, а також від геометричних характеристик поперечного перерізу.

Нехай тепер  $|\beta| > \beta_0$ . У цьому випадку (п. 2.4) колона складається з двох ділянок:  $a$  і  $b$  (рис. 2.7). На першому з них в балці є дві зони - стиснута і розтягнута, друга ділянка містить тільки одну зону. Довжина  $s_n$  ділянки  $a$  визначається за формулою

$$s_n = \zeta_n l, \quad \zeta_n = 1 - \frac{\alpha}{3} - R_0 \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|, \quad R_0 = 2 \frac{E_{s,2} l}{h}. \quad (2.174)$$

Коефіцієнти  $[A]^{\#\#}(l)$ ,  $[B]^{\#\#}(l)$ ,  $[C]^{\#\#}(l)$  визначаються так

$$\begin{aligned} [A]^{\#\#}(l) &= [A_a]^{\#\#}(s_n) + [A_a]^{\#}(s_n) \cdot (l - s_n), \\ [B]^{\#\#}(l) &= [B_a]^{\#\#}(s_n) + [B_a]^{\#}(s_n) \cdot (l - s_n) + B_{1,b} l^2 g_5(1, \zeta_n), \\ [C]^{\#\#}(l) &= [C_a]^{\#\#}(s_n) + [C_a]^{\#}(s_n) \cdot (l - s_n). \end{aligned} \quad (2.175)$$

У п. 2.4 показано, що при  $\beta = \beta_0$   $[A]^{\#\#}(l)$  і  $[C]^{\#\#}(l)$  перетворюються на нуль,  $[B]^{\#\#}(l)$  стає рівним  $B_{1,b} l^2 g_5(1,0)$ , тобто функція  $\eta = \eta(\beta)$  неперервна в цьому випадку. Можна показати, що  $\eta = \eta(\beta)$  монотонна, а отже, оборотна. Зауважимо, що перший доданок в правій частині (2.167) є лінійною функцією  $\beta$ , а другий - нелінійною. Функція, зворотна лінійної складової  $\eta = \eta(\beta)$  виглядає так:  $\beta = 3\eta / (1 - 2\alpha / 5)$ , тому функцію, зворотну  $\eta = \eta(\beta)$ , будемо шукати в наступному вигляді:

$$\beta = 3\eta / (1 - \frac{2}{5}\alpha) + U\eta + V\eta^3. \quad (2.176)$$

**Зауваження 2.1.** Нехай  $\alpha$  фіксоване. Задамося двома значеннями  $\beta$ :  $\beta_1$  і  $\beta_2$  і знайдемо два відповідних значення  $\eta$ :  $\eta_1$  і  $\eta_2$  з (2.197). Підставляючи послідовно  $\beta_1$ ,  $\eta_1$  і  $\beta_2$ ,  $\eta_2$  в (A.20), отримуємо два рівняння щодо  $U$  і  $V$ , звідки їх і визначаємо.

Запишемо основне рівняння динаміки для маси  $M$

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{J}_0 + \mathbf{P}. \quad (2.177)$$

Тут  $m$  і  $\mathbf{a}$  – маса і прискорення точки  $M$ ,  $\mathbf{R}_1$  і  $\mathbf{R}_2$  – вертикальна і горизонтальна реакції деформованої балки ( $\mathbf{R}_1 = -\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{F}_2$ ),  $\mathbf{J}_0$  – сила інерції, викликана



рухом опори,  $J_0 = -mW$ .

Проектуючи (2.177) на осі координат і ділячи обидві частини рівності на  $m$ , отримуємо

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{g}{l} - \frac{H}{ml^3}\alpha, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{H}{ml^3}\beta - \frac{1}{ml}W(t). \quad (2.178)$$

З першого рівняння (2.178) знаходимо

$$\alpha = -\frac{mgl^2}{H} - \frac{ml^3}{H} \frac{d^2\xi}{dt^2}. \quad (2.179)$$

У першому наближенні прийемо, що

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad (2.180)$$

звідки випливає

$$\alpha = -\rho, \quad \rho = \frac{mgl^2}{H}, \quad (2.181)$$

тобто  $\alpha = \text{const}$ .

Обмежимося випадком, коли  $W(t)$  представимо в наступному вигляді:

$$W(t) = w_0 \sin pt, \quad (2.182)$$

при  $t \geq 0$  і  $W(t) = 0$  при  $t < 0$ . Підставляючи (2.176) і (2.182) в друге рівняння (2.178), отримуємо

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \omega^2\eta = -\frac{\omega^2}{3} \left[ \left( \frac{1,2\alpha}{1-0,4\alpha} + U \right) \eta + V\eta^3 \right] - \frac{w_0}{ml} \sin pt, \quad (2.183)$$

$$\text{де } \omega = \sqrt{\frac{3H}{ml^3}}.$$

Введемо в (2.183) безрозмірний час  $\tau$  за допомогою заміни  $t = \tau / \omega$ .

Тоді це рівняння прийме наступний вигляд:

$$\ddot{\eta} + \eta = -\frac{1}{3} \left( \left( \frac{1,2\alpha}{1-0,4\alpha} + U \right) \eta + V\eta^3 \right) - \frac{w_0}{ml\omega^2} \sin \lambda t \quad (2.184)$$

( $\lambda = p / \omega$ , крапка означає диференціювання по  $\tau$ ).

Обчислення показують, що співвідношення, наведені в п.2.4, справедливі при  $|\eta| \leq \eta_0 = 0,03 \div 0,05$ . Зробимо в (2.182) заміну  $\zeta = \eta / \eta_0$ :

$$\ddot{\zeta} + \zeta = -\varepsilon F(\zeta, \tau), \quad F(\zeta, \tau) = U_1 \zeta + V_1 \zeta^3 + W_0 \sin \lambda \tau. \quad (2.185)$$

$$\text{Тут } U_1 = \frac{1}{3} \left( \frac{1,2\alpha}{1-0,4\alpha} + U \right), \quad V_1 = \frac{1}{3} \eta_0^2 V, \quad W_0 = \frac{w_0}{l\omega^2 \eta_0}.$$

Оскільки величини  $U_1$ ,  $V_1$  і  $E_0$  в розглянутому класі задач передбачаються малими, то в рівнянні (2.185) введений формальний малий параметр  $\varepsilon$ , який дозволить знайти рішення рівняння, користуючись асимптотичними методами розкладання за цим параметром. Потім в отриманому рішенні слід  $\varepsilon$  замінити одиницею.

Введемо змінні  $a$  і  $b$  наступним чином:

$$\zeta = a \cos \tau + b \sin \tau, \quad \dot{\zeta} = -a \sin \tau + b \cos \tau. \quad (2.186)$$

Продиференціюємо другу рівність (2.186) по  $\tau$  і підставимо в (2.210). Крім того, продиференціюємо першу рівність (2.186) по  $\tau$  і прирівняємо правій частині другого. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{a} \cos \tau + \dot{b} \sin \tau &= 0, \\ -\dot{a} \sin \tau + \dot{b} \cos \tau &= -\varepsilon F(a \cos \tau + b \sin \tau, \tau). \end{aligned} \quad (2.187)$$

Розглядаючи (А.11) як систему рівнянь щодо  $\dot{a}$  і  $\dot{b}$ , знаходимо

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A(a, b, \tau), \quad \dot{b} = \varepsilon B(a, b, \tau), \\ A(a, b, \tau) &= F(a \cos \tau + b \sin \tau, \tau) \sin \tau, \\ B(a, b, \tau) &= -F(a \cos \tau + b \sin \tau, \tau) \cos \tau. \end{aligned} \quad (2.188)$$

Провівши нескладні викладки, знаходимо, що

$$\begin{aligned} A(a, b, \tau) &= \frac{U_1}{2} [a \sin 2\tau + b(1 - \cos 2\tau)] + \frac{V_1}{8} [a^3 (2 \sin 2\tau + \sin 4\tau) + \\ &+ 3a^2 b (1 - \cos 4\tau) + 3ab^2 (2 \sin 2\tau - \sin 4\tau) + b^3 (3 - 4 \cos 2\tau + \cos 4\tau)] + \\ &+ \frac{W_0}{2} [\cos(\lambda - 1)\tau - \cos(\lambda + 1)\tau], \end{aligned} \quad (2.189)$$

$$\begin{aligned} B(a, b, \tau) &= -\frac{U_1}{2} [a(1 + \cos 2\tau) + b \sin 2\tau] - \frac{V_1}{8} [a^3 (3 + 4 \cos 2\tau + \cos 4\tau) + \\ &+ 3a^2 b (2 \sin 2\tau + \sin 4\tau) + 3ab^2 (1 - \cos 4\tau) + b^3 (2 \sin 2\tau - \sin 4\tau)] - \\ &- \frac{W_0}{2} [\sin(\lambda - 1)\tau + \sin(\lambda + 1)\tau]. \end{aligned}$$

Зауважимо, що (2.188) є так званою "стандартною" системою [121].

Побудова наближеного рішення її будемо проводити методом усереднення по явно існуючому часу, тобто в першому наближенні замість (2.188) розглянемо рівняння

$$\begin{aligned}\dot{\bar{a}} &= \varepsilon A_0(\bar{a}, \bar{b}), \\ \dot{\bar{b}} &= \varepsilon B_0(\bar{a}, \bar{b}),\end{aligned}\tag{2.190}$$

де

$$A_0(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\bar{a}, \bar{b}, \tau) d\tau, \quad B_0(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(\bar{a}, \bar{b}, \tau) d\tau.\tag{2.191}$$

Неважко переконатися, що

$$\begin{aligned}A_0(\bar{a}, \bar{b}) &= \frac{U_1}{2} \bar{b} + \frac{3V_1}{8} \bar{b}(\bar{a}^2 + \bar{b}^2), \\ B_0(\bar{a}, \bar{b}) &= -\frac{U_1}{2} \bar{a} - \frac{3V_1}{8} \bar{a}(\bar{a}^2 + \bar{b}^2).\end{aligned}\tag{2.192}$$

З (2.190) і (2.291) випливає, що

$$\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}} = -\frac{f_2(\bar{a}, \bar{b})}{f_1(\bar{a}, \bar{b})},\tag{2.193}$$

де

$$\begin{aligned}f_1(\bar{a}, \bar{b}) &= 4U_1\bar{a} + 3V_1\bar{a}(\bar{a}^2 + \bar{b}^2), \\ f_2(\bar{a}, \bar{b}) &= 4U_1\bar{b} + 3V_1\bar{b}(\bar{a}^2 + \bar{b}^2),\end{aligned}\tag{2.194}$$

причому

$$\frac{\partial f_1(\bar{a}, \bar{b})}{\partial \bar{b}} = \frac{\partial f_2(\bar{a}, \bar{b})}{\partial \bar{a}}.\tag{2.195}$$

З (2.195) випливає, що (2.193) може бути представлено у вигляді рівняння в повних диференціалах

$$dF(\bar{a}, \bar{b}) = f_1(\bar{a}, \bar{b})d\bar{a} + f_2(\bar{a}, \bar{b})d\bar{b} = 0,\tag{2.196}$$

де

$$F(\bar{a}, \bar{b}) = 2U_1(\bar{a}^2 + \bar{b}^2) + \frac{3V_1}{4}(\bar{a}^2 + \bar{b}^2)^2.\tag{2.197}$$

Рівняння (2.196) має перший інтеграл

$$F(\bar{a}, \bar{b}) = C\tag{2.198}$$

( $C$  — довільна постійна). З (2.196) випливає, що

$$r_0 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \text{const}. \quad (2.199)$$

Тоді (2.190) приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{a}} &= \bar{b}R_0, \quad \dot{\bar{b}} = -\bar{a}R_0, \\ R_0 &= (U_1 + 3V_1r_0/4)/2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.200)$$

Диференціюючи (2.200) ще раз по  $\tau$ , отримуємо

$$\ddot{\bar{a}} + R_0^2\bar{a} = 0, \quad \ddot{\bar{b}} + R_0^2\bar{b} = 0. \quad (2.201)$$

Загальне рішення системи рівнянь (2.201):

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a_0 \cos R_0\tau + a_{0,1} \sin R_0\tau, \\ \bar{b} &= b_0 \cos R_0\tau + b_{0,1} \sin R_0\tau \end{aligned} \quad (2.202)$$

( $a_0, a_{0,1}, b_0$  и  $b_{0,1}$  — постійні).

Диференціюючи (2.202) по  $\tau$  і використовуючи (2.200), знаходимо

$$a_{0,1} = b_0/2, \quad b_{0,1} = -a_0/2. \quad (2.203)$$

Тоді (2.202) запишеться так:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a_0 \cos R_0\tau + b_0 \sin R_0\tau/2, \\ \bar{b} &= b_0 \cos R_0\tau - a_0 \sin R_0\tau/2, \\ R_0 &= [U_1 + 3V_1(a_0^2 + b_0^2)/4]/2. \end{aligned} \quad (2.204)$$

Функції  $\bar{a}(\tau)$  і  $\bar{b}(\tau)$  являють собою перше наближення рішення рівнянь (2.226). З їх допомогою можна побудувати покращене перше наближення [136]

$$a(\tau) = \bar{a}(\tau) + \varepsilon a_1(\tau), \quad b(\tau) = \bar{b}(\tau) + \varepsilon b_1(\tau), \quad (2.205)$$

де

$$\begin{aligned} a_1(\tau) &= \tilde{A}(\bar{a}, \bar{b}, \tau), \quad b_1(\tau) = \tilde{B}(\bar{a}, \bar{b}, \tau), \\ \tilde{A}(\bar{a}, \bar{b}, \tau) &= \int [A(\bar{a}, \bar{b}, \tau) - A_0(\bar{a}, \bar{b})] d\tau, \\ \tilde{B}(\bar{a}, \bar{b}, \tau) &= \int [B(\bar{a}, \bar{b}, \tau) - B_0(\bar{a}, \bar{b})] d\tau, \end{aligned} \quad (2.206)$$

причому інтегрування у функціях (2.206) проводиться по явно існуючому в них часу  $\tau$ , а  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  вважаються постійними. Крім того, в якості  $\tilde{A}(\bar{a}, \bar{b}, \tau)$  і  $\tilde{B}(\bar{a}, \bar{b}, \tau)$  можуть бути взяті будь-які первісні подинтегральних функцій.

Можна переконатися, що

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\bar{a}, \bar{b}, \tau) &= -U_1[\bar{a} \cos 2\tau + \bar{b} \sin 2\tau]/4 - V_1[\bar{a}^3(4 \cos 2\tau + \cos 4\tau)/32 + \\ &+ 3\bar{a}^2\bar{b} \sin 4\tau + 3\bar{a}\bar{b}^2(4 \cos 2\tau - \cos 4\tau) + \bar{b}^3(8 \sin 2\tau + \sin 4\tau)] + \\ &+ E_0[\sin(\lambda - 1)\tau/(\lambda - 1) - \sin(\lambda + 1)\tau/(\lambda + 1)]/2, \\ \tilde{B}(\bar{a}, \bar{b}, \tau) &= -U_1[\bar{a} \sin 2\tau - \bar{b} \cos 2\tau]/4 - V_1[\bar{a}^3(8 \sin 2\tau + \sin 4\tau)/32 - \\ &- 3\bar{a}^2\bar{b}(4 \cos 2\tau + \cos 4\tau) - 3\bar{a}\bar{b}^2 \sin 4\tau - \bar{b}^3(4 \cos 2\tau - \cos 4\tau)] + \\ &+ E_0[\cos(\lambda - 1)\tau/(\lambda - 1) + \cos(\lambda + 1)\tau/(\lambda + 1)]/2.\end{aligned}\quad (2.207)$$

Величини  $a_0$  і  $b_0$  є постійними інтегрування. Для їх визначення запишемо початкові умови. Будемо розшукувати рішення рівняння (2.184), відповідне нульовим початковим умовам:

$$\zeta(0) = 0, \dot{\zeta}(0) = 0. \quad (2.208)$$

З (2.186) випливає, що ці рівності еквівалентні наступним:

$$a(0) = 0, b(0) = 0. \quad (2.209)$$

Вважаючи в (2.180)  $\tau = 0$  і  $\varepsilon = 1$ , отримуємо з урахуванням (2.204) і (2.207)

$$\begin{aligned}a_0[1 - \frac{U_1}{4} - \frac{5V_1}{32}(a_0^2 + 3b_0^2)] &= 0, \\ \frac{3V_1}{32}b_0^3 + (1 + \frac{U_1}{4} + \frac{15V_1}{32}a_0^2)b_0 + W_0 \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} &= 0.\end{aligned}\quad (2.210)$$

Зауважимо, що в лінійному випадку (тобто при  $U_1 = V_1 = 0$ ) рівняння (2.184) з урахуванням співвідношення  $\varepsilon = 1$  виглядає так

$$\ddot{\zeta}_l + \zeta_l = -W_0 \sin \lambda \tau, \quad (2.211)$$

а (2.210) приймає наступний вигляд:

$$a_{l,0} = 0, b_{l,0} = -W_0 \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}. \quad (2.212)$$

В цьому випадку  $R_0 = 0$ , а отже,  $\bar{a} = 0$ ,  $\bar{b} = -E_0 \lambda / (\lambda^2 - 1)$ . Зауважимо, що в даній роботі розглядаються нерезонансні значення  $\lambda$ , тобто що знаходяться поза деякого інтервалу  $[1-\delta, 1+\delta]$ . Виберемо  $\delta$  так, щоб  $|b_{l,0}| = E_0 \lambda / |\lambda^2 - 1| \ll 1$ .

Підставляючи (2.212) в (2.182), а звідти в (2.180), отримаємо

$$a = W_0 \frac{\sin \lambda \tau \cos \tau - \lambda \cos \lambda \tau \sin \tau}{\lambda^2 - 1},$$

$$b = W_0 \frac{\sin \lambda \tau \sin \tau - \lambda(1 - \cos \lambda \tau \cos \tau)}{\lambda^2 - 1}.$$
(2.213)

За допомогою (2.213) знаходимо, що в лінійному випадку

$$\zeta = W_0 \frac{\sin \lambda \tau - \lambda \sin \tau}{\lambda^2 - 1},$$
(2.214)

що співпадає з точним рішенням рівняння (2.176), що задовольняє початковим умовам (2.208).

Так як  $U_1$  і  $V_1$  передбачаються малими, то природно розшукувати рішення системи рівнянь (2.210) в нелінійному випадку (тобто при  $U_1 \neq 0$  і  $V_1 \neq 0$ ), близькі до (2.212). З першого рівняння (2.210) відразу ж отримуємо

$$a_0 = 0,$$
(2.215)

так як прирівнювання нулю вмісту квадратної дужки призводить до більших значень  $a_0^2 + 3b_0^2$ . Підстановка (2.215) в друге рівняння (2.210) призводить до кубічного рівняння щодо  $b_0$ :

$$\frac{3V_1}{32}b_0^3 + \left(1 + \frac{U_1}{4}\right)b_0 + W_0 \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} = 0,$$
(2.216)

рішення якого зручно шукати методом послідовних наближень:

$$b_{0,n+1} = -\frac{1}{1 + \frac{U_1}{4}} \left( \frac{3}{32}V_1 b_{0,n}^3 + W_0 \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \right).$$
(2.217)

Покладемо  $b_{0,0} = 0$ . Тоді виявиться, що

$$b_{0,1} = -\frac{W_0 \lambda}{\left(1 + \frac{U_1}{4}\right)(\lambda^2 - 1)}.$$
(2.218)

Через малість  $U_1$  корінь  $b_{0,1}$  близький до  $b_{l,0}$ . Наступні наближення практично не відрізняються від  $b_{0,1}$ , так як перший доданок всередині дужок в (2.235) дуже малий. Таким чином, можна покласти  $b_0 = b_{0,1}$ .

**Приклад 2.2.** Розглянемо коливання залізобетонної колони висотою  $l = 8$  м, на кінці якої розташована зосереджена маса  $m = 10$  т, викликані

горизонтальними коливаннями опори з прискоренням, яке змінюється згідно із законом (2.182) при  $w_0 = 0,15 \text{ м/с}^2$ . Параметри колони, бетону та арматури такі ж, як і в прикладі 2.1. Будемо порівнювати максимальні амплітуди нестационарних коливань консолі для нелінійної і лінійної задач при  $\gamma = 0.05$ . Результати такого порівняння показані на рис. 2.8.

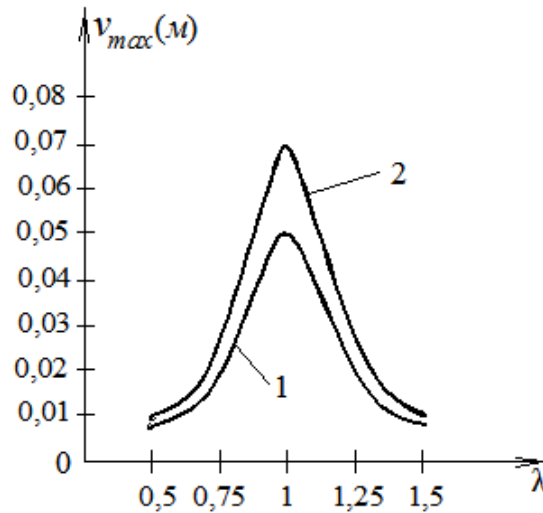


Рис. 2.8 Графіки залежності максимальної амплітуди коливань колони в залежності від частоти сейсмічного впливу для лінійної і нелінійної моделей

Графік 1 демонструє залежність максимальних значень переміщення вантажу від частоти збурення  $p$  ( $\lambda = p / \omega$ ,  $\omega$  – частота вільних коливань) в разі нелінійної задачі, а графік 2 - аналогічну залежність для лінійної задачі.

Як впливає з креслення, амплітуди коливань, викликаних гармонійними коливаннями опори при урахуванні фізичної нелінійності бетону, істотно менше визначених за лінійною теорією.

У цьому параграфі детально описаний алгоритм застосування методу малого параметра при дослідженні нелінійних коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі.

Результати досліджень, наведених у даному розділі, опубліковані в роботах [211-215].

## 2.6 Висновки за розділом 2

1. Побудовано розклад напружень і деформацій в точках залізобетонної балки до рядів за ступенями малого параметра, що характеризує ступінь відхилення нелінійної залежності між напруженнями і деформаціями від лінійної.

2. Запропоновано метод побудови диференціальних рівнянь плоского згину залізобетонної балки в разі простого навантаження для кожного з наближень нелінійної залежності між напруженнями і деформаціями.

3. Побудовано алгоритм визначення січних модулів пружності для бетону при циклічних навантаженнях, які необхідні для вирішення нелінійних задач динаміки для залізобетонних балок і рам (додатки А і В).

4. На основі запропонованого методу побудови диференціальних рівнянь згину і їх аналітичного рішення в спеціальних функціях побудовано алгоритм вирішення динамічної задачі для одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди і розглянуто ряд конкретних прикладів для гармонійного сейсмічного впливу.



**РОЗДІЛ 3**  
**НЕЛІНІЙНІ ПРУЖНОПЛАСТИЧНІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ**  
**ЕЛЕМЕНТІВ ТА ОДНОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ**  
**КАРКАСНИХ СПОРУД**  
**(метод малого параметру)**

**3.1 Диференціальні рівняння етапів плоского згину залізобетонної балки з урахуванням нелінійного деформування і пластичності матеріалів у першому наближенні**

У розділі 2 було запропоновано фізично і геометрично нелінійна теорія згину залізобетонних балок і рам. При цьому передбачався такий діапазон навантажень, в межах якого нелінійність бетону була порівняно малою. В цьому розділі це обмеження зняте. Для вирішення задачі згину пропонується покроковий метод, причому на кожному кроці приріст навантаження такий, що нелінійність може вважатися малою, звідки впливає можливість застосування методу малого параметра.

У розділі 2 було визначено, що елементи тензора скінчених деформацій при фізично і геометрично нелінійному згині стержня мають такий вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2}(\lambda_s^2 - 1 - 2\lambda_s^2 B\phi'), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\lambda_s A_2, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2}(A_2^2 + B_2^2 - 1), \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тут  $\lambda_s = 1 + \varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_s$  – поздовжня відносна деформація осі балки;  $A(x_2)$  і  $B(x_2)$  – шукані функції координати  $x_2$  точки поперечного перерізу балки (рис. 3.1),  $A_2(x_2) = dA/dx_2$ ,  $B_2(x_2) = dB/dx_2$ ;  $\phi$  – кут нахилу дотичної до деформованої осі балки до її недеформованої осі;  $\phi' = d\phi/ds$ ,  $s$  – довжина деформованого відрізка осі балки між розглянутим поперечним перерізом і лівим кінцем балки. Користуючись малістю  $\varepsilon_s$ , можна записати (3.1) так:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_s - B\phi', \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}A_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(A_2^2 + B_2^2 - 1), \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0. \quad (3.2)$$

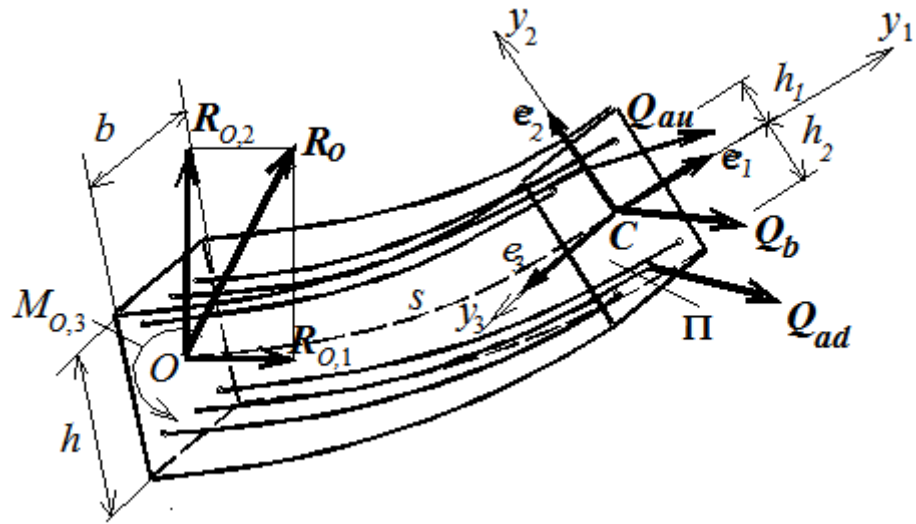


Рис. 3.1 Деформація ділянки залізобетонної балки при плоскому згині

Тому будемо розшукувати прирости елементів тензора  $T_\varepsilon$  деформацій  $\Delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*$  на деякому етапі деформування балки (під приростом будь-якої величини  $X$  розуміється різниця  $X - X^*$ , де  $X^*$  – значення цієї величини на початку даного етапу) в наступному вигляді:

$$\Delta\varepsilon_{11} = \Delta\varepsilon_s - B\Delta\phi', \quad \Delta\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}A_2, \quad \Delta\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(A_2^2 + B_2^2 - 1) \quad (3.3)$$

( $\Delta\phi = \phi - \phi^*$ ; прирости інших елементів тензора  $T_\varepsilon$  дорівнюють нулю). Дотримуючись методу, запропонованого в розділі 2, запишемо залежність між приростами напружень і деформацій так:

$$\Delta\sigma_0 = 3K^{[0]}[1 + \mu\kappa(\Delta\varepsilon_0)]\Delta\varepsilon_0, \quad \Delta D_\sigma = 2G^{[0]}[1 + \mu\rho(\Delta\gamma_0)]\Delta D_\varepsilon. \quad (3.4)$$

Тут  $K^{[0]} = K_0$  (початковий модуль об'ємного стиску матеріалу балки, тобто значення цього модуля при лінійно пружній деформації матеріалу),  $G^{[0]} = G_0$  (початковий модуль зсуву),  $\Delta\sigma_0$  – приріст середнього напруження  $\sigma_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$  ( $\sigma_{ii}$  – елементи тензора напружень,  $i=1,2,3$ ),  $\Delta\varepsilon_0$  – приріст середнього подовження  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) / 3$ ,  $\Delta\gamma_0$  – приріст октаедричної деформації зсуву

$$\gamma_0 = \frac{2}{3}[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} + 3(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)]^{1/2},$$

$D_\sigma = T_\sigma - \sigma_0 I$  і  $D_\varepsilon = T_\varepsilon - \varepsilon_0 I$  – дівіатори тензорів напружень  $T_\sigma$  і деформацій  $T_\varepsilon$  відповідно,  $\Delta T_\sigma$  і  $\Delta T_\varepsilon$  – їх прирости,  $\mu$  – малий параметр. Функції  $\kappa(\Delta\varepsilon_0)$  і  $\rho(\Delta\gamma_0)$  характеризують нелінійно-пружну поведінку матеріалу і при  $\mu = 0$  переходять в звичайний закон Гука для ізотропних матеріалів. Наявність малого параметра  $\mu$  означає, що виникають деформації матеріалу такі, що відхилення співвідношення (3.4) від закону Гука не надто велике. Зауважимо, що якщо  $|\kappa(\Delta\varepsilon_0)| \ll 1$  і  $|\rho(\Delta\gamma_0)| \ll 1$  параметр  $\mu$  може бути введений формально з метою отримання асимптотичних розкладів, потім в остаточних виразах слід  $\mu$  покласти рівним одиниці.

Будемо визначати елементи приростів тензорів напружень і деформацій у вигляді наступних асимптотичних розкладів:

$$\Delta\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^n \mu^k \Delta\sigma_{ij}^{[k]}, \quad \Delta\varepsilon_{ij} = \sum_{k=0}^n \mu^k \Delta\varepsilon_{ij}^{[k]} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.5)$$

Тоді  $\Delta\sigma_0, \Delta\varepsilon_0, \Delta\gamma_0, \Delta D_\sigma$  і  $\Delta D_\varepsilon$  представляються так

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_0 &= \sum_{k=0}^n \mu^k \Delta\sigma_0^{[k]}, \quad \Delta\varepsilon_0 = \sum_{k=0}^n \mu^k \Delta\varepsilon_0^{[k]}, \quad \Delta\gamma_0 = \sum_{k=0}^n \mu^k \Delta\gamma_0^{[k]}, \\ \Delta D_\sigma &= \sum_{k=0}^n \mu^k \Delta D_\sigma^{[k]}, \quad \Delta D_\varepsilon = \sum_{k=0}^n \mu^k \Delta D_\varepsilon^{[k]}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вважаючи, що функції  $\kappa(x)$  і  $\rho(x)$  нескінченно диференційовні (якщо це не так, то їх можна апроксимувати з будь-яким ступенем точності нескінченно диференційовними функціями), можна записати

$$\kappa(\Delta\varepsilon_0^{[0]} + x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa^{(m)}(\Delta\varepsilon_0^{[0]})}{m!} x^m, \quad \rho(\Delta\gamma_0^{[0]} + x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^{(m)}(\Delta\gamma_0^{[0]})}{m!} x^m \quad (3.7)$$

Підставляючи в (3.7) замість  $x$  вираз  $x = \sum_{k=1}^n \Delta\varepsilon_0^{[k]} \mu^k$ , отримаємо розклад

$\kappa(\Delta\varepsilon_0)$  за ступенями  $\mu$ :

$$\kappa(\Delta\varepsilon_0) = \sum_{k=0}^n \mu^k \kappa^{[k]}(\Delta\varepsilon_0) \quad (3.8)$$

Наприклад,  $\kappa^{[0]}(\Delta\varepsilon_0) = \kappa(\Delta\varepsilon_0^{[0]})$ ,  $\kappa^{[1]}(\Delta\varepsilon_0) = \kappa'(\Delta\varepsilon_0^{[0]}) \Delta\varepsilon_0^{[1]}$ .

Аналогічно отримуємо вирази і для  $\rho(\Delta\gamma_0)$ :

$$\rho(\Delta\gamma_0) = \sum_{k=0}^n \mu^k \rho^{[k]}(\Delta\gamma_0) \quad (3.9)$$

причому  $\rho^{[0]}(\Delta\gamma_0) = \rho(\Delta\gamma_0^{[0]})$ ,  $\rho^{[1]}(\Delta\gamma_0) = \rho'(\Delta\gamma_0^{[0]})\Delta\gamma_0^{[1]}$ .

Підставляючи (3.6), (3.8) і (3.9) в (3.4), матимемо для перших двох членів розкладу

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_0^{[0]} &= 3K^{[0]}\Delta\varepsilon_0^{[0]}, \quad \Delta\mathbf{D}_\sigma^{[0]} = 2G^{[0]}\Delta\mathbf{D}_\varepsilon^{[0]}, \\ \Delta\sigma_0^{[1]} &= 3[K^{[0]}\Delta\varepsilon_0^{[1]} + K^{[1]}(\Delta\varepsilon_0)\Delta\varepsilon_0^{[0]}], \quad \Delta\mathbf{D}_\sigma^{[1]} = 2[G^{[0]}\Delta\mathbf{D}_\varepsilon^{[1]} + G^{[1]}(\Delta\gamma_0)\Delta\mathbf{D}_\varepsilon^{[0]}], \end{aligned} \quad (3.10)$$

де  $K^{[1]}(\Delta\varepsilon_0) = K^{[0]}K^{[0]}(\Delta\varepsilon_0)$ ,  $G^{[1]}(\Delta\gamma_0) = G^{[0]}\rho^{[0]}(\Delta\gamma_0)$ .

З першого рядка (3.10) знаходимо

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{11}^{[0]} + \Delta\sigma_{22}^{[0]} + \Delta\sigma_{33}^{[0]} &= 3K^{[0]}(\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} + \Delta\varepsilon_{22}^{[0]}), \\ 2\Delta\sigma_{11}^{[0]} - \Delta\sigma_{22}^{[0]} - \Delta\sigma_{33}^{[0]} &= 2G^{[0]}(2\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} - \Delta\varepsilon_{22}^{[0]}), \\ -\Delta\sigma_{11}^{[0]} + 2\Delta\sigma_{22}^{[0]} - \Delta\sigma_{33}^{[0]} &= 2G^{[0]}(-\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} + 2\Delta\varepsilon_{22}^{[0]}), \\ -\Delta\sigma_{11}^{[0]} - \Delta\sigma_{22}^{[0]} + 2\Delta\sigma_{33}^{[0]} &= -2G^{[0]}(\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} + \Delta\varepsilon_{22}^{[0]}), \\ \Delta\sigma_{13}^{[0]} = \Delta\sigma_{31}^{[0]} = \Delta\sigma_{23}^{[0]} = \Delta\sigma_{32}^{[0]} &= 0, \quad \Delta\sigma_{12}^{[0]} = \Delta\sigma_{21}^{[0]} = 2G^{[0]}\Delta\varepsilon_{12}^{[0]}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

а з другого

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{11}^{[1]} + \Delta\sigma_{22}^{[1]} + \Delta\sigma_{33}^{[1]} &= 3[K^{[0]}(\Delta\varepsilon_{11}^{[1]} + \Delta\varepsilon_{22}^{[1]}) + K^{[1]}(\Delta\varepsilon_0)(\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} + \Delta\varepsilon_{22}^{[0]})], \\ 2\Delta\sigma_{11}^{[1]} - \Delta\sigma_{22}^{[1]} - \Delta\sigma_{33}^{[1]} &= 2[G^{[0]}(2\Delta\varepsilon_{11}^{[1]} - \Delta\varepsilon_{22}^{[1]}) + G^{[1]}(\Delta\gamma_0)(2\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} - \Delta\varepsilon_{22}^{[0]})], \\ -\Delta\sigma_{11}^{[1]} + 2\Delta\sigma_{22}^{[1]} - \Delta\sigma_{33}^{[1]} &= 2[G^{[0]}(-\Delta\varepsilon_{11}^{[1]} + 2\Delta\varepsilon_{22}^{[1]}) + G^{[1]}(\Delta\gamma_0)(-\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} + 2\varepsilon_{22}^{[0]})], \\ -\Delta\sigma_{11}^{[1]} - \Delta\sigma_{22}^{[1]} + 2\Delta\sigma_{33}^{[1]} &= -2[G^{[0]}(\Delta\varepsilon_{11}^{[1]} + \Delta\varepsilon_{22}^{[1]}) + G^{[1]}(\Delta\gamma_0)(\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} + \Delta\varepsilon_{22}^{[0]})], \\ \Delta\sigma_{13}^{[1]} = \Delta\sigma_{31}^{[1]} = \Delta\sigma_{23}^{[1]} = \Delta\sigma_{32}^{[1]} &= 0, \quad \Delta\sigma_{12}^{[1]} = \Delta\sigma_{21}^{[1]} = 2[G^{[0]}\Delta\varepsilon_{12}^{[1]} + G^{[1]}(\Delta\gamma_0)\Delta\varepsilon_{12}^{[0]}] \end{aligned} \quad (3.12)$$

З (3.11) і (3.12) знаходимо

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{11}^{[0]} &= K_1^{[0]}\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} + K_2^{[0]}\Delta\varepsilon_{22}^{[0]}, \quad \Delta\sigma_{22}^{[0]} = K_2^{[0]}\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} + K_1^{[0]}\Delta\varepsilon_{22}^{[0]}, \quad \Delta\sigma_{12}^{[0]} = 2G^{[0]}\Delta\varepsilon_{12}^{[0]}, \\ \Delta\sigma_{11}^{[1]} &= K_1^{[0]}\Delta\varepsilon_{11}^{[1]} + K_2^{[0]}\Delta\varepsilon_{22}^{[1]} + K_1^{[1]}(\Delta\varepsilon_0, \Delta\gamma_0)\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} + K_2^{[1]}(\Delta\varepsilon_0, \Delta\gamma_0)\Delta\varepsilon_{22}^{[0]}, \\ \Delta\sigma_{22}^{[1]} &= K_1^{[0]}\Delta\varepsilon_{22}^{[1]} + K_2^{[0]}\Delta\varepsilon_{11}^{[1]} + K_1^{[1]}(\Delta\varepsilon_0, \Delta\gamma_0)\Delta\varepsilon_{22}^{[0]} + K_2^{[1]}(\Delta\varepsilon_0, \Delta\gamma_0)\Delta\varepsilon_{11}^{[0]}, \\ \Delta\sigma_{12}^{[1]} &= 2G^{[0]}\Delta\varepsilon_{12}^{[1]} + 2G^{[1]}(\Delta\gamma_0)\Delta\varepsilon_{12}^{[0]}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

де  $K_1^{[0]} = (3K^{[0]} + 4G^{[0]})/3$ ,  $K_2^{[0]} = (3K^{[0]} - 2G^{[0]})/3$ ,  $K_1^{[1]}(\Delta\varepsilon_0, \Delta\gamma_0) =$

$$= [3K^{[1]}(\Delta\varepsilon_0) + 4G^{[1]}(\Delta\gamma_0)]/3, \quad K_2^{[1]}(\Delta\varepsilon_0, \Delta\gamma_0) = [3K^{[1]}(\Delta\varepsilon_0) - 2G^{[1]}(\Delta\gamma_0)]/3.$$

Представимо функції  $A(x_2)$  и  $B(x_2)$ , а також приріст кута повороту перерізу і відносного подовження осі стержня у вигляді асимптотичних розкладів за ступенями  $\mu$ :

$$A = \sum_{k=0}^n \mu^k A^{[k]}, \quad B = \sum_{k=0}^n \mu^k B^{[k]}, \quad \Delta\phi = \sum_{k=0}^n \mu^k \Delta\phi^{[k]}, \quad \Delta\varepsilon_s = \sum_{k=0}^n \mu^k \Delta\varepsilon_s^{[k]}. \quad (3.14)$$

Підставивши (3.14) в (3.3), матимемо для перших двох членів розкладу (3.5)

$$\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} = \Delta\varepsilon_s^{[0]} - B^{[0]} \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}, \quad (3.15a)$$

$$\Delta\varepsilon_{22}^{[0]} = \frac{1}{2}[(A_2^{[0]})^2 + (B_2^{[0]})^2 - 1], \quad \Delta\varepsilon_{12}^{[0]} = \frac{1}{2}A_2^{[0]},$$

$$\Delta\varepsilon_{11}^{[1]} = \varepsilon_s^{[1]} - [B^{[0]} \frac{d\Delta\phi^{[1]}}{ds} + B^{[1]} \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}], \quad (3.15b)$$

$$\Delta\varepsilon_{22}^{[1]} = \frac{1}{2}(A_2^{[0]}A_2^{[1]} + B_2^{[0]}B_2^{[1]}), \quad \Delta\varepsilon_{12}^{[1]} = \frac{1}{2}(A_2^{[1]} + \varepsilon_s^{[1]}A_2^{[0]}).$$

$$\text{Тут } A_2^{[k]}(x_2) = \frac{dA^{[k]}(x_2)}{dx_2}, \quad B_2^{[k]}(x_2) = \frac{dB^{[k]}(x_2)}{dx_2} \quad (k = 0, 1).$$

Як і в розділі 2 будемо розшукувати функції  $A^{[k]}$  и  $B^{[k]}$  ( $k = 0, 1$ ) в наступному вигляді:

$$A^{[k]} = a_1^{[k]}x_2 + a_2^{[k]}x_2^2 + a_3^{[k]}x_2^3, \quad B^{[k]} = b_1^{[k]}x_2 + b_2^{[k]}x_2^2. \quad (3.16)$$

Тоді

$$A_2^{[k]} = \frac{dA^{[k]}}{dx_2} = a_1^{[k]} + 2a_2^{[k]}x_2 + 3a_3^{[k]}x_2^2, \quad B_2^{[k]} = \frac{dB^{[k]}}{dx_2} = b_1^{[k]} + 2b_2^{[k]}x_2.$$

Дотичні напруження, а значить і їх прирости на верхній і нижній гранях дорівнюють нулю:

$$\Delta\sigma_{12} = 0 \quad (x_2 = \pm h/2). \quad (3.17)$$

Це означає, що  $\Delta\sigma_{12}^{[0]} = 0$ , а отже і  $\Delta\varepsilon_{12}^{[0]} = 0$  при  $x_2 = \pm \frac{h}{2}$ . З (3.15) і (3.16)

знаходимо:

$$a_1^{[0]} + 2a_2^{[0]}x_2 + 3a_3^{[0]}x_2^2 = 0 \quad (x_2 = \pm \frac{h}{2}), \quad (3.18)$$

звідки випливає, що

$$\begin{aligned} a_2^{[0]} = 0, \quad a_1^{[0]} = -\frac{3}{4}h^2a_3^{[0]}, \quad A^{[0]} = -a_3^{[0]}d(x_2), \quad d(x_2) = \frac{3}{4}h^2x_2 - x_2^3, \\ A_2^{[0]} = -a_3^{[0]}d_2(x_2), \quad d_2(x_2) = \frac{3}{4}h^2 - 3x_2^2, \quad \Delta\varepsilon_{12}^{[0]} = -\frac{1}{2}a_3^{[0]}d_2(x_2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Прирости нормальних напружень на верхній і нижній гранях дорівнюють нулю:

$$\Delta\sigma_{22} = 0 \quad (x_2 = \pm h/2). \quad (3.20)$$

Отже,  $\Delta\sigma_{22}^{[0]} = 0$  і з (3.13) отримаємо  $K_2^{[0]}\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} + K_1^{[0]}\Delta\varepsilon_{22}^{[0]} = 0 \quad (x_2 = \pm h/2)$ ,

тобто

$$\begin{aligned} K_2^{[0]}[\Delta\varepsilon_s^{[0]} - (b_1^{[0]}x_2 + b_2^{[0]}x_2^2)\frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}] + \\ + K_1^{[0]}[(b_1^{[0]} + 2b_2^{[0]}x_2)^2 - 1]/2 = 0 \quad (x_2 = \pm h/2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Нехтуючи складовими, що містять  $(d\Delta\phi^{[0]}/ds)^2$ , знаходимо з (3.21)

$$b_1^{[0]} = [1 - 2\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\Delta\varepsilon_s^{[0]}]^2]^{1/2}, \quad b_2^{[0]} = \frac{K_2^{[0]}}{2K_1^{[0]}}\frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}, \quad (3.22)$$

а отже,

$$\Delta\varepsilon_{11}^{[0]} = \Delta\varepsilon_s^{[0]} - 2b_1^{[0]}x_2\frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}. \quad (3.23)$$

З (3.13) и (3.15) знаходимо

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{22}^{[0]} &= \frac{1}{2}[(a_3^{[0]})^2d_2^2 + 2\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}(\frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}x_2 - \Delta\varepsilon_s^{[0]})], \\ \Delta\sigma_{11}^{[0]} &= E_1^{[0]}(\Delta\varepsilon_s^{[0]} - x_2\frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}) + \frac{K_2^{[0]}}{2}(a_3^{[0]})^2d_2^2, \quad \Delta\sigma_{22}^{[0]} = \frac{K_1^{[0]}}{2}(a_3^{[0]})^2d_2^2, \\ \Delta\sigma_{33}^{[0]} &= E_2^{[0]}(\Delta\varepsilon_s^{[0]} - x_2\frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}) + \frac{K_2^{[0]}}{2}(a_3^{[0]})^2d_2^2, \quad \Delta\sigma_{12}^{[0]} = -G^{[0]}a_3^{[0]}d_2(x_2) \\ (E_1^{[0]} &= K_1^{[0]} - \frac{(K_2^{[0]})^2}{K_1^{[0]}}, \quad E_2^{[0]} = K_2^{[0]} - \frac{(K_2^{[0]})^2}{K_1^{[0]}}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Головний вектор  $\mathbf{Q}$  внутрішніх зусиль в поперечному перерізі дорівнює

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_b + \mathbf{Q}_u + \mathbf{Q}_d \quad (3.25)$$

де  $\mathbf{Q}_b$  – головний вектор внутрішніх зусиль в бетоні,  $\mathbf{Q}_u$  і  $\mathbf{Q}_d$  – зусилля у верхній і нижній арматурі відповідно (рис. 3.1). Покладемо, що ділянка балки, для якої передбачається вивести рівняння згину, вільна від навантаження. Тоді з умови рівноваги маємо

$$\mathbf{Q}_b + \mathbf{Q}_u + \mathbf{Q}_d = -\mathbf{R}_O \quad (3.26)$$

( $\mathbf{R}_O$  – головний вектор сил, прикладених в точках балки, розташованих лівіше точки  $O$ , а також в ній самій).

Представимо вектор  $\mathbf{R}_O$ , а також його горизонтальну  $\mathbf{R}_{O,1}$  и вертикальну  $\mathbf{R}_{O,2}$  складові у вигляді асимптотичних розкладів за  $\mu$ :

$$\mathbf{R}_O = \sum_{k=0}^n \mu^k \mathbf{R}_O^{[k]}, \quad \mathbf{R}_{O,1} = \sum_{k=0}^n \mu^k \mathbf{R}_{O,1}^{[k]}, \quad \mathbf{R}_{O,2} = \sum_{k=0}^n \mu^k \mathbf{R}_{O,2}^{[k]}. \quad (3.27)$$

В розділі 2 показано, що

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{O,1}^{[0]} &= \mathbf{R}_{O,1}^{[0]} \cos \phi^{[0]} + \mathbf{R}_{O,2}^{[0]} \sin \phi^{[0]}, \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,1}^{[1]} &= -\phi^{[1]} (\mathbf{R}_{O,1}^{[0]} \sin \phi^{[0]} - \mathbf{R}_{O,2}^{[0]} \cos \phi^{[0]}) + \mathbf{R}_{O,1}^{[1]} \cos \phi^{[0]} + \mathbf{R}_{O,2}^{[1]} \sin \phi^{[0]}, \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,2}^{[0]} &= -\mathbf{R}_{O,1}^{[0]} \sin \phi^{[0]} + \mathbf{R}_{O,2}^{[0]} \cos \phi^{[0]}, \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,2}^{[1]} &= -\phi^{[1]} (\mathbf{R}_{O,1}^{[0]} \cos \phi^{[0]} + \mathbf{R}_{O,2}^{[0]} \sin \phi^{[0]}) - \mathbf{R}_{O,1}^{[1]} \sin \phi^{[0]} + \mathbf{R}_{O,2}^{[1]} \cos \phi^{[0]}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{O,1}^{[0]} &= \Delta \mathbf{R}_{O,1}^{[0]} \cos \phi^{[0]} + \Delta \mathbf{R}_{O,2}^{[0]} \sin \phi^{[0]}, \\ \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{O,1}^{[1]} &= -\Delta \phi^{[1]} (\mathbf{R}_{O,1}^{[0]} \sin \phi^{[0]} - \mathbf{R}_{O,2}^{[0]} \cos \phi^{[0]}) - \phi^{[1]} (\Delta \mathbf{R}_{O,1}^{[0]} \sin \phi^{[0]} - \Delta \mathbf{R}_{O,2}^{[0]} \cos \phi^{[0]}) + \\ &+ \Delta \mathbf{R}_{O,1}^{[1]} \cos \phi^{[0]} + \Delta \mathbf{R}_{O,2}^{[1]} \sin \phi^{[0]}, \\ \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{O,2}^{[0]} &= -\Delta \mathbf{R}_{O,1}^{[0]} \sin \phi^{[0]} + \Delta \mathbf{R}_{O,2}^{[0]} \cos \phi^{[0]}, \\ \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{O,2}^{[1]} &= -\Delta \phi^{[1]} (\mathbf{R}_{O,1}^{[0]} \cos \phi^{[0]} + \mathbf{R}_{O,2}^{[0]} \sin \phi^{[0]}) - \phi^{[1]} (\Delta \mathbf{R}_{O,1}^{[0]} \cos \phi^{[0]} + \Delta \mathbf{R}_{O,2}^{[0]} \sin \phi^{[0]}) - \\ &- \Delta \mathbf{R}_{O,1}^{[1]} \sin \phi^{[0]} + \Delta \mathbf{R}_{O,2}^{[1]} \cos \phi^{[0]}. \end{aligned}$$

Тут  $\tilde{\mathbf{R}}_{O,j}^{[0]}$  ( $j=1,2$ ) – проекції  $\mathbf{R}_O^{[0]}$  на осі  $y_j$  ( $j=1,2$ ),  $\tilde{\mathbf{R}}_{O,j}^{[1]}$  ( $j=1,2$ ) – проекції  $\mathbf{R}_O^{[1]}$  на ці осі.

Зауважимо, що вирази для  $R_{A,j}^{[k]*}$  ( $k, j = 1, 2$ ) можуть бути отримані з (3.27) заміною  $H_{A,j}^{[k]}$ ,  $V_{A,j}^{[k]}$ ,  $\phi^{[k]}$  ( $k, j = 1, 2$ ) на  $H_{A,j}^{[k]*}$ ,  $V_{A,j}^{[k]*}$ ,  $\phi^{[k]*}$  ( $k, j = 1, 2$ ).

Проектуючи векторну рівність (3.25) на вісь  $y_2$ , отримуємо

$$Q_{b,2} + Q_{u,2} + Q_{d,2} = -\tilde{R}_{O,2},$$

звідки випливає, що

$$\Delta Q_{b,2}^{[0]} + \Delta Q_{u,2}^{[0]} + \Delta Q_{d,2}^{[0]} = -\Delta \tilde{R}_{O,2}^{[0]}. \quad (3.29)$$

Припускаючи, що матеріал, з якого виготовлена арматура, в розглянутому діапазоні навантажень по своїм деформаційним властивостям мало відрізняється від лінійно пружного, матимемо для першого наближення

$$\Delta Q_{u,2}^{[0]} = G_a \Delta \varepsilon_{12}^{[0]}(h_1) S_1, \quad \Delta Q_{d,2}^{[0]} = G_a \Delta \varepsilon_{12}^{[0]}(-h_2) S_2, \quad (3.30)$$

де  $G_a$  – модуль зсуву матеріалу арматури,  $S_1$  і  $S_2$  – площі поперечних перерізів верхньої і нижньої арматури відповідно  $\Delta \varepsilon_{12}^{[0]}(h_1) = -\frac{1}{2} a_3^{[0]} d_2^{[0]}(h_1)$ ,  $\Delta \varepsilon_{12}^{[0]}(-h_2) = -\frac{1}{2} a_3^{[0]} d_2^{[0]}(h_2)$  ( $h_1$  і  $h_2$  – відстані від центра ваги перерізу до верхньої і нижньої арматури).

Приріст проекції головного вектора внутрішніх зусиль в бетоні на вісь  $x_2$  визначаємо з формули

$$\Delta Q_{b,2}^{[0]} = b \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{12}^{[0]} dx_2$$

( $b$  – ширина перерізу балки). З (3.24) і (3.19) отримуємо

$$\Delta Q_{b,2}^{[0]} = -b G^{[0]} a_3^{[0]} h^3 / 2. \quad (3.31)$$

З (3.29) – (3.31) випливає

$$a_3^{[0]} = 2 \Delta R_{A,2}^{[0]} / H_s \quad (H_s = G^{[0]} b h^3 + G_a d_2(h_1) S_1 + G_a d_2(h_2) S_2). \quad (3.32)$$

Аналогічно (3.29) отримуємо рівність

$$\Delta Q_{b,1}^{[0]} + \Delta Q_{u,1}^{[0]} + \Delta Q_{d,1}^{[0]} = -\Delta R_{A,1}^{[0]}. \quad (3.33)$$

Згідно із законом Гука маємо

$$\Delta Q_{u,1}^{[0]} = E_a \Delta \varepsilon_{11}^{[0]}(h_1) S_1, \quad \Delta Q_{d,1}^{[0]} = E_a \Delta \varepsilon_{11}^{[0]}(-h_2) S_2, \quad (3.34)$$



де  $E_a$  – модуль пружності матеріалу арматури. З (3.23) випливає

$$\Delta Q_{u,1}^{[0]} = E_a S_1 (\Delta \varepsilon_s^{[0]} - h_1 \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}), \quad \Delta Q_{d,1}^{[0]} = E_a S_2 (\Delta \varepsilon_s^{[0]} + h_2 \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}). \quad (3.35)$$

Проекція приросту головного вектора внутрішніх зусиль в бетоні на вісь  $x_1$  визначається з формули

$$\Delta Q_{b,1}^{[0]} = b \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{11}^{[0]} dx_2.$$

Нехтуючи складовими, що містять  $(\frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds})^2$  і  $(a_3^{[0]})^2$ , отримуємо

$$\Delta Q_{b,1}^{[0]} = S E_1^{[0]} \Delta \varepsilon_s^{[0]} \quad (S = bh). \quad (3.36)$$

З (3.33) – (3.36) знаходимо

$$\Delta \varepsilon_s^{[0]} = [E_a \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds} (S_1 h_1 - S_2 h_2) - \Delta R_{A,1}^{[0]}] / H_l \quad (H_l = S E_1^{[0]} + E_a (S_1 + S_2)). \quad (3.37)$$

Приріст головного моменту внутрішніх зусиль в першому наближенні в перерізі  $\Pi$  відносно осі  $x_3$ , визначається за формулою

$$\Delta M_3^{[0]} = \Delta M_b^{[0]} - h_1 \Delta Q_{u,1}^{[0]} + h_2 \Delta Q_{d,1}^{[0]}, \quad \Delta M_b^{[0]} = -b \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \Delta \sigma_{11}^{[0]} dx_2. \quad (3.38)$$

З (3.24) отримуємо

$$\Delta M_b^{[0]} = -E_1^{[0]} J \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}. \quad (3.39)$$

Тоді

$$\Delta M_3^{[0]} = H \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds} + E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2) \Delta R_{A,1}^{[0]} / H_l \quad (3.40)$$

$$(H = E_1^{[0]} J + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2) - E_a^2 (S_1 h_1 - S_2 h_2)^2 / H_l, \quad J = bh^3 / 12).$$

Скористаємося співвідношенням [262]

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q}, \quad (3.41)$$

де  $\mathbf{M}$  – головний момент внутрішніх зусиль в перерізі балки відносно його центра ваги,  $\mathbf{Q}$  – їх головний вектор,  $\mathbf{e}_1$  – орт осі  $x_1$ .

Проектуючи рівність (3.41) на вісь  $x_3$ , отримуємо для першого наближення

$$\frac{dM_3^{[0]}}{ds} = -Q_2^{[0]}.$$

З умови рівноваги маємо  $Q_2^{[0]} = -\tilde{R}_{O,2}^{[0]}$ . Отже,

$$\frac{dM_3^{[0]}}{ds} = \tilde{R}_{O,2}^{[0]},$$

звідки виходить, що

$$\frac{d\Delta M_3^{[0]}}{ds} = \Delta \tilde{R}_{O,2}^{[0]}. \quad (3.42)$$

З (3.40) і (3.42) випливає

$$H \frac{d^2 \Delta \phi^{[0]}}{ds^2} + D \frac{d\Delta \tilde{R}_{O,1}^{[0]}}{ds} = \Delta \tilde{R}_{O,2}^{[0]} \quad (3.43)$$

( $D = E_a(S_1 h_1 - S_2 h_2) / H_l$ ). З (3.28) і (3.43) отримуємо диференціальне рівняння згину балки в першому наближенні

$$\begin{aligned} H \frac{d^2 \phi^{[0]}}{ds^2} - (H_A^{[0]} \sin \phi^{[0]} - V_A^{[0]} \cos \phi^{[0]}) (D \frac{d\phi^{[0]}}{ds} - 1) = \\ = H \frac{d^2 \phi^{[0]*}}{ds^2} + D \frac{d\tilde{R}_{A,1}^{[0]*}}{ds} - \tilde{R}_{A,2}^{[0]*}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Зауважимо, що права частина рівняння (3.44) залежить від величин  $\phi^{[0]*}$ ,  $\tilde{R}_{A,1}^{[0]*}$ ,  $\tilde{R}_{A,2}^{[0]*}$ , визначених на попередніх етапах завантаження балки.

У цьому параграфі побудовано диференціальне рівняння (3.44) згину елемента залізобетонної каркасної будівлі в першому наближенні.

### 3.2 Диференціальні рівняння етапів плоского згину залізобетонної балки з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей матеріалів в другому і наступних наближеннях

Аналогічно проводяться викладки і для другого наближення. З (3.17) отримуємо

$$\Delta\sigma_{12}^{[1]} = 0 \quad (x_2 = \pm h/2), \quad (3.45)$$

звідки виходить

$$\Delta\varepsilon_{12}^{[1]} = 0 \quad (x_2 = \pm h/2). \quad (3.46)$$

З (3.156) і (3.46) знаходимо:

$$a_1^{[1]} + 2a_2^{[1]}x_2 + 3a_3^{[1]}x_2^2 = 0 \quad (x_2 = \pm h/2). \quad (3.47)$$

З (3.47) випливає, що

$$\begin{aligned} a_2^{[1]} = 0, \quad a_1^{[1]} = -\frac{3}{4}h^2 a_3^{[1]}, \quad A^{[1]}(x_2) = -a_3^{[1]}d(x_2), \\ A_2^{[1]}(x_2) = -a_3^{[1]}d_2(x_2), \quad \Delta\varepsilon_{12}^{[1]} = -\frac{1}{2}a_3^{[1]}d_2(x_2). \end{aligned} \quad (3.48)$$

З умов

$$\Delta\sigma_{22}^{[1]} = 0 \quad (x_2 = \pm h/2) \quad (3.49)$$

з урахуванням (3.13) і (3.156) визначаємо, що

$$\begin{aligned} \frac{K_1^{[0]}}{2} [A_2^{[0]}(\pm \frac{h}{2})A_2^{[1]}(\pm \frac{h}{2}) + B_2^{[0]}(\pm \frac{h}{2})B_2^{[1]}(\pm \frac{h}{2})] + K_2^{[0]} [\Delta\varepsilon_s^{[1]} - B^{[1]}(\pm \frac{h}{2}) \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds} - \\ - B^{[0]}(\pm \frac{h}{2}) \frac{d\Delta\phi^{[1]}}{ds}] + K_1^{[1]}(\pm \frac{h}{2})\Delta\varepsilon_{22}^{[0]}(\pm \frac{h}{2}) + K_2^{[1]}(\pm \frac{h}{2})\Delta\varepsilon_{11}^{[0]}(\pm \frac{h}{2}) = 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Тут і в подальшому під виразом  $K_j^{[1]}(x_2)$  ( $j = 1, 2$ ) розуміється  $K_j^{[1]}(\Delta\varepsilon_0(x_2), \Delta\gamma_0(x_2))$  ( $j = 1, 2$ ).

Враховуючи що  $b_2^{[0]} \sim \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds}$  і нехтуючи  $(\frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds})^2$ , отримуємо з (3.50)

$$b_1^{[1]} = -\frac{2K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\Delta\varepsilon_s^{[1]} - \frac{1}{K_1^{[0]}}D^+, \quad b_2^{[1]} = \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\frac{d\Delta\phi^{[1]}}{ds} - \frac{1}{K_1^{[0]}h}D^-. \quad (3.51)$$

Тут

$$\begin{aligned} D^+ = K_1^{[1]}(h/2)\Delta\varepsilon_{22}^{[0]}(h/2) + K_1^{[1]}(-h/2)\Delta\varepsilon_{22}^{[0]}(-h/2) + K_2^{[1]}(h/2)\Delta\varepsilon_{11}^{[0]}(h/2) + \\ + K_2^{[1]}(-h/2)\Delta\varepsilon_{11}^{[0]}(-h/2), \quad D^- = K_1^{[1]}(h/2)\Delta\varepsilon_{22}^{[0]}(h/2) - \\ - K_1^{[1]}(-h/2)\Delta\varepsilon_{22}^{[0]}(-h/2) + K_2^{[1]}(h/2)\Delta\varepsilon_{11}^{[0]}(h/2) - K_2^{[1]}(-h/2)\Delta\varepsilon_{11}^{[0]}(-h/2). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Другий член асимптотичного розкладу приросту проекції головного вектора внутрішніх зусиль в бетоні на вісь  $x_2$  відповідно до (3.13) визначаєть-

ся з формули

$$\Delta Q_{\bar{o}2}^{[1]} = b \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{12}^{[1]} dx_2 = 2b[G^{[0]} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \varepsilon_{12}^{[1]} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} G^{[1]}(\Delta \gamma_0) \Delta \varepsilon_{12}^{[0]} dx_2].$$

Використовуючи (3.48), знаходимо

$$\Delta Q_{\bar{o}2}^{[1]} = b[-\frac{G^{[0]}}{2} a_3^{[1]} h^3 + 2 \int_{-h/2}^{h/2} G^{[1]}(\Delta \gamma_0) \Delta \varepsilon_{12}^{[0]} dx_2]. \quad (3.55)$$

Приріст проекції зусилля у верхній арматурі на вісь  $x_2$  (тобто зрізаюче зусилля в ній) визначається за формулою

$$Q_{u,2\Delta}^{[1]} = G_a \Delta \varepsilon_{12}^{[1]}(h_1) S_1 = -\frac{G_a}{2} d_2(h_1) S_1 a_3^{[1]}. \quad (3.56)$$

Аналогічно для нижньої арматури отримуємо

$$Q_{d,2\Delta}^{[1]} = G_a \Delta \varepsilon_{12}^{[1]}(-h_2) S_2 = -\frac{G_a}{2} d_2(h_2) S_2 a_3^{[1]}. \quad (3.57)$$

З умови рівноваги

$$\Delta Q_{\bar{o},2}^{[1]} + \Delta Q_{u,2}^{[1]} + \Delta Q_{d,2}^{[1]} + \Delta \tilde{R}_{O,2}^{[1]} = 0 \quad (3.58)$$

маємо

$$a_3^{[1]} = 2[\Delta R_{A,2}^{[1]} + 2b \int_{-h/2}^{h/2} G^{[1]}(\gamma_0) \Delta \varepsilon_{12}^{[0]} dx_2] / H_s. \quad (3.59)$$

Аналогічно з рівності

$$\Delta Q_{\bar{o},1}^{[1]} + \Delta Q_{u,1}^{[1]} + \Delta Q_{d,1}^{[1]} + \Delta \tilde{R}_{O,1}^{[1]} = 0. \quad (3.60)$$

знаходимо

$$\varepsilon_s^{[1]} = -D \frac{d\Delta\phi^{[1]}}{ds} - \frac{\tilde{R}_{O,1}^{[1]}}{H_l} + \varepsilon_s^{\otimes}. \quad (3.61)$$

Тут

$$\varepsilon_s^{\otimes} = -\frac{\Delta \varepsilon_s^{[0]} b \bar{E}_1^{[1]}}{H_l} - \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds} \left[ \frac{E_1^{[0]} Sh D^-}{12 K_1^{[0]} H_l} + \frac{1}{K_1^{[0]}} (DD^+ + D_1 D^-) \right], \quad (3.62)$$

$$D_1 = E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2) / (h H_l).$$

Зауважимо, що  $\varepsilon_s^{\otimes}$  залежить тільки від величин, знайдених на попередньому кроці, тобто в першому наближенні.

Аналогічно (3.40) записуємо рівність

$$\Delta M_3^{[1]} = -\Delta M_b^{[1]} - h_1 \Delta Q_{u,1}^{[1]} + h_2 \Delta Q_{d,1}^{[1]}, \Delta M_b^{[1]} = b \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \Delta \sigma_{11}^{[1]} dx_2. \quad (3.63)$$

Можна переконатися, що

$$\begin{aligned} \Delta M_b^{[1]} = & J[-E_1^{[0]} \frac{d\Delta\phi^{[1]}}{ds} + \frac{(K_1^{[0]} + E_1^{[0]})D^+}{2K_1^{[0]}} \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds} - \frac{K_2^{[0]} D^-}{K_1^{[0]} h}] + b\tilde{E}_1^{[1]} \Delta \varepsilon_s^{[0]} - \\ & - b\tilde{E}_1^{[1]} \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds} \quad (\tilde{E}_1^{[1]} = \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]}(x_2) x_2 dx_2, \tilde{E}_1^{[1]} = \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]}(x_2) x_2^2 dx_2). \end{aligned}$$

Тоді

$$\Delta M_3^{[1]} = H \frac{d\Delta\phi^{[1]}}{ds} + D\Delta\tilde{R}_{O,1}^{[1]} + M_3^\otimes, \quad (3.64)$$

де

$$\begin{aligned} M_3^\otimes = & -E_a(S_1 h_1 - S_2 h_2) \Delta \varepsilon_s^{[0]} - [\frac{K_1^{[0]} + E_1^{[0]}}{2K_1^{[0]}} JD^+ + \frac{E_a S_1 h_1^2}{K_1^{[0]}} (D^+ + \frac{h_1}{h} D^-) + \\ & + \frac{E_a S_2 h_2^2}{K_1^{[0]}} (D^+ - \frac{h_2}{h} D^-) - b\tilde{E}_1^{[1]}] \frac{d\Delta\phi^{[0]}}{ds} + J \frac{K_2^{[0]} D^-}{K_1^{[0]} h} - b\tilde{E}_1^{[1]} \Delta \varepsilon_s^{[0]}. \end{aligned}$$

Так само як і  $\varepsilon_s^\otimes$ ,  $M_3^\otimes$  виражається тільки через величини, знайдені в першому наближенні. Аналогічно (3.42) маємо

$$\frac{d\Delta M_3^{[1]}}{ds} = \Delta\tilde{R}_{O,2}^{[1]}.$$

Звідси і з (3.64) знаходимо

$$H \frac{d^2 \Delta\phi^{[1]}}{ds^2} + D \frac{d\Delta\tilde{R}_{O,1}^{[1]}}{ds} + \frac{dM_3^\otimes}{ds} = \Delta\tilde{R}_{O,2}^{[1]}. \quad (3.65)$$

З урахуванням (3.28) рівність (3.65) можна записати так

$$\begin{aligned} & H \frac{d^2 \phi^{[1]}}{ds^2} - D(H_A^{[0]} \sin \phi^{[0]} - V_A^{[0]} \cos \phi^{[0]}) \frac{d\phi^{[1]}}{ds} + \\ & + (H_A^{[0]} \cos \phi^{[0]} + V_A^{[0]} \sin \phi^{[0]}) (1 - D \frac{d\phi^{[0]}}{ds}) \phi^{[1]} + H_A^{[1]} \sin \phi^{[0]} - \\ & - V_A^{[1]} \cos \phi^{[0]} = H \frac{d^2 \phi^{[1]*}}{ds^2} + D \frac{d\tilde{R}_{A,1}^{[1]*}}{ds} - \tilde{R}_{A,2}^{[1]*} - D\tilde{R}_{A,2}^{[0]} \frac{d\phi^{[0]}}{ds} - \frac{dM_3^\otimes}{ds}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Зауважимо, що права частина рівняння (3.66) залежить від величин  $\phi^{[0]}$ ,  $M_3^\otimes$ , визначених у першому наближенні, а також від  $\phi^{[1]}$ ,  $\tilde{R}_{A,1}^{[1]*}$ ,  $\tilde{R}_{A,2}^{[1]*}$ , визначених на попередніх етапах деформування балки.

У цьому параграфі побудовано диференціальне рівняння (3.66) етапу плоского згину елемента залізобетонної каркасної будівлі з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей матеріалів в другому наближенні.

**Зауваження.** Як і в Розділі 2, аналогічним чином можуть бути побудовані диференціальні рівняння для наступних наближень. Вони мають такий же вигляд, як (3.66). Кількість потрібних наближень визначається абсолютною величиною відповідного доданку в асимптотичному розкладі прогину консолі. Якщо вона стає меншою ніж деяка величина, яка пов'язана з потребою точністю обчислень, побудову наближень можна припинити.

### 3.3 Застосування методу малого параметру для вирішення нелінійної пружнопластичної задачі циклічного квазістатичного згину залізобетонної консольної балки

Розглянемо консольну балку, що знаходиться під дією двох сил  $F_1$  і  $F_2$  (рис. 2.3). Передбачається, що процес деформації балки, викликаний зміною сил, є квазістатичним, тому, нехтуючи інерційними ефектами, масу балки можна не враховувати. Зміна сил  $F_1$  і  $F_2$  буде називатися циклічною, якщо вона складається з окремих циклів, в кінці кожного з яких вони приймають значення, що збігаються зі значеннями в його початку. Кожен із циклів розіб'ємо на окремі етапи монотонного зростання або зменшення цих сил при постійному їх знаку. У п. 1 цього розділу приріст  $\Delta\phi(s)$  кута повороту  $\phi(s)$  поперечного перерізу балки на деякому етапі ( $s$  – довжина деформованого відрізка осі балки між розглянутим перерізом і лівим кінцем балки) представлено в наступному вигляді:

$$\Delta\phi(s) = \Delta\phi^{[0]}(s) + \mu\Delta\phi^{[1]}(s). \quad (3.67)$$

Тут і далі через  $\Delta X$  позначено приріст величини  $X$ :  $\Delta X = X^{**} - X^*$ , де  $X^*$  –

значення цієї величини на початку даного етапу. через  $X^{**}$  позначимо значення  $X$  в кінці етапу.

Введемо наступні позначення:

$$\zeta = s / l, \alpha = F_1 l^2 / H, \beta = F_2 l^2 / H,$$

де

$$H = E_1^{[0]} J + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2) - \frac{E_a^2}{H_l} (S_1 h_1 - S_2 h_2)^2, H_l = S E_1^{[0]} + E_a (S_1 + S_2),$$

$E_1^{[0]} = E^{[0]} / (1 - \nu_0^2)$ ,  $E^{[0]}$  – модуль лінійної пружності бетону,  $\nu_0$  – початковий коефіцієнт Пуассона;  $J$  – момент інерції поперечного перерізу,  $E_a$  – початковий модуль пружності арматури;  $S_1$  і  $S_2$  – площі перерізів верхньої і нижньої арматури,  $S = bh$  (розміри  $h$ ,  $h_1$  і  $h_2$  показані на рис. 2.9).

Припустимо, що навантаження консолі відбувається наступним чином: спочатку (будемо називати цей етап нульовим) прикладається стискаюча сила  $F_1$ , яка змінюється від нуля до деякого значення  $F_1^*$ , а  $F_2$ ,  $\beta$  і  $\phi$  залишаються рівними нулю. При цьому параметр  $\alpha$  змінюється від нуля до  $\alpha^* = F_1^* l^2 / H$ . На наступних етапах  $F_1$  і  $\alpha$  передбачаються незмінними, а параметр  $\beta$  змінюється від  $\beta_{(j)}^*$  до  $\beta_{(j)}^{**}$  ( $j$  – номер етапу). під позначенням  $\beta_{(j)}$  розуміється наступне:  $\beta_{(j)} = \beta$  при  $\beta \in [\beta_{(j)}^*, \beta_{(j)}^{**}]$ .

Перше наближення  $\Delta\phi^{[0]}(s)$  на  $j$ -ому етапі визначається диференціальним рівнянням (див. (3.43)):

$$H \frac{d^2 \Delta\phi_{(j)}^{[0]}}{ds^2} + D \frac{d\Delta\tilde{R}_{(j)O,1}^{[0]}}{ds} = \Delta R_{(j)O,2}^{[0]}, \quad (3.68)$$

де

$$D = E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2) / H_l, \quad \Delta\tilde{R}_{(j)O,k}^{[0]}(\zeta) = \tilde{R}_{(j)O,k}^{[0]}(\zeta) - \tilde{R}_{(j)O,k}^{[0]*}(\zeta) \quad (k = 1, 2),$$

$$\tilde{R}_{(j)O,1}^{[0]}(\zeta) = R_{(j),1} \cos\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) + R_{(j)O,2} \sin\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta), \quad \tilde{R}_{(j)A,2}^{[0]}(\zeta) = -R_{(j)O,1} \sin\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) + R_{(j)O,1} \cos\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta),$$

$$\tilde{R}_{(j)O,1}^{[0]*}(\zeta) = R_{(j)O,1}^* \cos\phi_{(j)}^{[0]*}(\zeta) + R_{(j)O,2}^* \sin\phi_{(j)}^{[0]*}(\zeta), \quad \tilde{R}_{(j)O,2}^{[0]*}(\zeta) =$$

$= -R_{(j)O,1}^* \sin \phi_{(j)}^{[0]*}(\zeta) + R_{(j)O,2}^* \cos \phi_{(j)}^{[0]*}(\zeta)$  ( $R_{O,1}$  і  $R_{O,2}$  – горизонтальна і вертикальна складові опорної реакції  $R_{(j)O}$ ;  $\phi_{(j)}^{[0]*}(\zeta)$ ,  $R_{(j)O,1}^*(\zeta)$  і  $R_{(j)O,2}^*(\zeta)$  – значення  $\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta)$ ,  $R_{(j)O,1}(\zeta)$  і  $R_{(j)O,2}(\zeta)$  на початку даного етапу).

З умов рівноваги виходить, що  $R_{(j)O,1} = -F_{(j)1}$ ,  $R_{(j)O,2} = -F_{(j)2}$ . Тоді (3.68) представиться так:

$$\frac{d^2 \phi_{(j)}^{[0]}}{d\zeta^2} - (\alpha^* \sin \phi_{(j)}^{[0]} - \beta_{(j)} \cos \phi_{(j)}^{[0]}) (1 - \delta \frac{d\phi_{(j)}^{[0]}}{d\zeta}) = \Phi(\alpha^*, \beta_{(j)}^*, \phi_{(j)}^{[0]*}), \quad (3.69)$$

де  $\Phi(\alpha^*, \beta_{(j)}^*, \phi_{(j)}^{[0]*}) = \frac{d^2 \phi_{(j)}^{[0]*}}{d\zeta^2} - (\alpha^* \sin \phi_{(j)}^{[0]*} - \beta_{(j)}^* \cos \phi_{(j)}^{[0]*}) (1 - \delta_0 \frac{d\phi_{(j)}^{[0]*}}{d\zeta})$ ,  $\delta_0 = \frac{D}{l}$ .

На першому етапі  $\phi_{(1)}^{[0]*} = \beta_{(1)}^* = 0$ . Тоді  $\Phi(\alpha^*, \beta_{(1)}^*, \phi_{(1)}^{[0]*}) = 0$  і рівняння (3.69) для першого етапу приймає наступний вигляд:

$$\frac{d^2 \phi_{(1)}^{[0]}}{d\zeta^2} - (\alpha^* \sin \phi_{(1)}^{[0]} - \beta_{(1)} \cos \phi_{(1)}^{[0]}) (1 - \delta_0 \frac{d\phi_{(1)}^{[0]}}{d\zeta}) = 0. \quad (3.70)$$

Звідси випливає, що в кінці етапу  $\Phi(\alpha^*, \beta_{(1)}^*, \phi_{(1)}^{[0]*}) = 0$ , а на початку наступного  $\Phi(\alpha^*, \beta_{(2)}^*, \phi_{(2)}^{[0]*}) = 0$ . Продовжуючи таким же чином далі, отримуємо  $\Phi(\alpha^*, \beta_{(j)}^*, \phi_{(j)}^{[0]*}) = 0$  і рівняння (3.69) виглядає так:

$$\frac{d^2 \phi_{(j)}^{[0]}}{d\zeta^2} - (\alpha^* \sin \phi_{(j)}^{[0]} - \beta_{(j)} \cos \phi_{(j)}^{[0]}) (1 - \delta_0 \frac{d\phi_{(j)}^{[0]}}{d\zeta}) = 0. \quad (3.71)$$

Вирішуючи (3.71) методом послідовних наближень, отримуємо

$$\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) = \sum_{k=1}^4 \Phi_{(j)k}^{[0]} \zeta^k, \quad (3.72)$$

де  $\Phi_{(j)1}^{[0]} = \beta_{(j)}(1 - \alpha^*/3 - \delta_0 \beta_{(j)}/2)$ ,  $\Phi_{(j)2}^{[0]} = -\beta_{(j)}(1 - \delta_0 \beta_{(j)})/2$ ,  $\Phi_{(j)3}^{[0]} = \beta_{(j)}(\alpha^* - \delta_0 \beta_{(j)})/6$ ,  $\Phi_{(j)4}^{[0]} = -\alpha^* \beta_{(j)}/24$ .

Положення нейтральної лінії в поперечному перерізі визначається рівністю



$$\sigma_{(j)11}^{[0]}(s, x_2) = 0. \quad (3.73)$$

У розділі 2 показано, що

$$\sigma_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2) = E_1^{[0]}[\varepsilon_{(j)s}^{[0]}(\zeta) - \frac{x_2}{l}\theta_{(j)}^{[0]}(\zeta)] + \frac{K_2^{[0]}}{2}[a_{(j)3}^{[0]}(\zeta)]^2 d_2^2(x_2). \quad (3.74)$$

Тут  $\varepsilon_{(j)s}^{[0]}(\zeta) = -\frac{3}{20}SK_2^{[0]}[a_{(j)3}^{[0]}(\zeta)]^2 h^4 + \delta_0 \theta_{(j)}^{[0]}(\zeta) + \delta_l[\alpha^* \cos \phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) + \beta_{(j)} \sin \phi_{(j)}^{[0]}(\zeta)]$ ,  $a_{(j)3}^{[0]}(\zeta) = \delta_s[\alpha^* \sin \phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) - \beta_{(j)} \cos \phi_{(j)}^{[0]}(\zeta)]$ ,  $\delta_l = H/l^2 H_l$ ,  $\delta_s = 2H/l^2 H_s$ ,  $H_s = G^{[0]}bh^3 + G_a[d_2(h_1)S_1 + d_2(h_2)S_2]$ ,  $\theta_{(j)}^{[0]}(\zeta) = \frac{d\phi_{(j)}^{[0]}}{d\zeta}$ ,  $d_2(x_2) = \frac{3}{4}h^2 - 3x_2^2$ ,  $K_2^{[0]} = K^{[0]} - 2G^{[0]}/3$  ( $K^{[0]}$  и  $G^{[0]}$  – початкові, тобто відповідні лінійно пружній деформації, модулі об'ємного стиску і зсуву бетону;  $G_a$  – модуль зсуву арматури).

Будемо розглядати клас задач, в яких  $\beta^2 \ll |\alpha^*|$ ,  $(\alpha^*)^2 \ll 1$ . Тоді залишаючи тільки величини до першого порядку малості по  $\beta$  включно, можемо записати

$$\begin{aligned} \phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) &= \beta_{(j)} \bar{\phi}^{[0]}(\zeta), \theta_{(j)}^{[0]}(\zeta) = \beta_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta), \\ a_{(j)3}^{[0]}(\zeta) &= -\beta_{(j)} \bar{a}_3^{[0]}(\zeta), \varepsilon_{(j)s}^{[0]}(\zeta) = \beta_{(j)} \delta_0 \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) + \alpha^* \delta_l, \end{aligned} \quad (3.75)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^{[0]}(\zeta) &= (1 - \alpha^*/3)\zeta - \zeta^2/2 + \alpha^* \zeta^3/6 - \alpha^* \zeta^4/24, \\ \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) &= 1 - \alpha^*/3 - \zeta + \alpha^* \zeta^2/2 - \alpha^* \zeta^3/6, \bar{a}_3^{[0]}(\zeta) = \delta_s [1 - \alpha^* \bar{\phi}^{[0]}(\zeta)]. \end{aligned} \quad (3.75a)$$

З (3.73) і (3.75) знаходимо  $x_{(j)2,N}$  – координату  $x_2$  нейтральної лінії на поперечному перерізі. Крім того,  $x_{(j)2,N} = -\text{sgn}(\beta_{(j)})h/2$  при  $\zeta > \zeta_N$  ( $\zeta_N$  – координата  $\zeta$  точки перетину нейтральної лінії з верхньою або нижньою поверхнею балки). Тоді

$$x_{(j)2,N}(\zeta) = l[\delta_0 + \frac{\alpha^* \delta_l}{\beta_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)}] (\zeta \leq \zeta_N), \quad x_{(j)2,N}(\zeta) = -\text{sgn}(\beta_{(j)}) \frac{h}{2} (\zeta > \zeta_N) \quad (3.76)$$

При зміні  $\zeta$  координата  $x_{j,2,N}$  змінюється. Графік функції  $x_{(j)2,N} = x_{(j)2,N}(\zeta)$  при

$\alpha_{(1)}^* < 0$  і  $\beta_{(1)} > 0$  показано на рис. 3.2. Частина балки, що знаходиться вище лінії  $x_{(1)2,N}(\zeta)$ , знаходиться в стиснутій зоні, а та частина, яка знаходиться нижче її (вона позначена римською цифрою III) – в розтягнутій.

Відповідно до циклічної зміни сили  $F_2$  параметр  $\beta$  також піддається циклічній зміні. На першому етапі першого циклу згину  $\beta$  збільшується від  $\beta_{(1)}^* = 0$  до деякого значення  $\beta_{(2)}^* > 0$ ; на другому етапі  $\beta$  зменшується від  $\beta_{(2)}^*$  до  $\beta_{(3)}^* = 0$ ; на третьому – зменшується від  $\beta_{(3)}^* = 0$  до  $\beta_{(4)}^* < 0$ ; на четвертому етапі – збільшується від  $\beta_{(4)}^*$  до 0. На другому і наступних циклах етапи повторюються, проте  $\beta_{(j)}^*$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) можуть відрізнятися від їх значень в різних циклах. На першому етапі розтягнута зона збільшується, а стиснута зменшується. Крім того, в частині стиснутої зони стискаючі напруження збільшуються (тобто там йде процес навантаження), в іншій частині стиснутої зони вони зменшуються (тобто тут йде процес розвантаження). Лінію  $x_{(j)2,d} = x_{(j)2,d}(\zeta)$ , яка розмежовує ці частини стиснутої зони, будемо визначати з рівності

$$\partial \sigma_{(j)11}^{[0]}(\zeta) / \partial \beta_{(j)} = 0. \quad (3.77)$$

У межах обраної точності отримуємо з (3.74) і (3.75)

$$x_{(j)2,d}(\zeta) = D. \quad (3.78)$$

Таким чином, частина стиснутої зони при  $x_2 > D$  є зоною навантаження (на рис. 3.2 вона позначена римською цифрою I), а при  $x_2 < D$  – зоною розвантаження (на рис. 3.2 позначена цифрою II).

Координата  $\zeta_{(j)N}$ , визначає точку перетину нейтральної лінії верхньої або нижньої поверхнею балки, знаходиться з умови  $x_{(j)2,N}(\zeta_N) = -\text{sgn}(\beta_{(j)})h/2$ . З (3.76) випливає, що  $\zeta_{(j)N}$  є коренем рівняння

$$\bar{\theta}^{[0]}(\zeta_{(j)N}) = -\alpha^* \delta_l l / [\beta_{(j)}(D + \text{sgn}(\beta_{(j)})h/2 + D)]. \quad (3.79)$$

Середнє подовження  $\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)$ , а також октаедрична деформація зсуву

$\bar{\gamma}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)$  в першому наближенні визначаються так:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]} &= (\varepsilon_{(j)11}^{[0]} + \varepsilon_{(j)22}^{[0]} + \varepsilon_{(j)33}^{[0]}) / 3, \bar{\gamma}_{(j)}^{[0]} = 2\{(\varepsilon_{(j)11}^{[0]})^2 + (\varepsilon_{(j)22}^{[0]})^2 + \\ &+ (\varepsilon_{(j)33}^{[0]})^2 - \varepsilon_{(j)11}^{[0]}\varepsilon_{(j)22}^{[0]} - \varepsilon_{(j)22}^{[0]}\varepsilon_{(j)33}^{[0]} - \varepsilon_{(j)33}^{[0]}\varepsilon_{(j)11}^{[0]} + 3[(\varepsilon_{(j)12}^{[0]})^2 + \\ &+ (\varepsilon_{(j)23}^{[0]})^2 + (\varepsilon_{(j)31}^{[0]})^2]\}^{1/2} / 3 \end{aligned} \quad (3.80)$$

$(\varepsilon_{(j)ik}^{[0]} (i, k = 1, 2, 3) - \text{елементи тензора скінченних деформацій в точках балки, знайдені в першому наближенні}).$

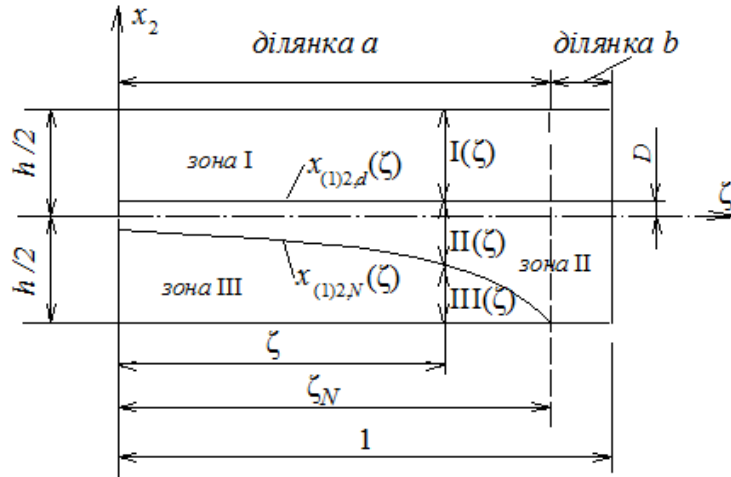


Рис. 3.2 Схема розподілу зон навантаження і розвантаження на першому етапі

У додатку Б показано, що

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2) &= \varepsilon_{(j)s}^{[0]}(\zeta) - [1 - K_2^{[0]}\varepsilon_{(j)s}^{[0]}(\zeta) / K_1^{[0]}]\theta_{(j)}^{[0]}(\zeta)x_2 / l, \\ \varepsilon_{(j)22}^{[0]}(\zeta, x_2) &= \{[a_{(j)3}^{[0]}(\zeta)]^2 d_2^2(x_2) + 2K_2^{[0]}[\theta_{(j)}^{[0]}(\zeta)\frac{x_2}{l} - \varepsilon_{(j)s}^{[0]}(\zeta)] / K_1^{[0]}\} / \\ &/ 2, \varepsilon_{(j)12}^{[0]}(\zeta, x_2) = -[1 + \varepsilon_{(j)s}^{[0]}(\zeta)]a_{(j)3}^{[0]}(\zeta)d_2(x_2) / 2, \varepsilon_{(j)33}^{[0]}(\zeta, x_2) = \\ &= \varepsilon_{(j)13}^{[0]}(\zeta, x_2) = \varepsilon_{(j)23}^{[0]}(\zeta, x_2) = 0 \quad (K_1^{[0]} = K^{[0]} + 4G^{[0]} / 3). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Враховуючи (3.75) і залишаючи величини першого порядку малості щодо  $\beta$ , можемо записати

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2) &= \alpha^* \delta_l - \beta_{(j)}\left(\frac{x_2}{l} - \delta_0\right)\bar{\theta}^{[0]}(\zeta), \quad \varepsilon_{(j)22}^{[0]}(\zeta, x_2) = -K_2^{[0]} \times \\ &\times \frac{\alpha^* \delta_l - \beta_{(j)}\left(\frac{x_2}{l} - \delta_0\right)\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)}{K_1^{[0]}}, \quad \varepsilon_{(j)12}^{[0]}(\zeta, x_2) = -\frac{\beta_{(j)}}{2} \bar{a}_3^{[0]}(\zeta)d_2(x_2). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Таким чином, для  $\varepsilon_{(j)22}^{[0]}(\zeta, x_2) = -K_2^{[0]} \varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2) / K_1^{[0]}$  і  $\bar{\gamma}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)$  в межах зазначеної вище точності матимемо

$$\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) = \frac{1}{3} K_4^{[0]} \varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2), \bar{\gamma}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) = \frac{2}{3} \sqrt{K_3^{[0]}} |\varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2)|, \quad (3.83)$$

де  $K_3^{[0]} = 1 + K_2^{[0]} / K_1^{[0]} + (K_2^{[0]} / K_1^{[0]})^2$ ,  $K_4^{[0]} = 1 - K_2^{[0]} / K_1^{[0]}$ .

З (3.82) і (3.83) випливає

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2) &= 3\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) / K_4^{[0]}, \varepsilon_{(j)22}^{[0]}(\zeta, x_2) = -3K_2^{[0]} \bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) / \\ &/ (K_1^{[0]} K_4^{[0]}), \bar{\gamma}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) = 2\sqrt{K_3^{[0]}} |\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)| / K_4^{[0]}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Можна переконатися, що  $\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)$  не змінює знака. Тоді

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{(j)s}^{[0]}(\zeta) &= \Delta\beta_{(j)} \delta_0 \bar{\theta}^{[0]}(\zeta), \Delta\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) = -K_4^{[0]} \Delta\beta_{(j)} (x_2 / l - \delta_0) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) / 3, \\ \Delta\bar{\gamma}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) &= 2\sqrt{K_3^{[0]}} |\Delta\beta_{(j)} (x_2 / l - \delta_0) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)| / 3, \Delta\varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2) = \\ &= 3\Delta\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) / K_4^{[0]}, \Delta\varepsilon_{(j)22}^{[0]}(\zeta, x_2) = -3K_2^{[0]} \Delta\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) / (K_1^{[0]} K_4^{[0]}). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Для складової  $\Delta\phi_{(j)}^{[1]}(\zeta)$  другого наближення маємо наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 \Delta\phi_{(j)}^{[1]}}{d\zeta^2} + \frac{Dl}{H} \frac{dR_{(j)1}^{[1]}}{d\zeta} - \frac{l^2}{H} \Delta R_{(j)2}^{[1]} = -\frac{l}{H} \frac{dM_{(j)3}^{\otimes}}{d\zeta}. \quad (3.86)$$

Тут

$$\begin{aligned} M_{(j)3}^{\otimes}(\zeta) &= -DH_l \Delta\varepsilon_{(j)s}^{[0]}(\zeta) - [J_1 D_{(j)}^+(\zeta) + J_2 D_{(j)}^-(\zeta) - b\tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta)] \Delta\theta_{(j)}^{[0]}(\zeta) + \\ &+ J_3 D_{(j)}^-(\zeta) - b\tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) \Delta\varepsilon_{(j)s}^{[0]}(\zeta), J_1 = (K_1^{[0]} + E_1^{[0]}) J / (2K_1^{[0]}) + E_a (S_1 h_1^2 + \\ &+ S_1 h_2^2) / K_1^{[0]}, J_2 = E_a (S_1 h_1^3 - S_1 h_2^3) / (K_{(j)1}^{[0]} h), J_3 = JK_2^{[0]} / (K_1^{[0]} h), K_1^{[0]} = \\ &= K^{[0]} + 4G^{[0]} / 3, K_2^{[0]} = K^{[0]} - 2G^{[0]} / 3, \tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) = \int_{-h/2}^{h/2} E_{(j)1}^{[1]}(\zeta, x_2) x_2 dx_2, \\ \tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) &= \int_{-h/2}^{h/2} E_{(j)1}^{[1]}(\zeta, x_2) x_2^2 dx_2, E_{(j)1}^{[1]}(\zeta, x_2) = K_{(j)1}^{[1]}(\zeta, x_2) - K_{(j)2}^{[1]}(\zeta, x_2) \times \\ &\times K_2^{[0]} / K_1^{[0]}, K_{(j)1}^{[1]}(\zeta, x_2) = K_{(j)}^{[1]} [\Delta\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)] + 4G_{(j)}^{[1]} [\Delta\bar{\gamma}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)] / 3, \\ K_{(j)2}^{[1]}(\zeta, x_2) &= K_{(j)}^{[1]} [\Delta\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)] - 2G_{(j)}^{[1]} [\Delta\bar{\gamma}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)] / 3, D_{(j)}^{\pm}(\zeta) = \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$= K_{(j)1}^{[1]}(\zeta, h/2)\Delta\varepsilon_{(j)22}^{[0]}(\zeta, h/2) \pm K_{(j)1}^{[1]}(\zeta, -h/2)\Delta\varepsilon_{(j)22}^{[0]}(\zeta, -h/2) + \\ + K_{(j)2}^{[1]}(\zeta, h/2)\Delta\varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, h/2) \pm K_{(j)2}^{[1]}(\zeta, -h/2)\Delta\varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, -h/2).$$

З (3.52) і (3.85) отримуємо

$$D_{(j)}^{\pm}(\zeta) = -\frac{3K_2^{[0]}\Delta\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, \frac{h}{2})}{K_1^{[0]}K_4^{[0]}}K_{(j)1}^{[1]}(\zeta, \frac{h}{2}) \mp \frac{3K_2^{[0]}\Delta\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, -\frac{h}{2})}{K_1^{[0]}K_4^{[0]}}K_{(j)1}^{[1]}(\zeta, -\frac{h}{2}) + \\ + \frac{3\Delta\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, \frac{h}{2})}{K_4^{[0]}}K_{(j)2}^{[1]}(\zeta, \frac{h}{2}) \pm \frac{3\Delta\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, -\frac{h}{2})}{K_4^{[0]}}K_{(j)2}^{[1]}(\zeta, -\frac{h}{2}). \quad (3.88)$$

На першому етапі згину консолі рівняння (3.86) має наступний вигляд:

$$\frac{d^2\phi_{(1)}^{[1]}}{d\zeta^2} + \frac{Dl}{H}\frac{dR_{(1)1}^{[1]}}{d\zeta} - \frac{l^2}{H}R_{(1)2}^{[1]} = -\frac{l}{H}\frac{dM_{(1)3}^{\otimes}}{d\zeta}, \quad (3.89)$$

тому що  $\phi_{(1)}^{[0]*}(\zeta) = \phi_{(1)}^{[1]*}(\zeta) = 0$ .

З формул (3.28)

$$\tilde{R}_{(j)O,1}^{[1]}(\zeta) = -[R_{(j)O,1} \sin\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) - R_{(j)O,2} \cos\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta)]\phi_{(j)}^{[1]}(\zeta), \\ \tilde{R}_{(j)O,2}^{[1]}(\zeta) = -[R_{(j)O,1} \cos\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) + R_{(j)O,2} \sin\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta)]\phi_{(j)}^{[1]}(\zeta)$$

впливає, що

$$\tilde{R}_{(1)O,1}^{[1]*}(\zeta) = \tilde{R}_{(1)O,2}^{[1]*}(\zeta) = 0$$

і

$$l^2\tilde{R}_{(j)O,1}^{[1]}(\zeta)/H = [\alpha_{(j)} \sin\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) - \beta_{(j)} \cos\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta)]\phi_{(j)}^{[1]}(\zeta), \\ l^2\tilde{R}_{(j)O,2}^{[1]}(\zeta)/H = [\alpha_{(j)} \cos\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) + \beta_{(j)} \sin\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta)]\phi_{(j)}^{[1]}(\zeta). \quad (3.90)$$

Тоді

$$\frac{d^2\phi_{(2)}^{[1]*}}{d\zeta^2} + \frac{Dl}{H}\frac{d\tilde{R}_{(2)O,1}^{[1]*}}{d\zeta} - \frac{l^2}{H}\tilde{R}_{(2)O,2}^{[1]*} = -\frac{l}{H}\frac{dM_{(1)3}^{\otimes**}}{d\zeta},$$

Продовжуючи таким же чином далі, знаходимо, що (3.86) для будь-якого етапу може бути записано так

$$\frac{d^2\phi_{(j)}^{[1]}}{d\zeta^2} + \frac{Dl}{H}\frac{d\tilde{R}_{(j)O,1}^{[1]}}{d\zeta} - \frac{l^2}{H}\tilde{R}_{(j)O,2}^{[1]} = -\frac{l}{H}\left[\sum_{k=1}^{j-1}\frac{dM_{(k)3}^{\otimes**}}{d\zeta} + \frac{dM_{(j)3}^{\otimes}}{d\zeta}\right]. \quad (3.91)$$

Функції  $K_{(j)}^{[1]}(\Delta\bar{\varepsilon}_{(j)})$  і  $G_{(j)}^{[1]}(\Delta\bar{\gamma}_{(j)})$  фігурують в наступному представленні січних об'ємного модуля пружності і модуля зсуву для нелінійно-пружного матеріалу:

$$K_{(j)}(\Delta\varepsilon_{0(j)}) = K^{[0]} + K_{(j)}^{[1]}(\Delta\varepsilon_{0(j)}), G_{(j)}(\Delta\gamma_{0(j)}) = G^{[0]} + G_{(j)}^{[1]}(\Delta\gamma_{0(j)}).$$

У додатку Б показано, що функції  $K_{(j)}^{[1]}(\Delta\varepsilon_{0(j)})$  і  $G_{(j)}^{[1]}(\Delta\gamma_{0(j)})$  можна апроксимувати наступним чином:

$$\begin{aligned} K_{(j)}^{[1]}(\Delta\varepsilon_{0(j)}) &= K^{[0]}[\tilde{\delta}_{(j)} + (1 + \tilde{\delta}_{(j)})(\chi_{(j)0} + \chi_{(j)1} \frac{\Delta\varepsilon_{0(j)}}{\hat{\varepsilon}_{(j)m}} + \chi_{(j)2} \frac{\Delta\varepsilon_{0(j)}^2}{\hat{\varepsilon}_{(j)m}^2})], \\ G_{(j)}^{[1]}(\Delta\gamma_{0(j)}) &= G^{[0]}[\tilde{\delta}_{(j)} + (1 + \tilde{\delta}_{(j)})(\psi_{(j)0} + \psi_{(j)1} \frac{\Delta\gamma_{0(j)}}{|\hat{\varepsilon}_{(j)m}|} + \psi_{(j)2} \frac{\Delta\gamma_{0(j)}^2}{\hat{\varepsilon}_{(j)m}^2})], \end{aligned} \quad (3.92)$$

де  $\tilde{\delta}_{(j)}, \chi_{(j)k}, \psi_{(j)k}$  ( $k = 0, 1, 2$ ) – величини, що залежать від типу етапу поздовжнього розтягу чи стиску,  $m = b$  при стиску и  $m = bt$  при розтязі. Введемо додатковий субіндекс  $z$ , що позначає номер зони, в якій знаходиться точка з координатами  $x_2$  і  $\zeta$ . Наприклад,  $K_{(j,z)}^{[1]}(\zeta, x_2) = K_{(j)}^{[1]}(\zeta, x_2)$  при  $\zeta, x_2 \in z$ . Як вже зазначалося вище,  $\Delta\varepsilon_{0(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)$  зберігає знак в межах кожної зони. З (3.85) знаходимо

$$\begin{aligned} K_{(j,z)}^{[1]}(x_2, \zeta) &= K^{[0]} \sum_{k=0}^2 \Delta\beta_{(j)}^k \bar{\chi}_{(j,z)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^k, \\ G_{(j,z)}^{[1]}(x_2, \zeta) &= G^{[0]} \sum_{k=0}^2 \Delta\beta_{(j)}^k \bar{\psi}_{(j,z)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^k. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Тут

$$\begin{aligned} K_{(j,z)}^{[1]}(\zeta, x_2) &= K_{(j,z)}^{[1]}(\Delta\varepsilon_{0(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)), G_{(j,z)}^{[1]}(\zeta, x_2) = G_{(j,z)}^{[1]}(\Delta\gamma_{0(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)), \\ \bar{\chi}_{(j,z)0}(\zeta, x_2) &= \tilde{\delta}_{(j,z)} + (1 + \tilde{\delta}_{(j,z)})\chi_{(j,z)0}(\zeta, x_2), \bar{\chi}_{(j,z)1}(\zeta, x_2) = \\ &= -K_4^{[0]}(1 + \tilde{\delta}_{(j,z)})\chi_{(j,z)1}(\zeta, x_2)/(3l\hat{\varepsilon}_{(j)m}), \tilde{\chi}_{(j,z)2}(\zeta, x_2) = (K_4^{[0]})^2 \times \\ &\times (1 + \tilde{\delta}_{(j,z)})\chi_{(j,z)2}(\zeta, x_2)/(9l^2\hat{\varepsilon}_{(j)m}^2), \tilde{\psi}_{(j,z)0}(\zeta, x_2) = \tilde{\delta}_{(j,z)} + (1 + \tilde{\delta}_{(j,z)}) \times \\ &\times \psi_{(j,z)0}(\zeta, x_2), \tilde{\psi}_{(j,z)1}(\zeta, x_2) = -2\sqrt{K_3^{[0]}}(1 + \tilde{\delta}_{(j,z)})\psi_{(j,z)1}(\zeta, x_2)/(3l\hat{\varepsilon}_{(j)m}), \\ \tilde{\psi}_{(j,z)2}(\zeta, x_2) &= 4K_3^{[0]}(1 + \tilde{\delta}_{(j,z)})\psi_{(j,z)2}(\zeta, x_2)/(9l^2\hat{\varepsilon}_{(j)m}^2) \end{aligned} \quad (3.94)$$

( $m = b$  в стиснутій зоні і  $m = bt$  – в розтягнутій).

Назвемо відрізок балки  $\zeta \leq \zeta_{(j)N}$  ділянкою  $a$ . Він містить зони I, II, III. Відрізок балки  $\zeta_{(j)n} < \zeta \leq 1$  назвемо ділянкою  $b$ . Він містить тільки дві зони: I і II. Якщо за формулою (Б.14) виходить, що  $\zeta_{(j)N} \leq 0$ , то балка складається тільки з однієї ділянки  $b$ . Якщо ж з формули (Б.14) випливає, що  $\zeta_{(j)N} \geq 1$ , то балка складається тільки з ділянки  $a$ . При  $0 < \zeta_{(j)N} < 1$  балка містить обидві ділянки. З (3.87) випливає

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) &= K_4^{[0]}[K_{(j)}^{[1]}(\zeta, x_2)]^{\sim} + \frac{2}{3}(3 + K_4^{[0]})[G_{(j)}^{[1]}(\zeta, x_2)]^{\sim}, \\ \tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) &= K_4^{[0]}[K_{(j)}^{[1]}(\zeta, x_2)]^{\approx} + \frac{2}{3}(3 + K_4^{[0]})[G_{(j)}^{[1]}(\zeta, x_2)]^{\approx}.\end{aligned}$$

Прийнято наступні позначення:

$$[f(x_2)]^{\sim} = \int_{-h/2}^{h/2} f(x_2)x_2 dx_2, \quad [f(x_2)]^{\approx} = \int_{-h/2}^{h/2} f(x_2)x_2^2 dx_2.$$

Очевидно

$$[K_{(j)}^{[1]}]^{\sim}(\zeta) = \sum_{z=I}^{N_z} \tilde{K}_{(j,z)}^{[1]}(\zeta), \quad [G_{(j)}^{[1]}]^{\sim}(\zeta) = \sum_{z=I}^{N_z} \tilde{G}_{(j,z)}^{[1]}(\zeta). \quad (3.95)$$

$$\tilde{K}_{(j,z)}^{[1]}(\zeta) = \int_{z(\zeta)} K_{(j,z)}^{[1]}(\zeta, x_2)x_2 dx_2, \quad \tilde{G}_{(j,z)}^{[1]}(\zeta) = \int_{z(\zeta)} G_{(j,z)}^{[1]}(\zeta, x_2)x_2 dx_2$$

(кожен з інтегралів береться вздовж відрізка  $z(\zeta)$ , який утворюється в результаті перетину прямої, паралельної осі  $x_2$ , з зоною  $z$  (рис.3.4), причому  $N_z=III$ , якщо точка  $\zeta$  знаходиться на ділянці  $a$ , і  $N_z = II$  в іншому випадку). З (3.85) випливає:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{(j,z)}^{[1]}(\zeta) &= K^{[0]} \sum_{k=0}^2 \Delta\beta_{(j)}^k [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^k \tilde{X}_{(j,z)k}(\zeta), \quad \tilde{G}_{(j,z)}^{[1]}(\zeta) = \\ &= G^{[0]} \sum_{k=0}^2 \Delta\beta_{(j)}^k [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^k \tilde{\Psi}_{(j,z)k}(\zeta), \quad \tilde{X}_{(j,z)k}(\zeta) = \int_{z(\zeta)} \bar{\chi}_{(j,z)k}(\zeta, x_2) \times \\ &\times (x_2 - D)^k x_2 dx_2, \quad \tilde{\Psi}_{(j,z)k}(\zeta) = \int_{z(\zeta)} \bar{\psi}_{(j,z)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^k x_2 dx_2.\end{aligned} \quad (3.96)$$

Використовуючи (3.94), отримуємо

$$\tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) = \sum_{z=1}^{N_z} \tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]}(\zeta), \quad (3.97)$$

де

$$\tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]}(\zeta) = \sum_{k=0}^2 \beta_{(j)\Delta}^k [K_4^{[0]} K^{[0]} \tilde{X}_{(j,z)k}(\zeta) + \frac{2}{3} (3 + K_4^{[0]}) G^{[0]} \tilde{\Psi}_{(j,z)k}(\zeta)] [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^k.$$

Аналогічно находимо, що

$$\tilde{\tilde{E}}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) = \sum_{z=1}^{N_z} \tilde{\tilde{E}}_{(j,z)1}^{[1]}(\zeta). \quad (3.98)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{E}}_{(j,z)1}^{[1]}(\zeta) &= \sum_{k=0}^2 \Delta \beta_{(j)}^k [K_4^{[0]} K^{[0]} \tilde{\tilde{X}}_{(j,z)k}(\zeta) + \frac{2}{3} (3 + K_4^{[0]}) G^{[0]} \tilde{\tilde{\Psi}}_{(j,z)k}(\zeta)] \times \\ &\times [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^k, \quad \tilde{\tilde{X}}_{(j,z)k}(\zeta) = \int_{z(\zeta)} \bar{\chi}_{(j,z)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^k x_2^2 dx_2, \quad \tilde{\tilde{\Psi}}_{(j,z)k}(\zeta) = \\ &= \int_{z(\zeta)} \bar{\psi}_{(j,z)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^k x_2^2 dx_2. \end{aligned}$$

З (3.87) і (3.93) отримуємо

$$K_{(j,z)k}^{[1]}(\zeta, x_2) = \sum_{n=0}^2 K_{(j,z)k,n}^{[1]}(\zeta, x_2) [(x_2 - D) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n \quad (k = 1, 2).$$

Тут

$$\begin{aligned} K_{(j,z)1,n}^{[1]}(\zeta, x_2) &= \Delta \beta_{(j)}^n [K^{[0]} \bar{\chi}_{(j,z)n}(\zeta, x_2) + 4G^{[0]} \bar{\psi}_{(j,z)n}(\zeta, x_2)/3], \\ K_{(j,z)2,n}^{[1]}(\zeta, x_2) &= \Delta \beta_{(j)}^n [K^{[0]} \bar{\chi}_{(j,z)n}(\zeta, x_2) - 2G^{[0]} \bar{\psi}_{(j,z)n}(\zeta, x_2)/3] \quad (n = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} K_{(j,u)k}^{[1]}(\zeta, h/2) &= \sum_{n=0}^2 K_{(j,u)k,n}^{[1]}(\zeta, h/2) [(h/2 - D) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n, \\ K_{(j,d)k}^{[1]}(\zeta, -h/2) &= \sum_{n=0}^2 K_{(j,d)k,n}^{[1]}(\zeta, -h/2) [-\tilde{\chi}_{(j)1}(h/2 + D) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n \quad (k = 1, 2), \end{aligned}$$

( $u$  – номер верхньої зони,  $d$  – номер нижньої).

Звідси слідує, що



$$\begin{aligned}
D_{(j)}^{\pm}(\zeta) &= \sum_{n=1}^3 D_{(j)n}^{\pm}(\zeta) [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n, \quad D_{(j)n}^{\pm}(\zeta) = \Delta \beta_{(j)} \bar{D}_{(j)n}^{\pm}(\zeta), \quad \bar{D}_{(j)n}^{\pm}(\zeta) = \\
&= \bar{D}_{(j,u)n}(\zeta) \pm \bar{D}_{(j,d)n}(\zeta), \quad \bar{D}_{(j,u)n}(\zeta) = 3[-K_2^{[0]} K_{(j,u)1,n-1}^{[1]}(\zeta, \frac{h}{2}) / K_1^{[0]} + \\
&+ K_{(j,u)2,n-1}^{[1]}(\zeta, \frac{h}{2})] (\frac{h}{2} - D)^n / K_4^{[0]}, \quad \bar{D}_{(j,d)n}(\zeta) = 3[-K_2^{[0]} K_{(j,d)1,n-1}^{[1]}(\zeta, -\frac{h}{2}) / \\
&/ K_1^{[0]} + K_{(j,d)2,n-1}^{[1]}(\zeta, -\frac{h}{2})] [-(\frac{h}{2} + D)]^n / K_4^{[0]}.
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Враховуючи (3.75), запишемо вираз для  $M_{(j)3}^{\otimes}(\zeta)$  з (3.87) так

$$\begin{aligned}
M_{(j)3}^{\otimes}(\zeta) &= -\delta_0^2 l H_l \Delta \beta_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) - [J_1 D_{(j)}^+(\zeta) + J_2 D_{(j)}^-(\zeta) - \\
&- b \tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta)] \Delta \beta_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) + J_3 D_{(j)}^-(\zeta) - b \tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) \Delta \beta_{(j)} \delta_0 \bar{\theta}^{[0]}(\zeta).
\end{aligned} \tag{3.100}$$

З (3.97) – (3.99) отримуємо

$$\begin{aligned}
M_{(j)3}^{\otimes}(\zeta) &= -\Delta \beta_{(j)} \bar{M}_{(j)3}^{\otimes}(\zeta), \quad \bar{M}_{(j)3}^{\otimes}(\zeta) = \delta_0^2 l H_l \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) + \\
&+ \sum_{n=1}^3 A_{(j)n}(\zeta) [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^{n+1} - b \sum_{z=1}^{N_z} \tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]}(\zeta) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) + \delta_0 b \times \\
&\times \sum_{z=1}^{N_z} \tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]}(\zeta) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) + \sum_{n=1}^3 B_{(j)n}(\zeta) [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n, \quad A_{(j)n}(\zeta) = (J_1 + J_2) \times \\
&\times D_{(j,u)n}(\zeta) + (J_1 - J_2) D_{(j,d)n}(\zeta), \quad B_{(j)n}(\zeta) = J_3 [\bar{D}_{(j,u)n}(\zeta) - \bar{D}_{(j,d)n}(\zeta)].
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Зауважимо, що з урахуванням малості  $\phi_{(j)}^{[0]}(\zeta)$  в межах зазначеної вище точності можна представити вирази (3.90) так:

$$\begin{aligned}
\frac{l^2}{H} \frac{dR_{(j)A,1}^{[1]}(\zeta)}{d\zeta} &= \beta_{(j)} \{ \alpha_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) \phi_{(j)}^{[1]}(\zeta) + [\alpha_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) - 1] \frac{d\phi_{(j)}^{[1]}(\zeta)}{d\zeta} \}, \\
\frac{l^2}{H} R_{(j)A,2}^{[1]}(\zeta) &= \alpha^* \phi_{(j)}^{[1]}(\zeta).
\end{aligned}$$

Тоді (3.91) представиться в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \phi_{(j)}^{[1]}}{d\zeta^2} - \alpha^* [1 - \delta_0 \beta_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)] \phi_{(j)}^{[1]}(\zeta) - \delta_0 \beta_{(j)} [1 - \alpha^* \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)] \frac{d\phi_{(j)}^{[1]}(\zeta)}{d\zeta} = \\
= -\frac{l}{H} \left[ \sum_{k=1}^{j-1} \frac{dM_{(k)3}^{\otimes**}}{d\zeta} + \frac{dM_{(j)3}^{\otimes}}{d\zeta} \right]
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Користуючись малістю  $\alpha^*$  і  $\beta_{(j)}$ , будемо розв'язувати рівняння (3.102)

методом послідовних наближень за наступною схемою:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi_{(j),n+1}^{[1]}(\zeta)}{d\zeta^2} &= \alpha^* [1 - \delta_0 \beta_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)] \phi_{(j)n}^{[1]}(\zeta) + \\ &+ \delta_0 \beta_{(j)} [1 - \alpha^* \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)] \frac{d\phi_{(j)n}^{[1]}(\zeta)}{d\zeta} - \frac{l}{H} \left[ \sum_{k=1}^{j-1} \frac{dM_{(k)3}^{\otimes**}(\zeta)}{d\zeta} + \frac{dM_{(j)3}^{\otimes}(\zeta)}{d\zeta} \right]. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Двічі інтегруючи по  $\zeta$ , знаходимо

$$\begin{aligned} \phi_{(j),n+1}^{[1]}(\zeta) &= \alpha^* \{ [\phi_{(j)n}^{[1]}]^{##}(\zeta) - \delta_0 \beta_{(j)} [\bar{\theta}^{[0]} \phi_{(j)n}^{[1]}]^{##}(\zeta) \} + \\ &+ \delta_0 \beta_{(j)} \{ [\phi_{(j)n}^{[1]}]^\#(\zeta) - \alpha^* [\bar{\theta}^{[0]} \frac{d\phi_{(j)n}^{[1]}}{d\zeta}]^{##}(\zeta) \} - \frac{l}{H} \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} [M_{(k)3}^{\otimes**}]^\#(\zeta) + \right. \\ &\left. + [M_{(j)3}^{\otimes}]^\#(\zeta) \right\} + c_{(j)0} \zeta + c_{(j)1}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Вважаючи  $\phi_{(j)0}^{[1]}(\zeta) \equiv 0$ , отримуємо

$$\phi_{(j)1}^{[1]}(\zeta) = -\frac{l}{H} \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} [M_{(k)3}^{\otimes**}]^\#(\zeta) + [M_{(j)3}^{\otimes}]^\#(\zeta) \right\} + c_{(j)0} \zeta + c_{(j)1}. \quad (3.105)$$

Знак # тут означає наступне:  $[f]^\#(\zeta) = \int_0^\zeta f(\tau) d\tau$ . З граничної умови  $\phi_{(j)1}^{[1]}(0) = 0$

= 0 впливає, що  $c_{(j)1} = 0$ . Значення  $c_{(j)0}$  визначається з другої граничної

умови  $\frac{d\phi_{(j)1}^{[1]}}{ds}(1) = 0$ . Враховуючи що  $\Delta \bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(1) = 0$ , отримуємо

$$c_{(j)0} = l \left[ \sum_{k=1}^{j-1} M_{(k)3}^{\otimes**}(1) + M_{(j)3}^{\otimes}(1) \right] / H. \quad (3.106)$$

З (3.101) знаходимо, що

$$[M_{(j)3}^{\otimes}]^\#(\zeta) = -\Delta \beta_{(j)} [\bar{M}_{(j)3}^{\otimes}]^\#(\zeta), \quad (3.107)$$

де при  $\zeta \leq \zeta_N$

$$\begin{aligned} [\bar{M}_{(j)3}^{\otimes}]^\#(\zeta) &= \delta_0^2 l H_l [\bar{\theta}^{[0]}]^\#(\zeta) + \sum_{n=1}^3 [A_{(j)n} (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^\#(\zeta) - \\ &- b \sum_{z=1}^{N_z} ([\tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]} \bar{\theta}^{[0]}]^\#(\zeta) - \delta_0 [\tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]} \bar{\theta}^{[0]}]^\#(\zeta)) + \sum_{n=1}^3 [B_{(j)n} (\bar{\theta}^{[0]})^n]^\#(\zeta), \end{aligned} \quad (3.108)$$

а при  $\zeta > \zeta_N$

$$\begin{aligned}
[\overline{M}_{(j)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) &= [\overline{M}_{(j)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta_N) + \delta_0^2 l H_l [\overline{\theta}^{[0]}]_b^{\#}(\zeta) + \sum_{n=1}^3 [A_{(j)n} (\overline{\theta}^{[0]})^{n+1}]_b^{\#}(\zeta) - \\
&- b \sum_{z=1}^{N_z} ([\tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]} \overline{\theta}^{[0]}]_b^{\#}(\zeta) - \delta_0 [\tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]} \overline{\theta}^{[0]}]_b^{\#}(\zeta)) + \sum_{n=1}^3 [B_{(j)n} (\overline{\theta}^{[0]})^n]_b^{\#}(\zeta),
\end{aligned} \tag{3.109}$$

де  $[f]_b^{\#}(\zeta) = \int_{\zeta_N}^{\zeta} f(\tau) d\tau$ . Зауважимо, що коефіцієнти  $A_{(j)n}$  і  $B_{(j)n}$ , а також число

зон  $N_z$  різні на ділянках  $a$  і  $b$ .

Рівності (3.105) – (3.109) із застосуванням формул (3.93) – (3.99) представляють алгоритм знаходження  $\phi_{(j)1}^{[1]}(\zeta)$ . Аналогічний алгоритм (тобто з додаванням формули (3.104)) застосовується і для визначення  $\phi_{(j)n}^{[1]}(\zeta)$  при  $n > 1$ . Зупиняючись на певному етапі  $n$ , вважаючи  $\phi_{(j)}^{[1]}(\zeta) = \phi_{(j)n}^{[1]}(\zeta)$ , використовуючи рівність

$$\phi_{(j)}(\zeta) = \phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) + \phi_{(j)}^{[1]}(\zeta), \tag{3.110}$$

впливає з (3.67), а також (3.75) і (3.75а), знаходимо  $\phi_{(j)}^{[1]}(\zeta)$  при будь-якому  $j$ .

Слід зауважити, що зона I є стиснутою зоною (див. Рис. 3.2), в якій спостерігається збільшення стискаючих напружень  $\sigma_{(j)11}^{[0]}$  на першому етапі згину консолі, тобто тут відбувається навантаження. Будемо вважати, що залежності між  $\Delta\bar{\sigma}$  і  $\Delta\bar{\epsilon}$ , а також між  $\Delta\bar{\tau}$  і  $\Delta\bar{\gamma}$  в точках зони збігаються з залежностями між цими величинами в процесі збільшення навантаження при одноосьовому стиску. Тому для побудови цих залежностей можна скористатися результатами додатку Б. У класифікації, запропонованої в цьому додатку, подібний процес відноситься до етапів першого типу. Тому залежність  $\Delta\epsilon_0$  от  $\Delta\sigma_{11}$  представляється в наступному вигляді:

$$\zeta_{(j,z)\Delta}(\Delta\eta_{(j,z)}) = A_{(j,z)} (k_{(j,z)} \eta_{(j,z)}^* + \Delta\eta_{(j,z)}) f_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,z)}) - k_{(j,z)} \zeta_{(j,z)}^*. \tag{3.111}$$

Тут  $j$  – номер етапу згину,  $z$  – номер зони,  $\zeta_{(j,z)} = \epsilon_0 / \hat{\epsilon}_m$ ,  $\eta_{(j,z)} = \sigma_{11} / \hat{\sigma}_m$ ,  $\Delta\zeta_{(j,z)} = \Delta\epsilon_0 / \hat{\epsilon}_m = \zeta_{(j,z)} - \zeta_{(j,z)}^*$ ,  $\Delta\eta_{(j,z)} = \Delta\bar{\sigma}_{11} / \hat{\sigma}_b = \eta_{(j,z)} -$

–  $\eta_{(j,z)}^*$ ,  $\eta_{(j,z)}^*$  и  $\zeta_{(j,z)}^*$  – значення  $\eta_{(j,z)}$  і  $\zeta_{(j,z)}$  на початку етапу,  $k_{(j,z)} = 0$  або 1 в залежності від типу етапу,  $f_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,z)}) = [1 - 2\nu_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,z)})] / [(1 - 2\nu_0) V_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,I)})]$ ,  $\nu_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,z)}) = \nu_m(|\eta_{(j,z)}^* + \Delta\eta_{(j,z)}|)$ ,  $\nu_m(\eta) = \nu_m + (\nu_0 + \hat{\nu}_m)(1 - \eta^2)^{1/2}$ ,  $V_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,z)}) = V_m(|k_{(j,z)}\eta_{(j,z)}^* + \Delta\eta_{(j,z)}|)$ ,  $V_m(\eta) = \hat{V}_m + (V_0 - \hat{V}_m)(1 - \omega_{1,z}\eta - \omega_{2,z}\eta^2)^{1/2}$  ( $m = b$  для стиснутої зони і  $m = bt$  для розтягнутої). величина  $A_{(j,z)}$  визначається за формулою

$$A_{(j,z)} = \hat{\sigma}_m(1 - 2\nu_0) / 3E^{[0]}\hat{\epsilon}_m. \quad (3.112)$$

Зона I на етапі 1 згину є зоною стиску, в якій напруження стиску збільшуються, тобто тут спостерігається процес навантаження. Для етапу 1 в зоні I отримуємо

$$\Delta\zeta_{(1,I)\Delta}(\eta_{(1,I)}) = A_{(1,I)}(\eta_{(1,I)}^* + \Delta\eta_{(1,I)})f_{(1,I)}(\Delta\eta_{(1,I)}) - \zeta_{(1,I)}^*, \quad (3.113)$$

так як  $k_{(1,I)} = 1$ . Крім того, тут  $m = b$ . З формул (Б.69) і (Б.73) маємо

$$\begin{aligned} \chi_{(j,z)0} &= 1/f_{(j,z)}(0) - 1, \quad \chi_{(j,z)1} = [(F_{(j,z)1} - \chi_{(j,z)0})\zeta_{(j,z)2}^2 - \\ &- (F_{(j,z)2} - \chi_{(j,z)0})\zeta_{(j,z)1}^2] / \Delta_{(j,z)}, \quad \chi_{(j,z)2} = [(F_{(j,z)2} - \chi_{(j,z)0})\zeta_{(j,z)1} - \\ &- (F_{(j,z)1} - \chi_{(j,z)0})\zeta_{(j,z)2}] / \Delta_{(j,z)}, \quad \Delta_{(j,z)} = \zeta_{(j,z)1}\zeta_{(j,z)2}(\zeta_{(j,z)2} - \zeta_{(j,z)1}), \end{aligned} \quad (3.114)$$

де  $F_{(j,z)k} = 1/f_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,z)k}) - 1$  ( $k = 1, 2$ ) ( $\Delta\eta_{(j,z)k}$  – значення  $\Delta\eta_{(j,z)}$  з відрізка  $[0, \eta_{(j,z)}^{**} - \eta_{(j,z)}^*]$ ,  $\eta_{(j,z)}^{**}$  – значення  $\eta_{(j,z)}$  в кінці етапу), а  $\chi_{(j,z)k}$  з'являються коефіцієнтами наступного розкладу (додаток Б):

$$K_{(j,z)}^{[1]}(\bar{\epsilon}_{(j,z)\Delta}) = K^{[0]}[\bar{\delta}_{(j,z)} + (1 + \bar{\delta}_{(j,z)}) \sum_{k=0}^2 \chi_{(j,z)k} (\Delta\epsilon_{0(j,z)} / \hat{\epsilon}_m)^k], \quad (3.115)$$

причому  $K_{(j,z)}^{[1]}(\Delta\epsilon_{0(j,z)})$  входить в співвідношення

$$\Delta\sigma_{0(j,z)} = 3[K^{[0]} + K_{(j,z)}^{[1]}(\Delta\epsilon_{(j,z)})]\Delta\epsilon_{0(j,z)}.$$

У додатку Б розклад (3.115) представлено так:

$$K_{(j,z)}^{[1]}(\zeta, x_2) = K^{[0]} \sum_{k=0}^2 \bar{\chi}_{(j,z)k} [\Delta\beta_{(j)}(x_2 - D)\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^k, \quad (3.116)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{(j,z)0}(\zeta, x_2) &= \bar{\delta}_{(j,z)} + (1 + \bar{\delta}_{(j,z)})\chi_{(j,z)0}(\zeta, x_2), \quad \bar{\chi}_{(j,z)1}(\zeta, x_2) = -K_4^{[0]} \times \\ &\times (1 + \bar{\delta}_{(j,z)})\chi_{(j,z)1}(\zeta, x_2)/(3l\hat{\epsilon}_m), \quad \bar{\chi}_{(j,z)2}(\zeta, x_2) = (K_4^{[0]})^2(1 + \bar{\delta}_{(j,z)}) \times \\ &\times \chi_{(j,z)2}(\zeta, x_2)/(3l\hat{\epsilon}_m)^2, \end{aligned} \quad (3.117)$$

$\bar{\delta}_{(j,z)} = 0$  або  $1$  в залежності від типу етапу.

На початку першого етапу згину вся консоль знаходиться в стані поздовжнього одновісного стиску, тому рівень напружень  $\eta_{(1,I)}^*$  дорівнює

$$\eta_{(1,I)}^* = \sigma_{(1)11}^{[0]*} / \hat{\sigma}_b = E_1^{[0]} \alpha^* H / (l^2 H_l \hat{\sigma}_b). \quad (3.118)$$

З урахуванням (3.117) середня відносна деформація на початку етапу згідно з додатком Б може бути визначена так

$$\bar{\epsilon}_{(1,I)}^* = \eta_{(1,I)}^* \hat{\sigma}_b [1 - 2\nu_b(\eta_{(1,I)}^*)] / [3E^{[0]} \nu_b(\eta_{(1,I)}^*)],$$

після чого можна знайти  $\zeta_{(1,I)}^*$ :  $\zeta_{(1,I)}^* = \bar{\epsilon}_{(1,I)}^* / \hat{\epsilon}_b$ . Далі знаходимо корінь  $\hat{\eta}_{(1,I)}$  рівняння

$$\frac{d\zeta_{(1,I)\Delta}(\eta_{(1,I)} - \eta_{(1,I)}^*)}{d\eta_{(1,I)}} = 0. \quad (3.119)$$

Кінець першого етапу визначається значенням  $\beta^{**}$  параметра  $\beta$ . при цьому значенні параметра в різних точках зони I напруження, а, отже, і параметр  $\eta(1, I)$  приймають різні значення. Прийmemo, що  $\eta_{(1,I)}^{**} = \max \eta_{(1,I)}$  в зоні I при цьому значенні параметра  $\beta$  і що  $\eta_{(1,I)}^{**} < \hat{\eta}_{(1,I)}$ . Крім того, прийmemo, що  $\Delta\eta_{(1,I)1} = \hat{\eta}_{(1,I)} - \eta_{(1,I)}^*$ ,  $\Delta\eta_{(1,I)2} = \Delta\eta_{(1,I)1} / 2$ , і знайдемо значення  $\Delta\zeta_{(1,I)}$  при  $\Delta\eta_{(1,I)} = \Delta\eta_{(1,I)1}$  і  $\Delta\eta_{(1,I)} = \Delta\eta_{(1,I)2}$ :

$$\Delta\zeta_{(1,I)1} = \Delta\zeta_{(1,I)}(\Delta\eta_{(1,I)1}), \quad \Delta\zeta_{(1,I)2} = \Delta\zeta_{(1,I)}(\Delta\eta_{(1,I)2}).$$

Зауважимо, що  $\eta_{(1,I)}^*$  і  $\eta_{(1,I)}^{**}$  не залежить від координат точок зони I, а, отже, не залежать від них і  $F_{(1,I)k}$ ,  $\chi_{(1,I)k}$  і  $\psi_{(1,I)k}$  ( $k=0,1,2$ ).

При  $j = 1$  і  $z = I$  маємо  $\tilde{\delta}_{(j,z)} = 0$ . Тоді (3.114) і (3.117) приймають

такий вигляд:

$$\begin{aligned} \chi_{(1,I)0} &= 1/f_{(1,I)}(0) - 1, \chi_{(1,I)1} = [(F_{(1,I)1} - \chi_{(1,I)0})\zeta_{(1,I)2}^2 - (F_{(1,I)2} - \chi_{(1,I)0}) \times \\ &\times \zeta_{(1,I)1}^2] / \Delta_{(1,I)}, \chi_{(1,I)2} = [(F_{(1,I)2} - \chi_{(1,I)0})\zeta_{(1,I)1} - (F_{(1,I)1} - \chi_{(1,I)0})\zeta_{(1,I)2}] / \\ &/ \Delta_{(1,I)}, \Delta_{(1,I)} = \zeta_{(1,I)1}\zeta_{(1,I)2}(\zeta_{(1,I)2} - \zeta_{(1,I)1}), \bar{\chi}_{(1,I)0} = \chi_{(1,I)0}, \bar{\chi}_{(1,I)1} = \\ &= -K_4^{[0]}\chi_{(1,I)1} / (3l\hat{\epsilon}_b), \bar{\chi}_{(1,I)2} = (K_4^{[0]})^2\chi_{(1,I)2} / (3l\hat{\epsilon}_b)^2, \end{aligned} \quad (3.120)$$

Залежність  $\Delta\gamma_0$  від  $\Delta\epsilon_0$  може бути записана так:

$$\Delta\rho_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,z)}) = B_{(j,z)}(k_{(j,z)}\eta_{(j,z)}^* + \Delta\eta_{(j,z)})g_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,z)}) - k_{(j,z)}\rho_{(j,z)}^*, \quad (3.121)$$

де  $\rho_{(j,z)} = \bar{\gamma} / |\hat{\epsilon}_m|$ ,  $\rho_{(j,z)\Delta} = \bar{\gamma}_\Delta / \hat{\epsilon}_m = \rho_{(j,z)} - \rho_{(j,z)}^*$ ,  $\rho_{(j,z)}^*$  – значення  $\rho(j,z)$

на початку етапу,  $g_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,z)}) = [1 + v_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,z)})] / (1 + v_0) V_{(j,z)}(\Delta\eta_{(j,z)})$ ,

$B_{(j,z)} = 2\sqrt{2}\hat{\sigma}_m(1 + v_0) / 3E^{[0]}\hat{\epsilon}_m$ . У додатку Б показано, що

$$\begin{aligned} \Psi_{(j,z)0} &= 1/g_{(j,z)}(0) - 1, \Psi_{(j,z)1} = [(G_{(j,z)1} - \Psi_{(j,z)0})\rho_{(j,z)2}^2 - \\ &- (G_{(j,z)2} - \Psi_{(j,z)0})\rho_{(j,z)1}^2] / \Delta'_{(j,z)}, \Psi_{(j,z)2} = [(G_{(j,z)2} - \Psi_{(j,z)0})\rho_{(j,z)1} - \\ &- (G_{(j,z)1} - \Psi_{(j,z)0})\rho_{(j,z)2}] / \Delta'_{(j,z)}, \Delta'_{(j,z)} = \rho_{(j,z)1}\rho_{(j,z)2}(\rho_{(j,z)2} - \rho_{(j,z)1}), \end{aligned} \quad (3.122)$$

де

$$G_{(j,z)k} = 1/g_{(j,z)}(\eta_{(j,z)\Delta k}) - 1 \quad (k = 1, 2),$$

а  $\Psi_{(j,z)k}$  ( $k = 0, 1, 2$ ) є коефіцієнтами наступного розкладу:

$$G_{(j,z)}^{[1]}(\Delta\gamma_{0(j,z)}) = G_{(j,z)}^{[0]}[\bar{\delta}_{(j,z)} + (1 + \bar{\delta}_{(j,z)}) \sum_{k=0}^2 \Psi_{(j,z)k} \left( \frac{\Delta\gamma_{0(j,z)}}{|\hat{\epsilon}_m|} \right)^k], \quad (3.123)$$

причому  $G_{(j,z)}^{[1]}(\Delta\gamma_{0(j,z)})$  входить в співвідношення

$$\Delta\tau_{0(j,z)} = [G^{[0]} + G_{(j,z)}^{[1]}(\Delta\gamma_{0(j,z)})]\Delta\gamma_{0(j,z)}.$$

У додатку Б розклад для  $G_{(j,z)}^{[1]}(\Delta\gamma_{0(j,z)})$  записаний так

$$G_{(j,z)}^{[1]}(\zeta, x_2) = G^{[0]} \sum_{k=0}^2 \bar{\Psi}_{(j,z)k} [\Delta\beta_{(1)}(x_2 - D)\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^k.$$

Тут

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{(j,z)0} &= \bar{\delta}_{(j,z)} + (1 + \bar{\delta}_{(j,z)})\Psi_{(j,z)0}, \quad \bar{\Psi}_{(j,z)1} = -\frac{2}{3l}\sqrt{K_3^{[0]}}(1 + \bar{\delta}_{(j,z)})\frac{\Psi_{(j,z)1}}{|\hat{\epsilon}_m|}, \\ \bar{\Psi}_{(j,z)2} &= \frac{4}{9l^2}K_3^{[0]}(1 + \bar{\delta}_{(j,z)})\frac{\chi_{(j,z)2}}{\hat{\epsilon}_m^2}, \quad K_3^{[0]} = 1 + \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} + \left(\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)^2.\end{aligned}\quad (3.124)$$

Діючи аналогічно викладеному вище, знаходимо значення  $\Delta\rho_{(1,I)}$  при  $\Delta\eta_{(1,I)} = \Delta\eta_{(1,I)1}$  и  $\Delta\eta_{(1,I)} = \Delta\eta_{(1,I)2}$ ,  $\Delta\rho_{(1,I)1} = \Delta\rho_{(1,I)}(\Delta\eta_{(1,I)1})$ ,  $\Delta\rho_{(1,I)2} = \Delta\rho_{(1,I)}(\Delta\eta_{(1,I)2})$ , а потім визначаємо

$$\begin{aligned}\Psi_{(1,I)0} &= 1/g_{(1,I)}(0) - 1, \quad \Psi_{(1,I)1} = [(G_{(1,I)1} - \Psi_{(1,I)0})\rho_{(1,I)2}^2 - (G_{(1,I)2} - \\ &- \Psi_{(1,I)0})\rho_{(1,I)1}^2]/\Delta'_{(1,I)}, \quad \Psi_{(1,I)2} = [(G_{(1,I)2} - \Psi_{(1,I)0})\rho_{(1,I)1} - (G_{(1,I)1} - \\ &- \Psi_{(1,I)0})\rho_{(1,I)2}]/\Delta'_{(1,I)}, \quad \Delta'_{(1,I)} = \rho_{(1,I)1}\rho_{(1,I)2}(\rho_{(1,I)2} - \rho_{(1,I)1}), \\ \tilde{\Psi}_{(1,I)0} &= \Psi_{(1,I)0}, \quad \tilde{\Psi}_{(1,I)1} = -\frac{2}{3l}\sqrt{K_3^{[0]}}\frac{\Psi_{(1,I)1}}{|\hat{\epsilon}_b|}, \quad \tilde{\Psi}_{(1,I)2} = \frac{4}{9l^2}K_3^{[0]}\frac{\chi_{(1,I)2}}{\hat{\epsilon}_b^2}.\end{aligned}\quad (3.125)$$

Як уже зазначалося, на етапі 1 зона II є стиснутою зоною, в якій стискаючі напруження зменшуються, тобто спостерігається процес розвантаження. Цей процес відноситься до числа етапів другого типу (додаток Б). Очевидно, рівень напружень стиску на початку етапу  $\eta_{(1,II)}^* = \eta_{(1,I)}^*$ . У різних точках зони II напруження різні. Величина  $|\eta_{(1,II)} - \eta_{(1,II)}^*|$  в кінці етапу приймає найбільше значення в тих точках зони, де  $\eta_{(1,II)} = 0$ . Тому покладемо

$$\eta_{(1,II)}^{**} = 0.$$

Зауважимо, що  $\eta_{(1,II)}^*$  и  $\eta_{(1,II)}^{**}$  не залежить від координат точок зони II.

Залежність  $\Delta\bar{\epsilon}$  от  $\Delta\bar{\sigma}$  для зони II виглядає так:

$$\Delta\zeta_{(1,II)}(\Delta\eta_{(1,II)}) = A_{(1,II)}\Delta\eta_{(1,II)}f_{(1,II)}(\Delta\eta_{(1,II)}), \quad (3.126)$$

Тому що  $k_{(1,II)} = 0$ . Діючи далі аналогічно тому, що робилося для зони I, вважаємо  $\Delta\eta_{(1,II)1} = \eta_{(1,II)}^{**} - \eta_{(1,II)}^*$ ,  $\Delta\eta_{(1,II)2} = \Delta\eta_{(1,II)1}/2$  і знаходимо значення  $\Delta\zeta_{(1,II)}$  при  $\Delta\eta_{(1,II)} = \Delta\eta_{(1,II)1}$  і  $\Delta\eta_{(1,II)} = \Delta\eta_{(1,II)2}$ :

$$\Delta\zeta_{(1,II)1} = \Delta\zeta_{(1,II)}(\Delta\eta_{(1,II)1}), \quad \Delta\zeta_{(1,II)2} = \Delta\zeta_{(1,II)}(\Delta\eta_{(1,II)2}).$$

Далі аналогічно (3.120) маємо

$$\begin{aligned} \chi_{(1,II)0} &= 1/f_{(1,II)}(0) - 1, \quad \chi_{(1,II)1} = [(F_{(1,II)1} - \chi_{(1,II)0})\zeta_{(1,II)2}^2 - (F_{(1,II)2} - \\ &- \chi_{(1,II)0})\zeta_{(1,II)1}^2]/\Delta_{(1,II)}, \quad \chi_{(1,II)2} = [(F_{(1,II)2} - \chi_{(1,II)0})\zeta_{(1,II)1} - (F_{(1,II)1} - \\ &- \chi_{(1,II)0})\zeta_{(1,II)2}]/\Delta_{(1,II)}, \quad \Delta_{(1,II)} = \zeta_{(1,II)1}\zeta_{(1,II)2}(\zeta_{(1,II)2} - \zeta_{(1,II)1}), \quad \tilde{\chi}_{(1,II)0} = \\ &= \chi_{(1,II)0}, \quad \tilde{\chi}_{(1,II)1} = -\frac{1}{3l}\left(1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)\frac{\chi_{(1,II)1}}{\hat{\varepsilon}_b}, \quad \tilde{\chi}_{(1,II)2} = \frac{1}{9l^2}\left(1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)^2\frac{\chi_{(1,II)2}}{\hat{\varepsilon}_b^2}, \end{aligned} \quad (3.127)$$

де  $F_{(1,II)k} = 1/f_{(1,II)}(\eta_{(1,II)\Delta k}) - 1$  ( $k = 1, 2$ ). Також враховано, що  $\tilde{\delta}_{(1,II)} = 0$ .

Замість (3.125) отримуємо

$$\begin{aligned} \Psi_{(1,II)0} &= 1/g_{(1,II)}(0) - 1, \quad \Psi_{(1,II)1} = [(G_{(1,II)1} - \Psi_{(1,II)0})\rho_{(1,II)2}^2 - (G_{(1,II)2} - \\ &- \Psi_{(1,II)0})\rho_{(1,II)1}^2]/\Delta'_{(1,II)}, \quad \Psi_{(1,II)2} = [(G_{(1,II)2} - \Psi_{(1,II)0})\rho_{(1,II)1} - (G_{(1,II)1} - \\ &- \Psi_{(1,II)0})\rho_{(1,II)2}]/\Delta'_{(1,II)}, \quad \Delta'_{(1,II)} = \rho_{(1,II)1}\rho_{(1,II)2}(\rho_{(1,II)2} - \rho_{(1,II)1}), \quad \bar{\Psi}_{(1,II)0} = \\ &= \Psi_{(1,II)0}, \quad \bar{\Psi}_{(1,II)1} = -2\sqrt{K_3^{[0]}}\Psi_{(1,II)1}/|3l\hat{\varepsilon}_b|, \quad \bar{\Psi}_{(1,II)2} = 4K_3^{[0]}\chi_{(1,II)2}/(3l\hat{\varepsilon}_b)^2, \end{aligned} \quad (3.128)$$

де  $\rho_{(1,II)\Delta 1} = \rho_{(1,II)\Delta}(\eta_{(1,II)\Delta 1})$ ,  $\rho_{(1,II)\Delta 2} = \rho_{(1,II)\Delta}(\eta_{(1,II)\Delta 2})$ ,  $G_{(1,II)k} = 1/g_{(1,II)}(\eta_{(1,II)\Delta k}) - 1$  ( $k = 1, 2$ ).

На початку першого етапу в балці відсутні поздовжні напруження розтягу, тобто відсутня зона III. Вона з'являється, коли  $\zeta_N$ , що визначає довжину ділянки  $a$ , стає невід'ємним. Позначимо через  $\beta(1)$  значення  $\beta(1)$ , при якому  $\zeta_N = 0$  (як правило, зона III росте з точки  $\zeta = 0$ ,  $x_2 = -h/2$ , що належить зоні II, тобто в точках балки, які згодом стали точками зони III, спочатку відбувався процес розвантаження. Таким чином, перший етап згину в зоні III складається з двох підетапів: на першому підетапі I' в точках зони III відбувається процес розвантаження, аналогічний тому, що відбувається в точках зони II. Другий підетап I'' є етапом навантаження при розтязі після розвантаження при стиску, тобто він відноситься до третього типу. Відповідно до алгоритму, запропонованому в додатку Б, вважаємо  $\eta_{(I',III)}^* = 0$ , а  $\hat{\eta}_{(I'',III)}$  визначаємо аналогічно  $\hat{\eta}_{(I,I)}$ . Знову ж таки  $\eta_{(I,III)}^*$  і  $\eta_{(I,III)}^{**}$  не залежить від координат точок зони III. Далі знаходимо



$\phi_v = [1 - 1/V_{(1,II)}(0)] / (1 - \hat{V}_b)$  и величини  $\tilde{\gamma}_{(1'',III)i} = 1 + \tilde{\beta}_{1i}\phi_v + \tilde{\beta}_{2i}\phi_v^2 + \tilde{\beta}_{3i}\phi_v^3$  ( $i=1,2,3$ ), де  $\tilde{\beta}_{1,1} = -0,55$ ,  $\tilde{\beta}_{1,2} = 0,2$ ,  $\tilde{\beta}_{2,1} = 0,1$ ,  $\tilde{\beta}_{3,1} = 0$ ,  $\tilde{\beta}_{2,2} = \tilde{\beta}_{3,2} = 0$ ,  $\tilde{\beta}_{1,3} = -0,27$ ,  $\tilde{\beta}_{2,3} = -0,02$ ,  $\tilde{\beta}_{3,3} = 0$ . Потім визначаємо  $\bar{\delta}_{(1'',III)} = 1 - \tilde{\gamma}_{(1'',III)3}$ . Використовуючи формули (3.114) і (3.122), через знайдені тут величини обчислюємо коефіцієнти  $\chi_{(1'',III)k}$  і  $\psi_{(1'',III)k}$  ( $k = 0,1,2$ ) і відповідно до (3.115) і (3.123) знаходимо

$$\begin{aligned} K_{(1'',III)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]}) &= K^{[0]} \{ \bar{\delta}_{(1'',III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1'',III)}) [\chi_{(1'',III)0} + \chi_{(1'',III)1} \bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]} / \hat{\varepsilon}_{bt} + \\ &+ \chi_{(1'',III)2} (\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]} / \hat{\varepsilon}_{bt})^2 ] \}, \\ G_{(1'',III)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]}) &= G^{[0]} \{ \bar{\delta}_{(1'',III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1'',III)}) [\psi_{(1'',III)0} + \psi_{(1'',III)1} (\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]} / |\hat{\varepsilon}_{bt}| + \\ &+ \psi_{(1'',III)2} (\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]} / \hat{\varepsilon}_{bt})^2 ] \}. \end{aligned}$$

Представимо ці співвідношення в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} K_{(1'',III)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]}) &= K^{[0]} \{ \bar{\delta}_{(1'',III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1'',III)}) [\chi_{(1'',III)0} + \chi_{(1'',III)1} (\bar{\varepsilon}_{(1,III)\Delta}^{[0]} + \\ &+ \bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]*}) / \hat{\varepsilon}_{bt} + \chi_{(1'',III)2} (\bar{\varepsilon}_{(1,III)\Delta}^{[0]} + \bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]*})^2 / \hat{\varepsilon}_{bt}^2 ] \}, \\ G_{(1'',III)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]}) &= G^{[0]} \{ \bar{\delta}_{(1'',III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1'',III)}) [\psi_{(1'',III)0} + \psi_{(1'',III)1} (\bar{\gamma}_{(1,III)\Delta}^{[0]} + \\ &+ \bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]*}) / |\hat{\varepsilon}_{bt}| + \psi_{(1'',III)2} (\bar{\gamma}_{(1,III)\Delta}^{[0]} + \bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]*})^2 / \hat{\varepsilon}_{bt}^2 ] \}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Тут  $\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]*}$  и  $\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]*}$  – значення  $\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]}$  і  $\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]}$  на початку першого етапу.

Неважко переконатися, використовуючи формули (3.82) і (3.83), що

$$\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]*} = \delta_l K_4^{[0]} \alpha_{(1)}^* / 3, \quad \bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]*} = 2\delta_l \sqrt{K_3^{[0]}} |\alpha_{(1)}^*| / 3.$$

Провівши нескладні викладки, можна записати рівності (3.129) так

$$\begin{aligned} K_{(1,III)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(1,III)\Delta}^{[0]}) &= K^{[0]} \{ \bar{\delta}_{(1,III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1,III)}) [\chi_{(1,III)0} + \chi_{(1,III)1} \bar{\varepsilon}_{(1,III)\Delta}^{[0]} / \hat{\varepsilon}_{bt} + \\ &+ \chi_{(1,III)2} (\bar{\varepsilon}_{(1,III)\Delta}^{[0]})^2 / \hat{\varepsilon}_{bt}^2 ] \}, \\ G_{(1,III)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(1,III)\Delta}^{[0]}) &= G^{[0]} \{ \bar{\delta}_{(1,III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1,III)}) [\psi_{(1,III)0} + \psi_{(1,III)1} \bar{\gamma}_{(1,III)\Delta}^{[0]} / \hat{\varepsilon}_{bt} + \\ &+ \psi_{(1,III)2} (\bar{\gamma}_{(1,III)\Delta}^{[0]})^2 / \hat{\varepsilon}_{bt}^2 ] \}, \end{aligned} \quad (3.130)$$

де

$$\begin{aligned} \chi_{(1,III)0} &= \chi_{(1'',III)0} + \chi_{(1'',III)1} \bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]*} + \chi_{(1'',III)2} (\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]*})^2, \quad \chi_{(1,III)1} = \chi_{(1'',III)1} + \\ &+ 2\chi_{(1'',III)2} \bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]*}, \quad \Psi_{(1,III)0} = \Psi_{(1'',III)0} + \Psi_{(1'',III)1} \bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]*} + \Psi_{(1'',III)2} (\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]*})^2, \\ \Psi_{(1,III)1} &= \Psi_{(1'',III)1} + 2\Psi_{(1'',III)2} \bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]*}, \quad \tilde{\delta}_{(1,III)} = \tilde{\delta}_{(1'',III)}. \end{aligned}$$

Таким чином, функції  $K_{(1,III)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(1,III)\Delta}^{[0]})$  и  $G_{(1,III)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(1,III)\Delta}^{[0]})$  для першого етапу цілком отримали представлення у вигляді розкладів (3.115) і (3.116). Тепер відповідно до (3.117) і (3.124) можна знайти

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{(1,III)0} &= \bar{\delta}_{(1,III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1,III)})\chi_{(1,III)0}, \quad \bar{\chi}_{(1,III)1} = -K_4^{[0]}(1 + \tilde{\delta}_{(1,III)}) \times \\ &\times \chi_{(1,III)1} / |3l\hat{\varepsilon}_{bt}|, \quad \tilde{\chi}_{(1,III)2} = (K_4^{[0]})^2(1 + \tilde{\delta}_{(1,III)})\chi_{(1,III)2} / (3l\hat{\varepsilon}_{bt})^2, \\ \bar{\Psi}_{(1,III)0} &= \bar{\delta}_{(1,III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1,III)})\Psi_{(1,III)0}, \quad \bar{\Psi}_{(1,III)1} = -K_4^{[0]}(1 + \bar{\delta}_{(1,III)}) \times \\ &\times \Psi_{(1,III)1} / |3l\hat{\varepsilon}_{bt}|, \quad \bar{\Psi}_{(1,III)2} = (K_4^{[0]})^2(1 + \bar{\delta}_{(1,III)})\Psi_{(1,III)2} / (3l\hat{\varepsilon}_{bt})^2. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Відповідно до формул (3.105) і (3.107) для знаходження  $\phi_{(1)1}^{[1]}(\zeta)$  необхідно побудувати функції  $M_{(1)3}^{\otimes}(\zeta)$  и  $[M_{(1)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta)$ . Для цього слід попередньо визначити функції  $\tilde{E}_{(1,z)1}^{[1]}(\zeta)$  ( $z=I,II,III$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]}(\zeta) &= \sum_{n=0}^2 \beta_{(j)\Delta}^n [K_4^{[0]} K^{[0]} \tilde{X}_{(j,z)n}(\zeta) + \\ &+ \frac{2}{3} (3 + K_4^{[0]}) G^{[0]} \tilde{\Psi}_{(j,z)n}(\zeta)] [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^n, \end{aligned} \quad (3.132)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{(j,z)k}(\zeta) &= \int_{z(\zeta)} \bar{\chi}_{(j,z)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^2 x_2 dx_2, \\ \tilde{\Psi}_{(j,z)k}(\zeta) &= \int_{z(\zeta)} \bar{\Psi}_{(j,z)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^2 x_2 dx_2. \end{aligned} \quad (3.132a)$$

Оскільки  $\bar{\chi}_{(j,z)k}$  і  $\bar{\Psi}_{(j,z)k}$  для першого етапу не залежать від  $\zeta$  і  $x_2$ , то

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{(1,z)n}(\zeta) &= \bar{\chi}_{(j,z)k} V_{(1,z)n}(\zeta), \quad \tilde{\Psi}_{(1,z)n}(\zeta) = \bar{\Psi}_{(j,z)k} V_{(1,z)n}(\zeta), \\ V_{(1,z)n}(\zeta) &= \int_{z(\zeta)} (x_2 - D)^n x_2 dx_2 \quad (n = 0,1,2) \end{aligned}$$

( $z(\zeta)$  – відрізок, що утворюється в результаті перетину прямої, паралельної осі  $x_2$ , з зоною I, рис.3.2). Тоді (Б.66) запишеться так

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]}(\zeta) &= \sum_{n=0}^2 E_{(j,z)1n}^{[1]} \beta_{(j)\Delta}^n V_{(1,z)n}(\zeta) [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^n, \\ E_{(j,z)1n}^{[1]} &= K_4^{[0]} K^{[0]} \bar{\chi}_{(j,z)n} + \frac{2}{3} (3 + K_4^{[0]}) G^{[0]} \bar{\psi}_{(j,z)n}\end{aligned}\quad (3.133)$$

Для функцій  $V_{(1,z)n}(\zeta)$  ( $n = 0,1,2$ ) неважко отримати аналітичні вирази:

$$\begin{aligned}V_{(1,I)0}(\zeta) &= \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - D^2 \right), \quad V_{(1,I)1}(\zeta) = -D(h^2/4 - D^2)/4 + (h^3/8 - D^3)/3, \\ V_{(1,I)2}(\zeta) &= D^2(h^2/4 - D^2)/2 - 2D(h^3/8 - D^3)/3 + (h^4/16 - D^4)/4.\end{aligned}$$

Зона II має різні межі на ділянках  $a$  і  $b$ . Тому на цих ділянках  $V_{(1,II)n}(\zeta)$  и має різні аналітичні вирази:

$$\begin{aligned}V_{(1,II)0a}(\zeta) &= \frac{1}{2} [D^2 - x_{2N}(\zeta)^2], \quad V_{(1,II)1a}(\zeta) = -D\{D^2 - [x_{2N}(\zeta)]^2\}/4 + \\ &+ [D^3 - [x_{2N}(\zeta)]^3]/3, \quad V_{(1,II)2a}(\zeta) = D^2\{D^2 - [x_{2N}(\zeta)]^2\}/2 - 2D\{D^3 - \\ &- [x_{2N}(\zeta)]^3\}/3 + \{D^4 - [x_{2N}(\zeta)]^4\}/4, \quad V_{(1,II)0b}(\zeta) = [D^2 - h^2/4]/2, \\ V_{(1,II)1b}(\zeta) &= -D(D^2 - h^2/4)/4 + (D^3 + h^3/8)/3, \quad V_{(1,II)2b}(\zeta) = \\ &= D^2(D^2 - h^2/4)/2 - 2D(D^3 + h^3/8)/3 + (D^4 - h^4/16)/4.\end{aligned}$$

Зона III є тільки на ділянці  $a$ . Тоді

$$\begin{aligned}V_{(1,III)0}(\zeta) &= \{[x_{2N}(\zeta)]^2 - h^2/4\}/2, \\ V_{(1,III)1}(\zeta) &= -D\{[x_{2N}(\zeta)]^2 - h^2/4\}/4 + \{[x_{2N}(\zeta)]^3 + h^3/8\}/3, \\ V_{(1,III)2}(\zeta) &= D^2\{[x_{2N}(\zeta)]^2 - h^2/4\}/2 - 2D\{[x_{2N}(\zeta)]^3 + h^3/8\}/3 + \\ &+ \{[x_{2N}(\zeta)]^4 - h^4/16\}/4.\end{aligned}$$

Таким чином, функції  $V_{(1,II)n}(\zeta)$  ( $n = 0,1,2$ ), а, отже, і  $\tilde{E}_{(1,II)1}^{[1]}(\zeta)$  мають різні аналітичні вирази на ділянках  $a$  і  $b$ . Будемо позначати їх відповідно так:

$V_{(1,II)n,a}(\zeta)$ ,  $\tilde{E}_{(1,II)1a}^{[1]}(\zeta)$  и  $V_{(1,II)n,b}(\zeta)$ ,  $\tilde{E}_{(1,II)1b}^{[1]}(\zeta)$ . Аналогічно визначаються функції  $\tilde{E}_{(1,z)1}^{[1]}(\zeta)$  ( $z=I,II,III$ ):

$$\tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]}(\zeta) = \sum_{n=0}^2 E_{(j,z)1n}^{[1]} \beta_{(j)\Delta}^n W_{(1,z)n}(\zeta) [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^n, \quad (3.134)$$

$$W_{(1,z)n}(\zeta) = \int_{z(\zeta)} (x_2 - D)^n x_2^2 dx_2 \quad (n = 0,1,2) \quad (3.135)$$

Неважко отримати аналітичні вирази і для функцій  $W_{(1,z)n}(\zeta)$  ( $n=0,1,2$ ;  $z=I,II,III$ ). Так само як і  $V_{(1,z)n}(\zeta)$  вони представляють собою поліноми змінної  $x_{2N}(\zeta)$ . При цьому  $W_{(1,II)n}(\zeta)$ , а, отже, і  $\tilde{E}_{(1,II)1}^{[1]}(\zeta)$  мають різні аналітичні вирази на ділянках  $a$  і  $b$ . Вони будуть позначатися так:  $W_{(1,II)n,a}(\zeta)$ ,  $\tilde{E}_{(1,II)1a}^{[1]}(\zeta)$  і  $W_{(1,II)n,b}(\zeta)$ ,  $\tilde{E}_{(1,II)1b}^{[1]}(\zeta)$ . Таким чином,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{(1,II)1}^{[1]}(\zeta) &= \tilde{E}_{(1,II)1a}^{[1]}(\zeta), \tilde{E}_{(1,II)1}^{[1]}(\zeta) = \tilde{E}_{(1,II)1a}^{[1]}(\zeta) \quad (\zeta \leq \zeta_N), \\ \tilde{E}_{(1,II)1}^{[1]}(\zeta) &= \tilde{E}_{(1,II)1b}^{[1]}(\zeta), \tilde{E}_{(1,II)1}^{[1]}(\zeta) = \tilde{E}_{(1,II)1b}^{[1]}(\zeta) \quad (\zeta > \zeta_N). \end{aligned} \quad (3.136)$$

Як уже було відзначено вище, функції  $V_{(1,z)n}(\zeta)$  і  $W_{(1,z)n}(\zeta)$  являються поліномами змінної  $x_{2N}(\zeta)$ , а отже,  $\tilde{E}_{(1,z)1}^{[1]}(\zeta)$  і  $\tilde{E}_{(1,z)1}^{[1]}(\zeta)$  з'являються поліномами двох змінних  $x_{2N}(\zeta)$  і  $\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)$ :

$$\begin{aligned} V_{(1,z)n}(\zeta) &= \sum_{k=0}^4 V_{(1,z)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k, \quad W_{(1,z)n}(\zeta) = \sum_{k=0}^5 W_{(1,z)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k, \\ \tilde{E}_{(1,z)1}^{[1]}(\zeta) &= \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n E_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,z)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n, \\ \tilde{E}_{(1,z)1}^{[1]}(\zeta) &= \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n E_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^5 W_{(1,z)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$(V_{(1,I)0,0} = (h^2/4 - D^2)/2, \quad V_{(1,I)1,0} = -D(h^2/4 - D^2)/4 + (h^3/8 - D^3)/3,$$

$$V_{(1,I)2,0} = D^2(h^2/4 - D^2)/2 - 2D(h^3/8 - D^3)/3 + (h^4/16 - D^4)/4,$$

$$V_{(1,I)k,n} = 0 \quad (k = 0,1,2; \quad n > 0), \quad V_{(1,II)0a,0} = D^2/2, \quad V_{(1,II)0a,1} = 0, \quad V_{(1,II)0a,2} = -1/2,$$

$$V_{(1,II)0a,n} = 0 \quad (n > 2), \quad V_{(1,II)1a,0} = D^3/12, \quad V_{(1,II)1a,1} = 0, \quad V_{(1,II)1a,2} = D/4,$$

$$V_{(1,II)1a,3} = -1/3, \quad V_{(1,II)1a,4} = 0, \quad V_{(1,II)2a,0} = D^4/12, \quad V_{(1,II)2a,2} = -D^2/2,$$

$$V_{(1,II)2a,3} = 2D/3, \quad V_{(1,II)2a,4} = -1/4 \quad \text{і т.д.).} \quad \text{Зауважимо, що } V_{(1,III)0b,k} = 0$$

( $k=0, 1,2$ ). З (3.137) випливає, що функція  $M_{(1)3}^{\otimes}(\zeta)$ , яка визначається

формулою (3.101), є поліномом двох змінних  $x_{2N}(\zeta)$  і  $\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)$ :

$$\begin{aligned}
M_{(1)3}^{\otimes}(\zeta) &= -\delta\beta_{(1)}\bar{M}_{(1)3}^{\otimes}(\zeta), \\
\bar{M}_{(1)3}^{\otimes}(\zeta) &= \sum_{n=1}^3 [(J_1 + J_2)D_{(1,u)n} + (J_1 - J_2)D_{(1,d)n}] [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^{n+1} - \\
&- b \sum_{z=I}^{N_z} \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n \tilde{E}_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 W_{(1,z)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^{n+1} + \\
&+ \delta_0 b \sum_{z=I}^{N_z} \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n \tilde{E}_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,z)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^{n+1} + \\
&+ J_3 \sum_{n=1}^3 (\bar{D}_{(1,u)n} - \bar{D}_{(1,d)n}) [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n + \delta_0^2 l H_l \bar{\theta}^{[0]}(\zeta).
\end{aligned} \tag{3.138}$$

і теж має різні аналітичні вирази на ділянках  $a$  і  $b$ , оскільки коефіцієнти  $V_{(1,z)nk}$  и  $W_{(1,z)nk}$  ( $z = \text{II}, \text{III}$ ) приймають різні значення на цих ділянках. Тоді

$[M_{(1)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) = -\beta_{(1)\Delta} [\bar{M}_{(1)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta)$ , причому на ділянці  $a$  (тобто при  $\zeta \leq \zeta_N$ ):

$$\begin{aligned}
[\bar{M}_{(1)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) &= \sum_{n=1}^3 [(J_1 + J_2)D_{(1,u)n} + (J_1 - J_2)D_{(1,d)n}] [(\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{\#}(\zeta) - \\
&- b \sum_{z=I}^{\text{III}} \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n \tilde{E}_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 W_{(1,z)n,a,k} [(x_{2N})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{\#}(\zeta) + \\
&+ \delta_0 b \sum_{z=I}^{\text{III}} \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n \tilde{E}_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,z)n,a,k} [(x_{2N})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{\#}(\zeta) + \\
&+ J_3 \sum_{n=1}^3 (\bar{D}_{(1,u)n} - \bar{D}_{(1,d)n}) [(\bar{\theta}^{[0]})^n]^{\#}(\zeta) + \delta_0^2 l H_l [(\bar{\theta}^{[0]})^n]^{\#}(\zeta).
\end{aligned} \tag{3.139}$$

На ділянці  $b$  (тобто при  $\zeta > \zeta_N$ ):

$$\begin{aligned}
[\bar{M}_{(1)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) &= [\bar{M}_{(1)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta_N) + \sum_{n=1}^3 [(J_1 + J_2)D_{(1,u)n} + \\
&+ (J_1 - J_2)D_{(1,d)n}] [(\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]_b^{\#}(\zeta) - \\
&- b \sum_{z=I}^{\text{III}} \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n \tilde{E}_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 W_{(1,z)n,b,k} [(x_{2N})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]_b^{\#}(\zeta) + \\
&+ \delta_0 b \sum_{z=I}^{\text{III}} \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n \tilde{E}_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,z)n,b,k} [(x_{2N})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]_b^{\#}(\zeta) + \\
&+ J_3 \sum_{n=1}^3 (\bar{D}_{(1,u)n} - \bar{D}_{(1,d)n}) [(\bar{\theta}^{[0]})^n]_b^{\#}(\zeta) + \delta_0^2 l H_l [(\bar{\theta}^{[0]})^n]_b^{\#}(\zeta).
\end{aligned} \tag{3.140}$$

Тут  $[f]_b^{\#}(\zeta) = \int_{\zeta_N}^{\zeta} f(\tau) d\tau$ . Зауважимо, що коефіцієнти  $D_{(1,u)n}$  і  $D_{(1,d)n}$ , які визна-

чаються за формулами (3.124), не залежать від  $\zeta$ .

Формули (3.139) і (3.140) відповідно до (3.192) дозволяють визначити  $\phi_{(1)}^{[1]}(\zeta)$ , а отже, і  $\phi_{(1)}(\zeta) = \phi^{[0]}(\zeta) + \phi_{(1)}^{[1]}(\zeta)$ . Для знаходження прогинів на першому етапі використовуємо співвідношення

$$v_{(1)}(\zeta) = l[\phi_{(1)}]^\#(\zeta). \quad (3.141)$$

Звідси і з (3.105) отримуємо

$$v_{(1)}(\zeta) = \beta_{(1)\Delta} l \{ [\bar{\phi}^{[0]}]^\#(\zeta) + \frac{l}{H} [\bar{M}_{(1)3}^\otimes]^\#\#(\zeta) - \frac{l}{H} \bar{M}_{(1)3}^\otimes(1) \frac{\zeta^2}{2} \}. \quad (3.142)$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} [\bar{M}_{(1)3}^\otimes]^\#\#(\zeta) &= \sum_{n=1}^3 [(J_1 + J_2)D_{(1,u)n} + (J_1 - J_2)D_{(1,d)n}] [(\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^\#\#(\zeta) - \\ &- b \sum_{z=1}^{\text{III}} \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n \tilde{E}_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 W_{(1,z)n,a,k} [(x_{2N})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^\#\#(\zeta) + \\ &+ \delta_0 b \sum_{z=1}^{\text{III}} \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n \tilde{E}_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,z)n,a,k} [(x_{2N})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^\#\#(\zeta) + \\ &+ J_3 \sum_{n=1}^3 (\bar{D}_{(1,u)n} - \bar{D}_{(1,d)n}) [(\bar{\theta}^{[0]})^n]^\#\#(\zeta) + \delta_0^2 l H_l [\bar{\theta}^{[0]}]^\#\#(\zeta) \end{aligned} \quad (3.143)$$

при  $\zeta \leq \zeta_N$  і

$$\begin{aligned} [\bar{M}_{(1)3}^\otimes]^\#\#(\zeta) &= [\bar{M}_{(1)3}^\otimes]^\#\#(\zeta_N) + [\bar{M}_{(1)3}^\otimes]^\#(\zeta_N)(\zeta - \zeta_N) + \\ &+ \sum_{n=1}^3 [(J_1 + J_2)D_{(1,u)n} + (J_1 - J_2)D_{(1,d)n}] [(\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^\#\#(\zeta) - \\ &- b \sum_{z=1}^{\text{II}} \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n \tilde{E}_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 W_{(1,z)n,b,k} [(x_{2N})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^\#\#(\zeta) + \\ &+ \delta_0 b \sum_{z=1}^{\text{II}} \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)\Delta}^n \tilde{E}_{(1,z)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,z)n,b,k} [(x_{2N})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^\#\#(\zeta) + \\ &+ J_3 \sum_{n=1}^3 (\bar{D}_{(1,u)n} - \bar{D}_{(1,d)n}) [(\bar{\theta}^{[0]})^n]^\#\#(\zeta) + \delta_0^2 l H_l [\bar{\theta}^{[0]}]^\#\#(\zeta) \end{aligned} \quad (3.144)$$

при  $\zeta > \zeta_N$ . Таким чином, визначення прогинів  $v_{(1)}(\zeta)$  зводиться до обчислення інтегралів

$$[(\bar{\theta}^{[0]})^n]^\#(\zeta), [(x_{2N})^k (\bar{\theta}^{[0]})^n]^\#(\zeta), [(\bar{\theta}^{[0]})^n]^\#(\zeta), [(x_{2N})^k (\bar{\theta}^{[0]})^n]^\#(\zeta).$$

Їх можна визначати чисельно, можна отримати для них аналітичні вирази, використовуючи MathCAD або Matlab, можливо також використовувати розкладання подинтегральних функцій в степеневі ряди.

**Зауваження.** Для скорочення обсягу обчислень функцію  $v_{(1)3}(\beta)$  можна апроксимувати поліномом, наприклад, третього ступеня:  $\tilde{v}_{(1)3}(\beta) = A\beta + B\beta^2 + C\beta^3$ , визначаючи коефіцієнти  $A$ ,  $B$  і  $C$  з рівності  $\tilde{v}_{(1)3}(\beta_k) = v_{(1)3}(\beta_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ), де  $\beta_k \in (0, \beta_{(1)}^*)$  ( $\beta_{(1)}^*$  – значення  $\beta$  в кінці першого етапу).

Переходимо тепер до вивчення згину балки на другому етапі циклічного завантаження, коли сила  $F_2$  убуває від значення  $F_2^*$  до нуля. Це означає, що параметр  $\beta$  змінюється від  $\beta_{(2)}^* = F_2^* l^2 / H$  до  $\beta_{(2)}^{**} = 0$ .

Нехай коефіцієнти  $A_{(2,z)}$ ,  $\tilde{\delta}_{(2,z)}$  і функція  $f_{(2,z)}(\Delta\eta)$  для деякої зони  $z \in$  ще і функціями деякого параметра  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ). Тоді функціями цього параметра виявляться і  $\bar{\chi}_{(2,z)k}$  ( $k = 0, 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{(2,z)0}(p) &= \tilde{\delta}_{(2,z)}(p) + [1 + \tilde{\delta}_{(2,z)}(p)]\chi_{(2,z)0}(p), \\ \bar{\chi}_{(2,z)1}(p) &= -K_4^{[0]}[1 + \tilde{\delta}_{(2,z)}(p)]\chi_{(2,z)1}(p)/(3l\hat{\epsilon}_m), \\ \bar{\chi}_{(2,z)2}(p) &= (K_4^{[0]})^2[1 + \tilde{\delta}_{(2,z)}(p)]\chi_{(2,z)2}(p)/(3l\hat{\epsilon}_m)^2, \\ \chi_{(2,z)0}(p) &= 1/f_{(2,z)}(p, 0) - 1, \chi_{(2,z)1}(p) = [(F_{(2,z)1}(p) - \\ &- \chi_{(2,z)0}(p))\zeta_{\Delta 2}^2(p) - (F_{(2,z)2}(p) - \chi_{(2,z)0}(p))\zeta_{\Delta 1}^2(p)]/\Delta_0, \\ \chi_{(2,z)2}(p) &= [(F_{(2,z)2}(p) - \chi_{(2,z)0}(p))\zeta_{\Delta 1}(p) - (F_{(2,z)1}(p) - \\ &- \chi_{(2,z)0}(p))\zeta_{\Delta 2}(p)]/\Delta_0, \end{aligned} \quad (3.145)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_0(p) &= \zeta_{(2,z)\Delta 1}(p) \zeta_{(2,z)\Delta 2}(p)[\zeta_{(2,z)\Delta 2}(p) - \zeta_{(2,z)\Delta 1}(p)], \quad F_{(2,z)k}(p) = \\ &= f_{(2,z)}(p, \eta_{\Delta k})^{-1} - 1, \quad \zeta_{(2,z)\Delta k}(p) = A_{(2,z)}(p)f_{(2,z)}(p, \eta_{\Delta k}) \quad (k = 1, 2). \end{aligned}$$

Апроксимуємо функції  $\bar{\chi}_{(2,z)k}(p)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) на відрізку  $[0, 1]$  таким чином:

$$\bar{\chi}_{(2,z)k}(p) = \sum_{m=0}^n \chi_{(2,z)km} p^m \quad (3.146)$$

Коефіцієнти  $\chi_{(2,z)km}$  визначаємо з умов

$$\sum_{m=0}^n \chi_{(2,z)km} p_i^m = \bar{\chi}_{(2,z)k}(p_i) \quad (i=0,1,\dots,n), \quad (3.147)$$

де  $p_i \in [0,1]$ , а  $\bar{\chi}_{(2,z)k}(p_i) \quad (i=0,1,\dots,n)$  визначаються з (3.119).

Визначник системи (3.147)

$$\Delta = | p_i^m |_{i,m=0}^n \quad (3.148)$$

є визначником Вандермонда. Він обчислюється за формулою

$$\Delta = \prod_{i>m} (p_i - p_m). \quad (3.149)$$

Відповідно до правила Крамера

$$\chi_{(2,z)km} = \Delta_{(2,z)}^{(k,m)} / \Delta, \quad (3.150)$$

де  $\Delta_{(2,z)}^{(k,m)}$  – визначник, отриманий з  $\Delta$  заміною  $m$ -го стовпця на стовпець правих частин системи (3.148). Неважко переконатися, що

$$\Delta_{(2,z)}^{(k,m)} = \sum_{i=0}^n \chi_{(2,z)k}(p_i) D_{im}, \quad (3.151)$$

( $D_{im}$  – алгебраїчне доповнення елемента  $\Delta_{im}$  визначника  $\Delta$ ). З (3.151) отримуємо

$$\chi_{(2,z)km} = \sum_{i=0}^n \bar{\chi}_{(2,z)k}(p_i) D_{im} / \Delta, \quad (3.152)$$

Використовуючи формулу (3.74) і нехтуючи складовими, що містять  $\beta_2$ , знаходимо, що

$$\sigma_{11}^{[0]}(\zeta, x_2) = E_1^{[0]} [\alpha^* \delta_l + \beta(\delta_0 - x_2/l) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]. \quad (3.153)$$

Тоді рівень поздовжніх нормальних напружень визначається так

$$\begin{aligned} \eta(\zeta, x_2) &= \sigma_{11}^{[0]}(\zeta, x_2) / \hat{\sigma}_m = \eta_0 + (\eta_1 + \eta_2 x_2) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta), \\ \eta_0 &= \alpha^* E_1^{[0]} \delta_l / \hat{\sigma}_m, \quad \eta_1 = \beta E_1^{[0]} \delta_0 / \hat{\sigma}_m, \quad \eta_2 = -\beta E_1^{[0]} / (l \hat{\sigma}_m) \end{aligned} \quad (3.154)$$

( $m = b$  в стислій зоні і  $m = bt$  в розтягнутій). якщо параметр  $p = \eta(\zeta, x_2)$ , тобто також є функцією  $\zeta$  і  $x_2$ , то



$$\bar{\chi}_{(2,z)k}(p(\zeta, x_2)) = \sum_{m=0}^n \chi_{(2,z)km} \sum_{i=0}^m C_i^m (\eta_1 + \eta_2 x_2)^i [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^i \eta_0^{m-i} \quad (3.155)$$

( $C_i^m$  – біноміальні коефіцієнти). Запишемо (3.155) так:

$$\bar{\chi}_{(2,z)k}(\zeta, x_2) = \sum_{i=0}^m \bar{\chi}_{(2,z)ki} (\eta_1 + \eta_2 x_2)^i [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^i, \quad (3.156)$$

$$\text{де } \bar{\chi}_{(2,z)k}(\zeta, x_2) = \bar{\chi}_{(2,z)k}(p(\zeta, x_2)), \bar{\chi}_{(2,z)ki} = \sum_{m=0}^n C_i^m \chi_{(2,z)km} \eta_0^{m-i}.$$

Аналогічно, згідно з додатком Б маємо

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{(2,z)0}(p) &= \tilde{\delta}_{(2,z)}(p) + [1 + \tilde{\delta}_{(2,z)}(p)]\Psi_{(2,z)0}(p), \\ \bar{\Psi}_{(2,z)1}(p) &= -K_4^{[0]}[1 + \tilde{\delta}_{(2,z)}(p)]\Psi_{(2,z)1}(p)/(3l\hat{\epsilon}_m), \\ \bar{\Psi}_{(2,z)2}(p) &= (K_4^{[0]})^2[1 + \tilde{\delta}_{(2,z)}(p)]\Psi_{(2,z)2}(p)/(3l\hat{\epsilon}_m)^2, \\ \Psi_{(2,z)0}(p) &= 1/g_{(2,z)}(p,0) - 1, \Psi_{(2,z)1}(p) = [(G_{(2,z)1}(p) - \\ &- \Psi_{(2,z)0}(p))\Delta\rho_2^2(p) - (G_{(2,z)2}(p) - \Psi_{(2,z)0}(p))\Delta\rho_1^2(p)]/\Delta_0, \\ \Psi_{(2,z)2}(p) &= [(G_{(2,z)2}(p) - \Psi_{(2,z)0}(p))\Delta\rho_1(p) - (G_{(2,z)1}(p) - \\ &- \Psi_{(2,z)0}(p))\Delta\rho_2(p)]/\Delta_0, \end{aligned} \quad (3.157)$$

де

$$\Delta_0(p) = \Delta\rho_1(p)\Delta\rho_2(p)[\Delta\rho_2(p) - \Delta\rho_1(p)], G_{(2,z)k}(p) = g_{(2,z)}(p, \Delta\eta_k)^{-1} - 1,$$

$$\Delta\rho_{(2,z)k}(p) = B_{(2,z)}(p)g_{(2,z)}(p, \Delta\eta_k) \quad (k = 1, 2).$$

Апроксимуємо функції  $\bar{\Psi}_{(2,z)k}(p)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) на відрізку  $[0, 1]$  так:

$$\bar{\Psi}_{(2,z)k}(p) = \sum_{m=0}^n \Psi_{(2,z)km} p^m.$$

Коефіцієнти  $\Psi_{(2,z)km}$  визначаються з умов

$$\sum_{m=0}^n \Psi_{(2,z)km} p_i^m = \bar{\Psi}_{(2,z)k}(p_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (3.158)$$

( $\bar{\Psi}_{(2,z)k}(p_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) визначаються з (3.157)). Так само як і в (3.153)

маємо

$$\Psi_{(2,z)km} = \sum_{i=0}^n \Psi_{(2,z)k}(p_i) D_{im} / \Delta, \quad (3.159)$$

Далі аналогічно (3.157) матимемо

$$\bar{\Psi}_{(2,z)k}(\zeta, x_2) = \sum_{i=0}^m \bar{\Psi}_{(2,z)ki}(\eta_1 + \eta_2 x_2)^i [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^i. \quad (3.160)$$

Тут

$$\bar{\Psi}_{(2,z)k}(\zeta, x_2) = \bar{\Psi}_{(2,z)k}(p(\zeta, x_2)), \bar{\Psi}_{(2,z)ki} = \sum_{m=0}^n \binom{m}{i} \Psi_{(2,z)km} \eta_0^{m-i}.$$

Відповідно до (3.96)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{X}_{(2,z)k}(\zeta) \\ \tilde{\Psi}_{(2,z)k}(\zeta) \end{bmatrix} &= \int_{z(\zeta)} \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{(2,z)k}(\zeta, x_2) \\ \bar{\Psi}_{(2,z)k}(\zeta, x_2) \end{bmatrix} (x_2 - D)^k x_2 dx_2, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{X}}_{(2,z)k}(\zeta) \\ \tilde{\tilde{\Psi}}_{(2,z)k}(\zeta) \end{bmatrix} &= \int_{z(\zeta)} \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{(2,z)k}(\zeta, x_2) \\ \bar{\Psi}_{(2,z)k}(\zeta, x_2) \end{bmatrix} (x_2 - D)^k x_2^2 dx_2. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Звідси за допомогою (3.156) і (3.160) знаходимо

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{X}_{(2,z)k}(\zeta) \\ \tilde{\Psi}_{(2,z)k}(\zeta) \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^m \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{(2,z)ki} \\ \bar{\Psi}_{(2,z)ki} \end{bmatrix} U_{(2,z)ki} [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^i, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{X}}_{(2,z)k}(\zeta) \\ \tilde{\tilde{\Psi}}_{(2,z)k}(\zeta) \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^m \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{(2,z)ki} \\ \bar{\Psi}_{(2,z)ki} \end{bmatrix} W_{(2,z)ki} [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^i, \end{aligned} \quad (3.162)$$

$$\text{де } \begin{bmatrix} U_{(2,z)ki}(\zeta) \\ W_{(2,z)ki}(\zeta) \end{bmatrix} = \int_{z(\zeta)} (\eta_1 + \eta_2 x_2)^i (x_2 - D)^k \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} dx_2.$$

Тепер є можливість визначити величини  $\tilde{E}_{(2,z)1}^{[1]}(\zeta)$  і  $\tilde{\tilde{E}}_{(2,z)1}^{[1]}(\zeta)$  (див. (3.97) – (3.98))

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{E}_{(2,z)1}^{[1]}(\zeta) \\ \tilde{\tilde{E}}_{(2,z)1}^{[1]}(\zeta) \end{bmatrix} &= \sum_{k=0}^2 (\beta - \beta_{(2)}^*)^k [K_4^{[0]} K^{[0]}] \begin{bmatrix} \tilde{X}_{(2,z)k}(\zeta) \\ \tilde{\tilde{X}}_{(2,z)k}(\zeta) \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{2}{3} (3 + K_4^{[0]}) G^{[0]} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{(2,z)k}(\zeta) \\ \tilde{\tilde{\Psi}}_{(2,z)k}(\zeta) \end{bmatrix} \Pi [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^k, \end{aligned} \quad (3.163)$$

У зоні I (рис. 3.3) на другому етапі згину стискаючі напруження починають зменшуватися, тобто там спостерігається процес розвантаження. У

класифікації додатка Б цей процес відноситься до етапів поздовжнього розтягу-стиску другого типу.

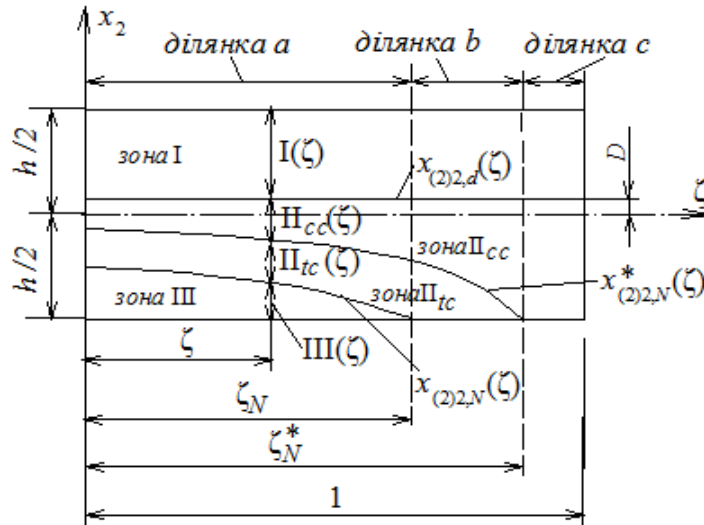


Рис. 3.3 Схема розподілу зон навантаження і розвантаження на другому етапі навантаження

Відповідно до формул додатка Б маємо

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{(2,1)} &= 0, E_{(2,1)}^{[0]} = E^{[0]}, \hat{V}_{(2,1)} = 0,7 + 0,3V_b(\eta_{(2,1)}^*), V_{(2,1)0} = V_b(\eta_{(2,1)}^*)^{-1}, \\ \omega_{(2,1)1} &= (2 - 2,5\hat{V}_{(2,1)})/\eta_{(2,1)}^*, \omega_{(2,1)2} = -(1 - 2,5\hat{V}_{(2,1)})/(\eta_{(2,1)}^*)^2. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Тут  $\eta_{(2,1)}^*$  – рівень нормальних напружень на поперечних перерізах в зоні I на початку етапу (надалі для стислості будемо називати їх поздовжніми). Звідси випливає, що коефіцієнт зміни січного модуля пружності  $V_{(2,1)}(\Delta\eta)$ , коефіцієнт Пуассона  $v_{(2,1)}(\Delta\eta)$  и функція  $f_{(2,1)}(\Delta\eta)$  виявляються ще й функціями  $\eta_{(2,1)}^*$ :

$$\begin{aligned} V_{(2,1)}(\eta_{(2,1)}^*, \Delta\eta) &= \hat{V}_{(2,1)}(\eta_{(2,1)}^*) + [V_{(2,1)0}(\eta_{(2,1)}^*) - \hat{V}_{(2,1)}(\eta_{(2,1)}^*)] \times \\ &\times \sqrt{1 - \omega_{(2,1)1}(\eta_{(2,1)}^*)|\Delta\eta| - \omega_{(2,1)2}(\eta_{(2,1)}^*)(\Delta\eta)^2}, \\ v_{(2,1)}(\eta_{(2,1)}^*, \Delta\eta) &= v_b(\eta_{(2,1)}^* + \Delta\eta), f_{(2,1)}(\eta_{(2,1)}^*, \Delta\eta) = \\ &= [1 - 2v_{(2,1)}(\eta_{(2,1)}^*, \Delta\eta)]/[1 - 2v_0]V_{(2,1)}(\eta_{(2,1)}^*, \Delta\eta). \end{aligned} \quad (3.165)$$

Таким чином, в якості параметра  $p$  для зони I виступає  $\eta_{(2,1)}^*$ . Тому в формулах (3.154) слід покласти

$$\eta_0 = \alpha^* E_1^{[0]} \delta_l / \hat{\sigma}_b, \eta_1 = \beta_{(2)}^* E_1^{[0]} \delta_0 / \hat{\sigma}_b, \eta_2 = -\beta_{(2)}^* E_1^{[0]} / (l \hat{\sigma}_b). \quad (3.166)$$

Зауважимо також, що рівень поздовжніх нормальних напружень в кінці другого етапу в точках зони I дорівнює рівню таких напружень на початку першого:

$$\eta_{(2,1)}^{**} = \eta_{(1)}^* = E_1^{[0]} \alpha^* \delta_l \quad (3.167)$$

(відмітимо, що  $\eta_{(1)}^*$  не залежить від координат точок, а є деякою константою для всіх точок балки).

Прийmemo

$$\eta_{\Delta 1} = \eta_{(2,1)}^{**} - \eta_{(2,1)}^*, \eta_{\Delta 2} = \eta_{\Delta 1} / 2. \quad (3.168)$$

Використовуючи тепер формули (Б.67) – (Б.84) при  $z = I$ , визначаємо  $\tilde{X}_{(2,1)k}$ ,  $\tilde{\Psi}_{(2,1)k}$ ,  $\tilde{X}_{(2,1)k}$ ,  $\tilde{\Psi}_{(2,1)k}$  ( $k = 0, 1, 2$ ). При цьому

$$\begin{bmatrix} U_{(2,1)ki} \\ W_{(2,1)ki} \end{bmatrix} = \int_D^{h/2} (\eta_1 + \eta_2 x_2)^i (x_2 - D)^k \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} dx_2, \quad (3.169)$$

тобто  $V_{(2,1)il}$  і  $W_{(2,1)ki}$  не залежать від  $\zeta$ . З (3.163) знаходимо  $\tilde{E}_{(2,1)1}^{[1]}(\zeta)$  і  $\tilde{E}_{(2,1)1}^{[1]}(\zeta)$ .

Зона II на другому етапі згину розпадається на дві зони:  $\Pi_{cc}$  і  $\Pi_{tc}$  (рис. 3.3). Зона  $\Pi_{cc}$  поширюється від лінії  $x_2 = x_{(2)2,n}^*(\zeta)$ , відповідної положенню нейтральної лінії при  $\beta = \beta_{(2)}^*$  (тобто на початку етапу), до лінії  $x_2 = D$ . У ній відбувається процес навантаження при стиску після процесу розвантаження при стиску на попередньому етапі. Цей процес відноситься до етапів третього типу в класифікації додатку Б.

Відповідно до (3.50) [78] величина  $\phi_v$ , що визначає корегувальні функції  $\tilde{\gamma}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (см. (3.48) [78]), для зони  $\Pi_{cc}$  (тобто при неповному розвантаження) обчислюється за формулою

$$\phi_v(\eta_{(2,\Pi_{cc})}^*) = \frac{V_b(\eta_{(2,\Pi_{cc})}^*) - V_b(\eta_{(1)}^*)}{1 - \hat{V}_b}. \quad (3.170)$$

Тут для стислості опущений аргумент функції  $\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*(\zeta, x_2)$ , а через  $\eta_{(1)}^*$  позначено значення  $\eta$  на початку першого етапу. Нагадаємо, що  $\eta_{(1)}^*$  не залежить від координат  $\zeta$  і  $x_2$ . Тоді з (3.146) і формули (3.47) [78] будемо мати

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_i(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) &= 1 + \beta_{1i} \phi_v(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) + \beta_{2i} [\phi_v(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*)]^2 + \beta_{3i} [\phi_v(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*)]^3, \\ E_{(2, \Pi_{cc})}^{[0]}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) &= \tilde{\gamma}_3(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) E^{[0]}, \hat{\sigma}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) = \tilde{\gamma}_1(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) \hat{\sigma}_b, \\ \hat{\varepsilon}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) &= \tilde{\gamma}_2(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) \hat{\sigma}_b, \hat{V}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) = \hat{\sigma}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) / \\ &/ [E_{(2, \Pi_{cc})}^{[0]}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) \hat{\varepsilon}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*)], \omega_{(2, \Pi_{cc})1}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) = [2 - 2,5 \times \\ &\times \hat{V}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) + (36V_b(\eta_{(1)}^*) - 28) \sqrt{|\hat{V}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) - \hat{V}_b|}] / \tilde{\gamma}_1(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*), \\ \omega_{(2, \Pi_{cc})2}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) &= [-1 + 2,5 \hat{V}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) - (36V_b(\eta_{(1)}^*) - 28) \times \\ &\times \sqrt{|\hat{V}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) - \hat{V}_b|}] / [\tilde{\gamma}_1(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*)]^2, \tilde{\delta}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) = \tilde{\gamma}_3(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) - 1 \end{aligned} \quad (3.171)$$

(коєфіцієнти  $\beta_{k,I}$  ( $k, I = 1, 2, 3$ ) визначаються за допомогою таблиці 3.1 [78]).

З формул (Б.50) і (Б.65) знаходимо

$$\begin{aligned} A_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) &= \frac{\hat{\sigma}_b(1 - 2v_0)}{3E_{(2, \Pi_{cc})}^{[0]}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) \hat{\varepsilon}_b}, V_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*, \eta_\Delta) = \hat{V}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) + \\ &+ (1 - \hat{V}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*)) [1 - \omega_{(2, \Pi_{cc})1}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) |\eta_{(2, \Pi_{cc})}^* + \eta_\Delta| - \\ &- \omega_{(2, \Pi_{cc})2}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*) (\eta_{(2, \Pi_{cc})}^* + \eta_\Delta)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.172)$$

З (Б.63) отримуємо

$$f_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*, \eta_\Delta) = \frac{1 - 2v_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*, \eta_\Delta)}{(1 - 2v_0) V_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*, \eta_\Delta)}, \quad (3.173)$$

де  $v_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*, \eta_\Delta) = v_b(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^* + \eta_\Delta)$ . Таким чином, аналогічно до випадку з зоною I коєфіцієнти  $A_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*)$ ,  $\tilde{\delta}_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*)$  і функція  $f_{(2, \Pi_{cc})}(\eta_\Delta)$  виявляються ще й функціями  $\eta_{(2, \Pi_{cc})}^*$ .

Зауважимо, що співвідношення (3.165) має місце і для точок зони Псс:

$$\eta_{(2, \Pi_{cc})}^{**} = \eta_{(1)}^*. \quad (3.174)$$

Як і для зони I приймемо

$$\eta_{\Delta 1} = \eta_{(2, \Pi_{cc})}^{**} - \eta_{(2, \Pi_{cc})}^*, \eta_{\Delta 2} = \eta_{\Delta 1} / 2. \quad (3.175)$$

Проводячи обчислення за формулами (3.145) – (3.162), в яких прийнято  $z = \Pi_{cc}$  і  $p = \eta_{(2,\Pi_{cc})}^*$ , а  $\eta_k$  ( $k = 0,1,2$ ) визначаються за формулами (3.165), знаходимо, що  $\tilde{X}_{(2,\Pi_{cc})k}(\zeta), \tilde{\Psi}_{(2,\Pi_{cc})k}(\zeta), \tilde{\tilde{X}}_{(2,\Pi_{cc})k}(\zeta), \tilde{\tilde{\Psi}}_{(2,\Pi_{cc})k}(\zeta)$ . ( $k = 0,1,2$ ) з формул (3.161) і (3.162), в яких

$$\begin{bmatrix} U_{(2,\Pi_{cc})ki}(\zeta) \\ W_{(2,\Pi_{cc})ki}(\zeta) \end{bmatrix} = \int_{\Pi_{cc}(\zeta)} (\eta_1 + \eta_2 x_2)^i (x_2 - D)^k \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} dx_2,$$

Тут  $\Pi_{cc}(\zeta)$  – відрізок, що утворюється в результаті перетину прямої  $\zeta = \zeta'$  із зоною  $\Pi_{cc}$  (рис. 3.3). Нагадаємо, що відрізок балки  $0 \leq \zeta < \zeta_N$  носить назву ділянки  $a$ . Розіб'ємо відрізок балки  $\zeta_N \leq \zeta < 1$  на дві ділянки – ділянку  $b$ :  $\zeta_N \leq \zeta < \zeta_N^*$  і ділянку  $c$ :  $\zeta_N^* \leq \zeta < 1$  (рис. 3.3). На ділянках  $a$  і  $b$  нижньою і верхньою межами зони  $\Pi_{cc}$  є відповідно лінії  $x_2 = x_{(2)2,N}^*(\zeta)$  і  $x_2 = D$ , а на ділянці з межами зони  $\Pi_{cc}$  є лінії  $x_2 = -h/2$  і  $x_2 = D$ . Тому на цих ділянках  $V_{(2,\Pi_{cc})kl}(\zeta)$  і  $W_{(2,\Pi_{cc})kl}(\zeta)$  мають різні аналітичні вирази. На ділянках  $a$  і  $b$ :

$$\begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}_{(2,\Pi_{cc})ki,a,b}(\zeta) = \int_{x_{(2)2,N}^*(\zeta)}^D (\eta_1 + \eta_2 x_2)^i (x_2 - D)^k \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} dx_2, \quad (3.176)$$

а на ділянці  $c$ :

$$\begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}_{(2,\Pi_{cc})ki,c} = \int_{-h/2}^D (\eta_1 + \eta_2 x_2)^i (x_2 - D)^k \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} dx_2, \quad (3.177)$$

Тому величини  $\tilde{X}_{(2,\Pi_{cc})k}(\zeta), \tilde{\Psi}_{(2,\Pi_{cc})k}(\zeta), \tilde{\tilde{X}}_{(2,\Pi_{cc})k}(\zeta), \tilde{\tilde{\Psi}}_{(2,\Pi_{cc})k}(\zeta)$ , а отже, і  $\tilde{E}_{(2,\Pi_{cc})1}^{[1]}(\zeta)$  і  $\tilde{\tilde{E}}_{(2,\Pi_{cc})1}^{[1]}(\zeta)$  по-різному визначаються на ділянках  $a$ ,  $b$  і  $c$ .

Позначимо їх відповідно через  $\tilde{X}_{(2,\Pi_{cc})k,a,b}(\zeta), \tilde{\Psi}_{(2,\Pi_{cc})k,a,b}(\zeta), \tilde{\tilde{X}}_{(2,\Pi_{cc})k,a,b}(\zeta), \tilde{\tilde{\Psi}}_{(2,\Pi_{cc})k,a,b}(\zeta), \tilde{E}_{(2,\Pi_{cc})1,a,b}^{[1]}(\zeta), \tilde{\tilde{E}}_{(2,\Pi_{cc})1,a,b}^{[1]}(\zeta)$  и  $\tilde{X}_{(2,\Pi_{cc})k,c}(\zeta), \tilde{\Psi}_{(2,\Pi_{cc})k,c}(\zeta), \tilde{\tilde{X}}_{(2,\Pi_{cc})k,c}(\zeta), \tilde{\tilde{\Psi}}_{(2,\Pi_{cc})k,c}(\zeta), \tilde{E}_{(2,\Pi_{cc})1,c}^{[1]}(\zeta), \tilde{\tilde{E}}_{(2,\Pi_{cc})1,c}^{[1]}(\zeta)$  ( $k = 0,1,2$ ).

Переходимо до дослідження зони  $\Pi_{tc}$  (рис. 3.3). Вона обмежена лініями

$\zeta = 0$ ,  $x_2 = x_{(2)2,N}(\zeta)$ ,  $x_2 = -h/2$  и  $x_2 = x_{(2)2,N}^*(\zeta)$ . Точки цієї зони на попередньому етапі входили до складу зони III, тобто розтягнутої зони. Тому етап 2 в зоні  $\Pi_{tc}$  складається з двох підетапів: підетапу 2', що складається з процесу розвантаження при розтязі, і підетапу 2'', що представляє собою процес навантаження при стиску. Для підетапу 2'' відповідно до (3.170) маємо

$$\phi_v(\eta_{(1'',III)}^{**}) = [1 - V_{(1'',III)}(\eta_{(1'',III)}^{**} - \eta_{(1)}^*)] / (1 - \hat{V}_b) \quad (3.178)$$

( $\eta_{(1'',III)}^{**}(x_2, \zeta)$ ) – значення  $\eta$  в точках зони III в кінці етапу 1'). Таким чином,  $\phi_v$  виявляється функцією параметра  $\eta_{(1'',III)}^{**}$ . Звідси випливає, що для величин

$\tilde{\gamma}_i, E_{(2'',\Pi_{tc})}^{[0]}, \hat{\sigma}_{(2'',\Pi_{tc})}, \hat{\varepsilon}_{(2'',\Pi_{tc})}, \hat{V}_{(2'',\Pi_{tc})}, \omega_{(2'',\Pi_{tc})1}, \omega_{(2'',\Pi_{tc})2}$  мають місце формули (3.171) з заміною  $\eta_{(2,\Pi_{cc})}^*$  на  $\eta_{(1'',III)}^{**}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_i(\eta_{(1'',III)}^{**}) &= 1 + \beta_{1i} \phi_v(\eta_{(1'',III)}^{**}) + \beta_{2i} [\phi_v(\eta_{(1'',III)}^{**})]^2 + \beta_{3i} [\phi_v(\eta_{(1'',III)}^{**})]^3, \\ E_{(2'',\Pi_{tc})}^{[0]}(\eta_{(1'',III)}^{**}) &= \tilde{\gamma}_3(\eta_{(1'',III)}^{**}) E^{[0]}, \hat{\sigma}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}) = \tilde{\gamma}_1(\eta_{(1'',III)}^{**}) \hat{\sigma}_b, \\ \hat{\varepsilon}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}) &= \tilde{\gamma}_2(\eta_{(1'',III)}^{**}) \hat{\sigma}_b, \hat{V}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}) = \hat{\sigma}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}) / \\ &/ [E_{(2'',\Pi_{tc})}^{[0]}(\eta_{(1'',III)}^{**}) \hat{\varepsilon}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**})], \omega_{(2'',\Pi_{tc})1}(\eta_{(1'',III)}^{**}) = [2 - 2,5 \times \\ &\times \hat{V}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}) + (36V_b(\eta_{(1)}^*) - 28) \sqrt{|\hat{V}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}) - \hat{V}_b|}] / \tilde{\gamma}_1(\eta_{(1'',III)}^{**}), \\ \omega_{(2'',\Pi_{tc})2}(\eta_{(1'',III)}^{**}) &= [-1 + 2,5 \hat{V}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}) - (36V_b(\eta_{(1)}^*) - 28) \times \\ &\times \sqrt{|\hat{V}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}) - \hat{V}_b|}] / [\tilde{\gamma}_1(\eta_{(1'',III)}^{**})]^2, \tilde{\delta}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}) = \tilde{\gamma}_3(\eta_{(1'',III)}^{**}) - 1. \end{aligned} \quad (3.179)$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} A_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}) &= \hat{\sigma}_b (1 - 2\nu_0) / [3E_{(2'',\Pi_{tc})}^{[0]}(\eta_{(1'',III)}^{**}) \hat{\varepsilon}_b], V_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}, \eta_\Delta) = \\ &= \hat{V}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}) + (1 - \hat{V}_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**})) [1 - \omega_{(2'',\Pi_{tc})1}(\eta_{(1'',III)}^{**}) |\eta_\Delta| - \\ &- \omega_{(2'',\Pi_{tc})2}(\eta_{(1'',III)}^{**}) (\eta_\Delta)^2]^{1/2}, f_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}, \eta_\Delta) = \\ &= [1 - 2\nu_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_\Delta)] / [(1 - 2\nu_0) V_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_{(1'',III)}^{**}, \eta_\Delta)], \end{aligned} \quad (3.180)$$

де  $\nu_{(2'',\Pi_{tc})}(\eta_\Delta) = \nu_b(\eta_\Delta)$ . Таким чином, в якості параметра  $p$  для зони  $\Pi_{tc}$

виступає  $\eta_{(1'',\text{III})}^{**}$  і тому

$$\eta_0 = \alpha^* E_1^{[0]} \delta_l / \hat{\sigma}_{bt}, \quad \eta_1 = \beta_{(2)}^* E_1^{[0]} \delta_0 / \hat{\sigma}_{bt}, \quad \eta_2 = -\beta_{(2)}^* E_1^{[0]} / (l \hat{\sigma}_{bt}) \quad (3.181)$$

( $\beta_{(1)}^{**} = \beta_{(2)}^*$ ). Прийmemo тепер  $\eta_{\Delta 2} = \eta_{(2'',\text{II}_{tc})}^{**} = \eta_{(1)}^*$ ,  $\eta_{\Delta 1} = \eta_{\Delta 2} / 2$ .

Використовуючи прийом, застосований при дослідженні зони III на етапі 1, можемо записати

$$\begin{aligned} \chi_{(2,\text{II}_{tc})0} &= \chi_{(2'',\text{II}_{tc})0} + \chi_{(2'',\text{II}_{tc})1} \bar{\varepsilon}_{(2'',\text{II}_{tc})}^{[0]*} + \chi_{(2'',\text{II}_{tc})2} (\bar{\varepsilon}_{(2'',\text{II}_{tc})}^{[0]*})^2, \\ \chi_{(2,\text{II}_{tc})1} &= \chi_{(2'',\text{II}_{tc})1} + 2\chi_{(2'',\text{II}_{tc})2} \bar{\varepsilon}_{(2'',\text{II}_{tc})}^{[0]*}, \quad \chi_{(2,\text{II}_{tc})2} = \chi_{(2'',\text{II}_{tc})2}, \end{aligned} \quad (3.182)$$

де  $\chi_{(2'',\text{II}_{tc})k}(\eta_{(1'',\text{III})}^{**})$  ( $k = 0,1,2$ ) визначаються з (3.145) при  $p = \eta_{(1'',\text{III})}^{**}$ , а

$\bar{\varepsilon}_{(2'',\text{II}_{tc})}^{[0]*}$  – середнє подовження на початку етапу 2' в зоні  $\text{II}_{tc}$ . Потім використовуємо формули (Б.54) – (Б.72). В результаті знаходимо  $\tilde{X}_{(2,\text{II}_{cc})k}(\zeta)$ ,  $\tilde{\Psi}_{(2,\text{II}_{cc})k}(\zeta)$ ,  $\tilde{\tilde{X}}_{(2,\text{II}_{cc})k}(\zeta)$ ,  $\tilde{\tilde{\Psi}}_{(2,\text{II}_{cc})k}(\zeta)$  ( $k = 0,1,2$ ). При цьому на ділянці *a*

$$\begin{bmatrix} U_{(2,\text{II}_{tc})kp,a}(\zeta) \\ W_{(2,\text{II}_{tc})kp,a}(\zeta) \end{bmatrix} = \int_{x_{(2)2,N}(\zeta)}^{x_{(2)2,N}^*(\zeta)} (\eta_1 + \eta_2 x_2)^p (x_2 - D)^k \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} dx_2, \quad (3.183)$$

а на ділянці *b*

$$\begin{bmatrix} U_{(2,\text{II}_{tc})kp,b}(\zeta) \\ W_{(2,\text{II}_{tc})kp,b}(\zeta) \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{x_{(2)2,N}^*(\zeta)} (\eta_1 + \eta_2 x_2)^p (x_2 - D)^k \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} dx_2, \quad (3.184)$$

Звідси випливає, що величини  $\tilde{X}_{(2,\text{II}_{tc})k}(\zeta)$ ,  $\tilde{\Psi}_{(2,\text{II}_{tc})k}(\zeta)$ ,  $\tilde{E}_{(2,\text{II}_{tc})1}^{[1]}(\zeta)$ ,  $\tilde{\tilde{X}}_{(2,\text{II}_{tc})k}(\zeta)$ ,  $\tilde{\tilde{\Psi}}_{(2,\text{II}_{tc})k}(\zeta)$ ,  $\tilde{\tilde{E}}_{(2,\text{II}_{tc})1}^{[1]}(\zeta)$  різні на ділянках *a* і *b*.

Позначимо їх так:

$$\begin{aligned} &\tilde{X}_{(2,\text{II}_{tc})k,a}(\zeta), \tilde{\Psi}_{(2,\text{II}_{tc})k,a}(\zeta), \tilde{\tilde{X}}_{(2,\text{II}_{tc})k,a}(\zeta), \tilde{\tilde{\Psi}}_{(2,\text{II}_{tc})k,a}(\zeta), \tilde{E}_{(2,\text{II}_{tc})1,a}^{[1]}(\zeta), \\ &\tilde{E}_{(2,\text{II}_{tc})1,a}^{[1]}(\zeta) \quad \text{и} \quad \tilde{X}_{(2,\text{II}_{tc})k,b}(\zeta), \tilde{\Psi}_{(2,\text{II}_{tc})k,b}(\zeta), \tilde{\tilde{X}}_{(2,\text{II}_{tc})k,b}(\zeta), \tilde{\tilde{\Psi}}_{(2,\text{II}_{tc})k,b}(\zeta), \\ &\tilde{E}_{(2,\text{II}_{tc})1,b}^{[1]}(\zeta), \tilde{\tilde{E}}_{(2,\text{II}_{tc})1,b}^{[1]}(\zeta) \quad (k = 0,1,2). \end{aligned}$$



Переходимо до дослідження зони III. У ній відбувається процес розвантаження при розтязі. З формули (Б.53) маємо

$$\begin{aligned} k_{(2,III)} &= 0, E_{(2,III)}^{[0]} = E^{[0]}, \hat{V}_{(2,III)} = 0,7 + 0,3V_{bt}(\eta_{(2,III)}^*), V_{(2,III)0} = \\ &= V_{bt}(\eta_{(2,III)}^*)^{-1}, \omega_{(2,III)1} = (2 - 2,5\hat{V}_{(2,III)})/\eta_{(2,III)}^*, \omega_{(2,III)2} = \\ &= -(1 - 2,5\hat{V}_{(2,III)})/(\eta_{(2,III)}^*)^2. \end{aligned} \quad (3.185)$$

Тут  $\eta_{(2,III)}^*$  – рівень поздовжніх нормальних напружень в зоні III на початку етапу. Коефіцієнт зміни січного модуля пружності  $V_{(2,III)}(\eta_\Delta)$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu_{(2,III)}(\eta_\Delta)$  і  $f_{(2,III)}(\eta_\Delta)$  є функціями  $\eta_{(2,III)}^*$ :

$$\begin{aligned} V_{(2,III)}(\eta_{(2,III)}^*, \eta_\Delta) &= \hat{V}_{(2,III)}(\eta_{(2,III)}^*) + [V_{(2,III)0}(\eta_{(2,III)}^*) - \hat{V}_{(2,III)}(\eta_{(2,III)}^*)] \times \\ &\times \sqrt{1 - \omega_{(2,III)1}(\eta_{(2,III)}^*)|\eta_\Delta| - \omega_{(2,III)2}(\eta_{(2,III)}^*)(\eta_\Delta)^2}, \\ \nu_{(2,III)}(\eta_{(2,III)}^*, \Delta\eta) &= \nu_{bt}(\eta_{(2,III)}^* + \Delta\eta), f_{(2,I)}(\eta_{(2,III)}^*, \Delta\eta) = \\ &= [1 - 2\nu_{(2,III)}(\eta_{(2,III)}^*, \Delta\eta)]/[1 - 2\nu_0]V_{(2,III)}(\eta_{(2,III)}^*, \Delta\eta). \end{aligned} \quad (3.185a)$$

Таким чином, для зони III

$$p = \eta_{(2,III)}^*.$$

Величини  $\eta_k$  ( $k = 0, 1, 2$ ) визначаються за формулами (3.181). Приймемо

$$\Delta\eta_1 = \eta_{(2,III)}^*, \Delta\eta_2 = \frac{\Delta\eta_1}{2}. \quad (3.186)$$

Використовуючи тепер формули (3.146) – (3.163) при  $z = III$ , визначаємо  $\tilde{X}_{(2,III)k}$ ,  $\tilde{\Psi}_{(2,III)k}$ ,  $\tilde{X}_{(2,III)k}$ ,  $\tilde{\Psi}_{(2,III)k}$  ( $k = 0, 1, 2$ ),  $\tilde{E}_{(2,III)1}^{[1]}(\zeta)$ ,  $\tilde{E}_{(2,III)1}^{[1]}(\zeta)$ .

При цьому

$$\begin{bmatrix} U_{(2,III)ki}(\zeta) \\ W_{(2,III)ki}(\zeta) \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{x_{(2)2,N}(\zeta)} (\eta_1 + \eta_2 x_2)^i (x_2 - D)^k \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} dx_2, \quad (3.187)$$

Запишемо формулу (Б.35) для етапу 2 в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
M_{(2)3}^{\otimes}(\zeta) &= -\beta_{(2)\Delta} \bar{M}_{(2)3}^{\otimes}(\zeta), \bar{M}_{(2)3}^{\otimes}(\zeta) = \delta_0^2 H_l \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) + \\
&+ \sum_{n=1}^3 \{A_{(2)n}(\zeta) [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^{n+1} + B_{(2)n}(\zeta) [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n\} - b \sum_{z \in Z(\zeta)} \{\tilde{E}_{(2,z)1}^{[1]}(\zeta) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) - \\
&- \delta_0 \tilde{E}_{(2,z)1}^{[1]}(\zeta) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)\}, A_{(2)n}(\zeta) = (J_1 + J_2) D_{(2,u(\zeta))n}(\zeta) + \\
&+ (J_1 - J_2) D_{(2,d(\zeta))n}(\zeta), B_{(2)n}(\zeta) = J_3 [\bar{D}_{(2,u(\zeta))n}(\zeta) - \bar{D}_{(2,d(\zeta))n}(\zeta)].
\end{aligned} \tag{3.188}$$

**Зауваження.** В (3.188) через  $Z(\zeta)$  позначено множина зон, що перетинаються прямою  $\zeta = \zeta'$ , а через  $u(\zeta')$  и  $d(\zeta')$  – верхню и нижню зони, які перетинаються цією прямою. Так на ділянці  $a$   $Z(\zeta) = Z_a = I, \Pi_{cc}, \Pi_{tc}, \text{III}$ ,  $u(\zeta) = I, d(\zeta) = \text{III}$ ; на ділянці  $b$  –  $Z(\zeta) = Z_b = I, \Pi_{cc}, \Pi_{tc}$ ,  $u(\zeta) = I, d(\zeta) = \Pi_{tc}$ ; на ділянці  $c$  –  $Z(\zeta) = Z_c = I, \Pi_{cc}$ ,  $u(\zeta) = I, d(\zeta) = \Pi_{cc}$ .

З (3.99) маємо

$$\begin{aligned}
D_{(2,u(\zeta))n}(\zeta) &= \beta_{(2)\Delta} \bar{D}_{(2,u(\zeta))n}(\zeta), \bar{D}_{(2,u(\zeta))n}(\zeta) = 3[-K_2^{[0]} \times \\
&\times K_{(2,u)1,n-1}^{[1]}(\zeta, h/2) / K_1^{[0]} + K_{(2,u)2,n-1}^{[1]}(\zeta, h)](h/2 - D)^n / K_4^{[0]}, \\
D_{(2,d(\zeta))n}(\zeta) &= \beta_{(2)\Delta} \bar{D}_{(2,d(\zeta))n}(\zeta), \bar{D}_{(2,d(\zeta))n}(\zeta) = 3[-K_2^{[0]} \times \\
&\times K_{(2,d)1,n-1}^{[1]}(\zeta, -h/2) / K_1^{[0]} + K_{(2,d)2,n-1}^{[1]}(\zeta, -h/2)][-(h/2 + D)]^n / K_4^{[0]},
\end{aligned} \tag{3.189}$$

де  $K_{(2,z)1,n}^{[1]}(\zeta, x_2) = \beta_{(2)\Delta}^n [K^{[0]} \bar{\chi}_{(2,z)n}(\zeta, x_2) + 4 G^{[0]} \bar{\psi}_{(2,z)n}(\zeta, x_2) / 3]$ ,

$K_{(2,z)2,n}^{[1]}(\zeta, x_2) = \beta_{(2)\Delta}^n [K^{[0]} \bar{\chi}_{(2,z)n}(\zeta, x_2) - 2 G^{[0]} \bar{\psi}_{(2,z)n}(\zeta, x_2) / 3]$  ( $n = 0, 1, 2$ ).

Відповідно до вищенаведеного зауваження на ділянці  $a$ :

$$\begin{aligned}
A_{(2)n,a}(\zeta) &= (J_1 + J_2) D_{(2,I)n}(\zeta) + (J_1 - J_2) D_{(2,\text{III})n}(\zeta), \\
B_{(2)n,a}(\zeta) &= J_3 [\bar{D}_{(2,I)n}(\zeta) - \bar{D}_{(2,\text{III})n}(\zeta)],
\end{aligned} \tag{3.190a}$$

на ділянці  $b$ :

$$\begin{aligned}
A_{(2)n,b}(\zeta) &= (J_1 + J_2) D_{(2,I)n}(\zeta) + (J_1 - J_2) D_{(2,\Pi_{tc})n}(\zeta), \\
B_{(2)n,b}(\zeta) &= J_3 [\bar{D}_{(2,I)n}(\zeta) - \bar{D}_{(2,\Pi_{tc})n}(\zeta)],
\end{aligned} \tag{3.190b}$$

на ділянці  $c$ :

$$\begin{aligned}
A_{(2)n,c}(\zeta) &= (J_1 + J_2) D_{(2,I)n}(\zeta) + (J_1 - J_2) D_{(2,\Pi_{cc})n}(\zeta), \\
B_{(2)n,c}(\zeta) &= J_3 [\bar{D}_{(2,I)n}(\zeta) - \bar{D}_{(2,\Pi_{cc})n}(\zeta)].
\end{aligned} \tag{3.190c}$$

Формули (3.187) – (3.190) визначають значення  $\overline{M}_{(2)3}^{\otimes}(\zeta)$  на всіх трьох ділянках:  $a$ ,  $b$  і  $c$ . Позначимо їх відповідно через  $\overline{M}_{(2)3,a}^{\otimes}(\zeta)$ ,  $\overline{M}_{(2)3,b}^{\otimes}(\zeta)$  і  $\overline{M}_{(2)3,c}^{\otimes}(\zeta)$ . Легко переконатися, що на ділянці  $a$ :

$$\begin{aligned} [\overline{M}_{(2)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) &= [\overline{M}_{(2)3,a}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) = \delta_0^2 l H_l [\overline{\theta}^{[0]}]^{\#}(\zeta) + \\ &+ \sum_{n=1}^3 \{ [A_{(2)n,a} (\overline{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{\#}(\zeta) + [B_{(2)n,a} (\overline{\theta}^{[0]})^n]^{\#}(\zeta) \} - \\ &- b \sum_{z \in Z_a} \{ [\tilde{E}_{(2,z)1,a}^{[1]} \overline{\theta}^{[0]}]^{\#}(\zeta) - \delta_0 [\tilde{E}_{(2,z)1,a}^{[1]} \overline{\theta}^{[0]}]^{\#}(\zeta) \}. \end{aligned} \quad (3.191a)$$

(введено позначення  $[f]^{\#}(\zeta) = \int_0^{\zeta} f(\tau) d\tau$ );

на ділянці  $b$ :

$$\begin{aligned} [\overline{M}_{(2)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) &= [\overline{M}_{(2)3,a}^{\otimes}]^{\#}(\zeta_N) + [\overline{M}_{(2)3,b}^{\otimes}]^{\#}_b(\zeta) = \\ &= [\overline{M}_{(2)3,a}^{\otimes}]^{\#}(\zeta_N) + \delta_0^2 l H_l [\overline{\theta}^{[0]}]^{\#}_b(\zeta) + \sum_{n=1}^3 \{ [A_{(2)n,b} \overline{\theta}^{[0]n+1}]^{\#}_b + \\ &+ [B_{(2)n,b} \overline{\theta}^{[0]n}]^{\#}_b(\zeta) \} - b \sum_{z \in Z_b} \{ [\tilde{E}_{(2,z)1,b}^{[1]} \overline{\theta}^{[0]}]^{\#}_b(\zeta) - \\ &- \delta_0 [\tilde{E}_{(2,z)1,b}^{[1]} \overline{\theta}^{[0]}]^{\#}_b(\zeta) \} \quad ([f]^{\#}_b(\zeta) = \int_{\zeta_N}^{\zeta} f(\tau) d\tau); \end{aligned} \quad (3.191b)$$

на ділянці  $c$ :

$$\begin{aligned} [\overline{M}_{(2)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) &= [\overline{M}_{(2)3,b}^{\otimes}]^{\#}(\zeta_N^*) + [\overline{M}_{(2)3,c}^{\otimes}]^{\#}_c(\zeta) = \\ &= [\overline{M}_{(2)3,b}^{\otimes}]^{\#}(\zeta_N^*) + \delta_0^2 l H_l [\overline{\theta}^{[0]}]^{\#}_c(\zeta) + \sum_{n=1}^3 \{ [A_{(2)n,c} \overline{\theta}^{[0]n+1}]^{\#}_c + \\ &= [B_{(2)n,c} \overline{\theta}^{[0]n}]^{\#}_c(\zeta) \} - b \sum_{z \in Z_c} \{ [\tilde{E}_{(2,z)1,c}^{[1]} \overline{\theta}^{[0]}]^{\#}_c(\zeta) - \\ &- \delta_0 [\tilde{E}_{(2,z)1,c}^{[1]} \overline{\theta}^{[0]}]^{\#}_c(\zeta) \} \quad ([f]^{\#}_c(\zeta) = \int_{\zeta_N^*}^{\zeta} f(\tau) d\tau). \end{aligned} \quad (3.191c)$$

Цілоком аналогічно визначається  $[\overline{M}_{(2)3}^{\otimes}]^{\#\#}(\zeta)$  на ділянках  $a$ ,  $b$  і  $c$  балки.

Обчислення  $[\overline{M}_{(2)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta)$  і  $[\overline{M}_{(2)3}^{\otimes}]^{\#\#}(\zeta)$  можна значно спростити, якщо,

користуючись гладкістю функцій  $\overline{M}_{(2)3,s}^{\otimes}(\zeta)$  ( $s = a, b, c$ ), апроксимувати їх

поліномами  $\sum_{k=0}^n \overline{M}_{(2)3,s,k}^{\otimes} (\zeta - \zeta_s^*)^k$  ( $\zeta_a^* = 0, \zeta_c^* = \zeta_N^*$ ), коефіцієнти яких

$\overline{M}_{(2)3,s,k}^{\otimes}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) визначаються з умов

$$\sum_{k=0}^n \overline{M}_{(2)3,s,k}^{\otimes} (\zeta_{s,i} - \zeta_s^*)^k = \overline{M}_{(2)3,s}^{\otimes}(\zeta_{s,i}) \quad (3.192)$$

(точки  $\zeta_{s,I}$  ( $I = 0, 1, \dots, n$ ) належать ділянці  $s$ ).

З формул (3.105) – (3.106) отримуємо

$$\phi_{(j)}^{[1]}(\zeta) = -\frac{l}{H} \{ [M_{(1)3}^{\otimes**}]^{\#}(\zeta) + [M_{(2)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) \} + c_{(2)0} \zeta,$$

$$c_{(2)0} = l [M_{(1)3}^{\otimes**}(1) + M_{(2)3}^{\otimes}(1)] / H.$$

звідки випливає, що

$$[\phi_{(j)}^{[1]}]^{\#}(\zeta) = -\frac{l}{H} \{ [M_{(1)3}^{\otimes**}]^{\#\#}(\zeta) + [M_{(2)3}^{\otimes}]^{\#\#}(\zeta) \} + c_{(2)0} \frac{\zeta^2}{2}. \quad (3.193)$$

Далі, використовуючи співвідношення (додаток Б)

$$v_{(2)}(\zeta) = l \{ [\phi^{[0]}]^{\#}(\zeta) + [\phi_{(2)}^{[1]}]^{\#}(\zeta) \}, \quad (3.194)$$

знаходимо прогин консолі  $v_{(2)}(\zeta)$ .

На наступному, третьому, етапі сила  $F_2$  змінює напрямок і змінюється за модулем від нуля до деякої величини  $F_{(3)2}^{**}$ . Це означає, що параметр  $\beta$  змінюється від  $\beta_{(3)}^* = 0$  до  $\beta_{(3)}^{**} < 0$ . Цей етап аналогічний першому за винятком того, що розподіл зон змінюється на протилежний по відношенню до рис. 3.3 і параметр  $\beta$  має протилежний знак (рис. 3.4).

Четвертий етап аналогічний другому за винятком зміни розподілу зон і знака параметра  $\beta$ , який змінюється в межах від  $\beta_{(4)}^* = \beta_{(3)}^{**}$  до  $\beta_{(4)}^{**} = 0$ . Із закінченням четвертого етапу завершується перший цикл і починається другий, при якому алгоритм обчислення прогинів балки аналогічний такому на першому і т.д.

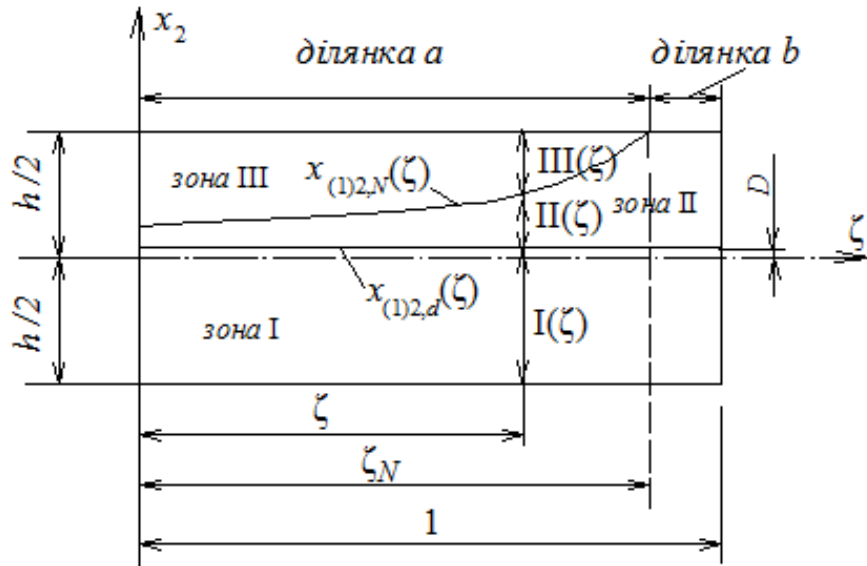


Рис. 3.4 Схема розподілу зон навантаження і розвантаження на третьому етапі циклічного навантаження консолі

**Приклад 3.1.** Розглянемо згин залізобетонної консольної балки, що знаходиться під дією сил постійної сили  $F_1$  і сили  $F_2$ , величина якої на першому етапі завантаження зростає від нуля до  $F_1^* = 10 \text{ кН}$ , потім на другому етапі вона зменшується до нуля. Наступні два етапи повторюють перші два, але при цьому сила змінює напрямок на протилежний. довжина балки  $l = 8 \text{ м}$ , розміри поперечного перерізу:  $b = 0,8 \text{ м}$ ,  $h = 0,28 \text{ м}$ , матеріал – бетон класу В35. Армування симетричне – 12 стержнів діаметром 15 мм, матеріал – сталь А-III. Сила  $F_1 = -294,3 \text{ кН}$ , параметр  $\alpha^* = -0,297$ .

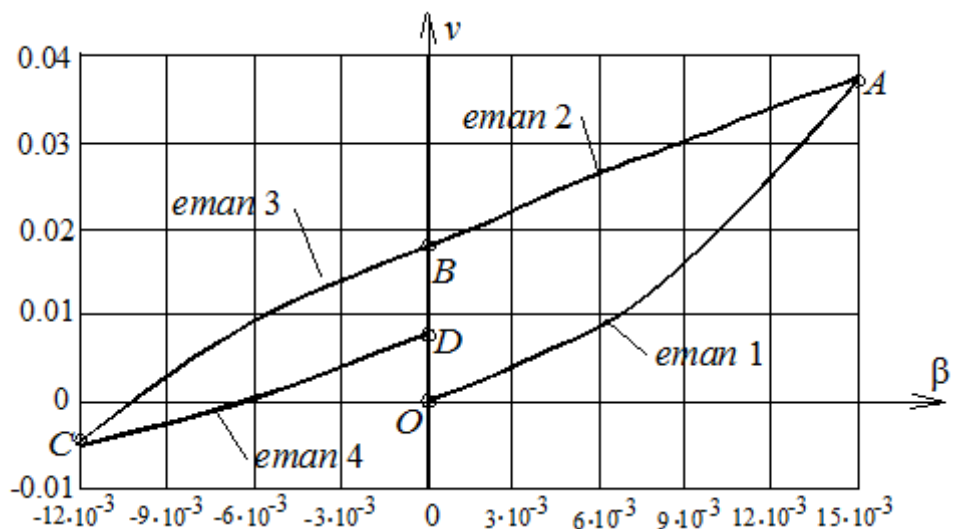


Рис. 3.5 Графік зміни прогину консолі в процесі циклічного навантаження

На рис. 3.5 наведено графік залежності прогину кінця консолі (в метрах) від величини сили  $F_2$  на різних етапах циклу згину. Графік утворює гістерезисну петлю, яка виявляється незамкненою через виникнення залишкової деформації протягом циклу.

Отже, в цьому параграфі детально описано алгоритм методу застосування методу малого параметру при дослідженні квазістатичного згину елементів залізобетонної каркасної будівлі. Алгоритм продемонстровано на конкретному прикладі.

### 3.4 Застосування методу малого параметру при дослідженні коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при ударному і сейсмічному впливах

Розглянемо рух зосередженої маси  $M$ , розташованої на кінці залізобетонної колони (рис. 2.7), основа якої переміщається по горизонталі з прискоренням  $w(t)$ . Складаючи основне рівняння динаміки точки  $M$  відносно неінерціальної системи відліку  $xu$  і проектуючи його на вісь  $y$ , отримуємо

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} = -R_2 + mw(t), \quad (3.195)$$

де  $m$  – маса точки  $M$ ,  $v$  – її горизонтальне зміщення,  $R_2$  – горизонтальна складова реакції колони. Розділимо обидві частини рівності (3.195) на  $ml$  ( $l$  – довжина консолі) і, користуючись тим, що за величиною  $R_2 = F_2$  ( $F_2$  – горизонтальна складова сили, що викликала зміщення), будемо мати

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = -\frac{H}{ml^3} \beta + \frac{w(t)}{l}. \quad (3.196)$$

Тут  $\eta = v/l$ ,  $\beta = F_2 l^2 / H$ ,  $H = E_1^{[0]} J + 2E_a S_1 h_1^2$ , ( $E_1^{[0]} = E^{[0]} / (1 - \nu^2)$ ),  $E^{[0]}$  – модуль лінійної пружності бетону,  $\nu$  – його коефіцієнт Пуассона;  $J = dh^3 / 12$  – момент інерції поперечного перерізу,  $E_a$  – модуль пружності арматури;  $S_1$  – площа перерізу верхньої і нижньої арматури,  $S = dh$ .

В п. 3.3 цього розділу викладено алгоритм, що дозволяє визначити прогини залізобетонної консольної балки в залежності від  $\Delta\beta_{(j)}$  ( $\Delta\beta_{(j)} = \beta$  –

$\beta_{(j)}^*$ ,  $j$  – номер етапу,  $\beta_{(j)}^*$  – значення  $\beta$  в його початку), а значить, і від  $\beta$ , на різних етапах першого циклу її квазістатичного згину: на першому ( $\beta \geq 0, d\beta/dt \geq 0$ ), другому ( $\beta \geq 0, d\beta/dt \leq 0$ ), третьому ( $\beta \leq 0, d\beta/dt \leq 0$ ) і четвертому ( $\beta \leq 0, d\beta/dt \geq 0$ ) етапах. На наступних циклах послідовність етапів зберігається. Таким чином, функція  $v_{(j)} = v_{(j)}(\beta)$ , а, отже, і  $\eta_{(j)} = \eta_{(j)}(\beta)$ , визначається на кожному з етапів. Для скорочення обсягу обчислень можна зробити в такий спосіб: обчислити значення  $\eta_{(j)i} = \eta_{(j)}(\beta_{(j)i})$  ( $\beta_{(j)1} = \beta_{(j)}^*$ ,  $\beta_{(j)2} < \beta_{(j)3} < \dots < \beta_{(j)n-1} < \beta_{(j)n}$ ,  $\beta_{(j)n} = \beta_{(j)}^{**}$ ,  $\beta_{(j)}^{**}$  – значення  $\beta$  в кінці  $j$ -го етапу), а потім побудувати поліноміальну апроксимацію (наприклад, з використанням інтерполяційної формули Лагранжа)  $\tilde{\eta}_{(j)}(\beta) = \sum_{k=1}^n H_{(j)k} \beta^{k-1}$  так, щоб  $\tilde{\eta}_{(j)}(\beta_{(j)i}) = \eta_{(j)}(\beta_{(j)i})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Використовуючи методи поліноміальної апроксимації і ті ж значення  $\eta_{(j)i}$  і  $\beta_{(j)i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), легко отримати формулу і для зворотної функції  $\tilde{\beta}_{(j)}(\eta)$ :

$$\tilde{\beta}_{(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^n B_{(j)k} \eta^{k-1}. \quad (3.197)$$

Зробимо в (3.196) заміну незалежної змінної  $t$  безрозмірним часом  $\tau$  наступним чином:

$$t = \tau / \omega_0, \quad (3.198)$$

( $\omega_0$  – частота вільних лінійних коливань вантажу на консолі:  $\omega_0 = (3H/ml^3)^{1/2}$ ). Тоді з одночасною заміною  $\beta$  його поліноміальною апроксимацією для руху вантажу на  $j$ -му етапі матимемо наступне диференціальне рівняння:

$$\ddot{\eta} = -\frac{1}{3} \tilde{\beta}_{(j)}(\eta) - \bar{w}\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right), \quad (3.199)$$

де  $\ddot{\eta} = \frac{d^2 \eta}{d\tau^2}$ ,  $\bar{w}(t) = w(t) / l\omega_0^2$ .

Для демонстрації методу рішення диференціального рівняння (3.199) розглянемо кілька прикладів.

### Приклад 3.2 - нелінійні вільні коливання одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі, викликані ударним впливом.

В цьому випадку  $\bar{w}(t) = 0$ . Припустимо, що спочатку за допомогою квазістатичного прикладання сили  $F_2$  вантаж в результаті дії цієї сили був зміщений з положення рівноваги на деяку відстань в сторону позитивного напрямку осі  $y$ . Потім (при  $t = 0$ ) вантаж був відпущений, і почалися його вільні коливання. Таким чином, на початковому (після  $t = 0$ ) етапі руху вантажу маємо  $\beta > 0$ . Крім того, очевидно, що реакція колони починає зменшуватися, тобто  $\dot{\beta} < 0$ . Це означає, що рух почався з другого етапу згину колони, тобто в (3.197) слід покласти  $j = 2$ . Початкові умови для цього етапу  $\eta = v_0/l, \dot{\eta} = 0$ . За допомогою методів, викладених в п. 3.4, знаходимо коефіцієнти розкладу (3.197), тим самим повністю визначаємо параметри, однозначно визначаючи функцію  $\tilde{\beta}_{(2)}(\eta)$ . Потім приступаємо до чисельного вирішення рівняння (3.199), наприклад, за допомогою методу Рунге-Кутта, визначаючи на кожному кроці значення  $\eta$  і  $\dot{\eta}$ , а також  $\tilde{\beta}_{(2)}$ . Як тільки  $\tilde{\beta}_{(2)}$  стає рівним нулю, обчислення припиняємо, так як рівність  $\tilde{\beta}_{(2)} = 0$  означає кінець етапу. Значення  $\eta$  і  $\dot{\eta}$  в цей момент є ні чим іншим, як  $\eta_{(2)}^{**}$  і  $\dot{\eta}_{(2)}^{**}$  (тобто кінцевими значеннями для цього етапу). Внаслідок безперервності функцій  $\eta(\tau)$  і  $\dot{\eta}(\tau)$  вони є одночасно  $\eta_{(3)}^*$  і  $\dot{\eta}_{(3)}^*$ , тобто початковими значеннями для наступного етапу, на якому  $\tilde{\beta}_{(3)} < 0$  і  $\dot{\tilde{\beta}}_{(3)} < 0$ . Потім визначаємо  $V_{(3)k}$  і процедура побудови рішення повторюється, при цьому визначаються  $\eta$  і  $\dot{\eta}$ , а також  $\tilde{\beta}_{(3)}$  і  $\dot{\tilde{\beta}}_{(3)}$ . Значення  $\dot{\tilde{\beta}}_{(3)} = 0$  означає кінець третього етапу. У цей момент визначаються  $\eta_{(3)}^{**} = \eta_{(4)}^*$  і  $\dot{\eta}_{(3)}^{**} = \dot{\eta}_{(4)}^*$ . Тепер можна приступити до четвертого етапу, який є заключним для першого циклу. Другий цикл починається з першого етапу, початкові умови для якого визначаються в кінці четвертого етапу першого циклу і т.д. і т.п.



На рис.3.6 представлені графіки вільних коливань вантажу на колоні для трьох випадків початкових умов 1.  $v_0=0.06m$ ,  $\dot{v}_0=0$ ; 2.  $v_0=0.04m$ ,  $\dot{v}_0=0$ ; 3.  $v_0=0.02m$ ,  $\dot{v}_0=0$ .

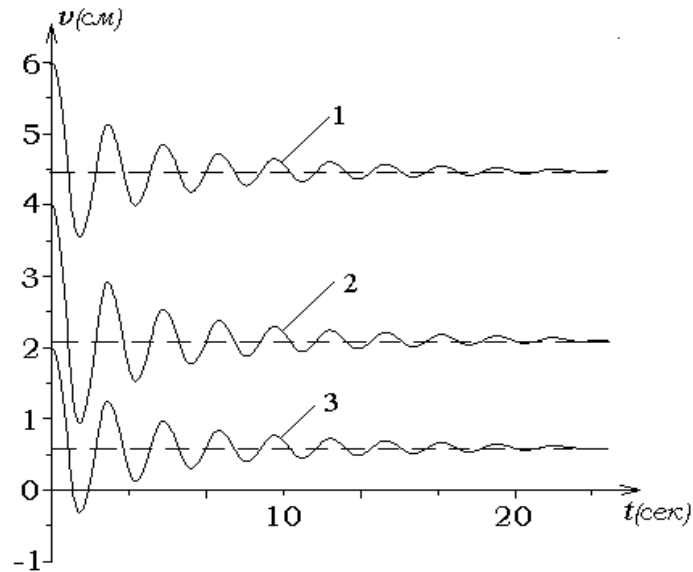


Рис. 3.6 Графіки вільних нелінійних коливань вантажу на колоні

Відразу помітний загасаючий характер коливань. Крім того, помітно, що центр коливань не збігається з початковим положенням рівноваги. Це пов'язано з виникненням залишкових деформацій під час початкового відхилення і в процесі подальших коливань.

**Приклад 3.3 - нелінійні вимушені коливання одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі при сильному сейсмічному впливі.** Розглянемо нестационарні коливання вантажу, викликані горизонтальним рухом точки опори залізобетонної колони з прискоренням  $w(t) = w_0 \sin(pt)$  при  $w_0 = 0,25 \text{ м/с}^2$ .

Диференціальне рівняння (3.199) в цьому випадку буде виглядати так

$$\ddot{\eta} = -\frac{1}{3}\tilde{\beta}_{(j)}(\eta) - \bar{w}_0 \sin(\lambda\tau), \quad (3.200)$$

де  $\bar{w}_0 = w_0 / l\omega_0^2$ ,  $\lambda = v / \omega_0$ . Передбачається, що в початковий момент колони і вантаж на її кінці перебували в стані спокою. Згідно рис. 2.7 початкове зміщення точки опори колони разом з системою координат направлено вліво,

що призводить до зміщення вантажу щодо системи координат  $x$  вправо. Таким чином, на першому етапі руху вантажу  $v > 0$ ,  $\dot{v} > 0$ , звідки впливає  $\beta > 0$ ,  $\dot{\beta} > 0$ , тобто етап руху вантажу відповідає першому етапу згину консолі. Використовуючи методи п.3.1-3.3, визначаємо коефіцієнти розкладу (3.197), а потім приступаємо до вирішення рівняння (3.199). рівність  $\ddot{\beta} = 0$  означає кінець першого етапу і початок другого. Далі все відбувається аналогічно до попереднього прикладу.

На рис. 3.7 представлені графіки руху вантажу при різних значеннях  $\lambda = v/\omega_0$ . Крива 1 відповідає  $\lambda = 0.7$ , крива 2 –  $\lambda = 1$ .

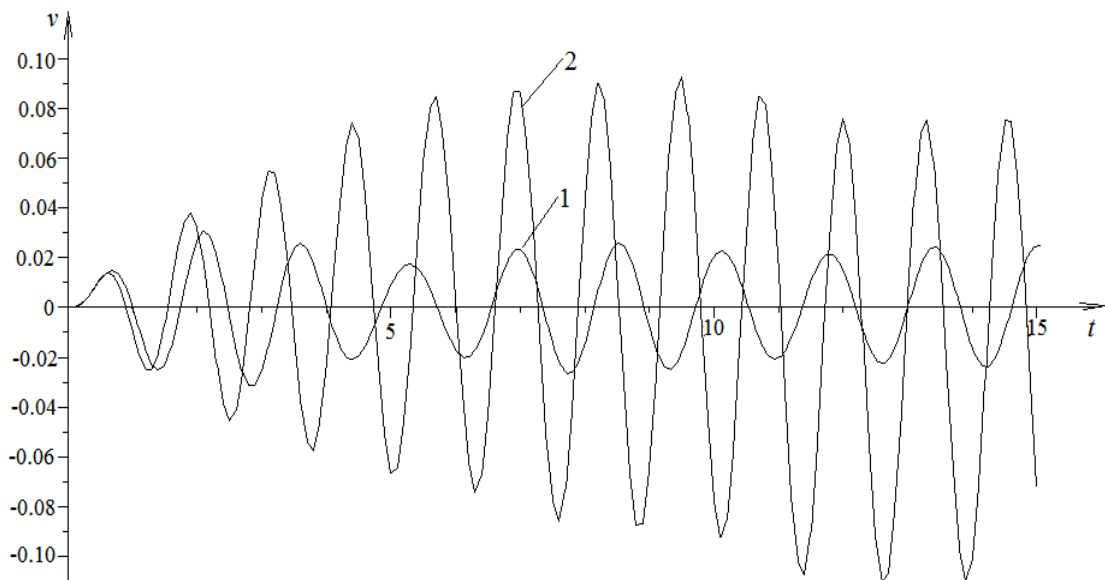


Рис. 3.7 Графіки коливань вантажу на залізобетонній колоні при кінематичному гармонійному збудженні при різних значеннях частоти

На графіку 2 помітно накопичення пластичних деформацій.

У цьому параграфі детально описано алгоритм застосування методу малого параметру при дослідженні нелінійних пружнопластичних коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі. Алгоритм продемонстровано на ряді конкретних прикладів.

Результати досліджень, наведених у даному розділі, опубліковані в роботах [216-222].

### 3.5 Висновки за розділом 3

1. Запропонований в розділі 2 метод вирішення задач статички і динаміки залізобетонних балок з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей бетону для випадків малої нелінійності поширений на випадок великої нелінійності шляхом розбиття процесу згину на ряд етапів, в межах кожного з яких нелінійність виявляється малою.

2. Побудовано диференціальні рівняння першого та другого наближень в приростах кутів повороту поперечних перерізів (з яких можуть бути отримані диференціальні рівняння в приростах прогинів) для кожного з етапів згину.

3. На основі побудованих диференціальних рівнянь побудовано алгоритм дослідження квазістатичного згину елемента залізобетонної каркасної будівлі при великих навантаженнях.

4. Побудовано алгоритм дослідження вільних коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при великих початкових прогинах.

5. Досліджено динаміку одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при сильних сейсмічних впливах.

## РОЗДІЛ 4

**ДИНАМІКА ЕЛЕМЕНТІВ ТА ОДНОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ  
ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КАРКАСНИХ БУДІВЕЛЬ З УРАХУВАННЯМ  
ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЇ І ФІЗИЧНОЇ  
НЕЛІНІЙНОСТІ І ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ  
(метод граничних елементів)**

**4.1 Побудова диференціального рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності матеріалів при складному навантаженні**

У розділі 3 було побудовано диференціальне рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням геометричної та фізичної нелінійностей і пластичності бетону для випадку простого навантаження на основі деформаційної теорії пластичності [78,96]. У цьому розділі навантаження балки не передбачається простим і тому для опису напружено-деформованого стану в бетоні замість деформаційної теорії пластичності використовується теорія пластичної течії [78,96,80-81,96,115,117,182].

Розглядається згин залізобетонної консольної балки прямокутного поперечного перерізу, що знаходиться під дією навантаження, прикладеного до кінців (рис. 4.1).

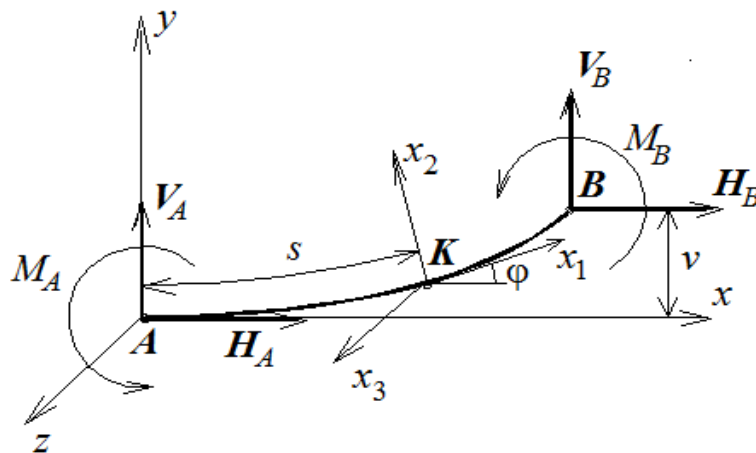


Рис. 4.1 Схема навантаження балки

Як прийнято в теорії пластичної течії, прирости деформацій можуть бути представлені у вигляді суми пружних і пластичних складових:

$$d[\varepsilon] = d[\varepsilon]_e + d[\varepsilon]_p. \quad (4.1)$$

Тут  $d[\varepsilon] = [d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{12}]$  ( $\varepsilon_{ij}$  – елементи тензора деформацій, передбачається, що балка знаходиться в стані плоскої деформації). Відповідно до асоційованого закону течії приріст пластичної деформації може бути представлений в наступному вигляді:

$$d[\varepsilon]_p = \vartheta \frac{\partial \Phi([\sigma], \chi)}{\partial [\sigma]}, \quad (4.2)$$

де  $\Phi$  – функція навантаження,  $\chi$  - параметр зміцнення [78,79,81,94-96],  $[\sigma] = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]$ ,  $\sigma_{i,j}$  – елементи тензора деформацій,  $\vartheta$  - коефіцієнт пропорційності. Відповідно до закону Гука можна записати

$$d[\sigma] = [D]_e d[\varepsilon]_e \quad (4.3)$$

( $[D]_e$  – початкова матриця пружності). Зауважимо, що матриця  $[D]_e$  для лінійно пружного ізотропного матеріалу в разі плоскої деформації має наступний вигляд:

$$[D]_e = \frac{2G_0}{1-\mu_0} \begin{bmatrix} 1 & \mu_0 & 0 \\ \mu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu_0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Тут  $G_0$  – модуль зсуву,  $\mu_0 = \nu_0 / (1 - \nu_0)$ ,  $\nu_0$  – початковий коефіцієнт Пуассона.

Підставляючи (4.2) і (4.3) в (4.1), матимемо

$$d[\varepsilon] = [D]_e^{-1} d[\sigma] + \vartheta \frac{\partial \Phi([\sigma], \chi)}{\partial [\sigma]}. \quad (4.5)$$

Приймаючи, що

$$d\chi = [\sigma]^T d[\varepsilon]_p \quad (4.6)$$

і слідуючи далі [78] або [96], отримуємо

$$d[\sigma] = [D]_{ep} d[\varepsilon], \quad (4.7)$$

де

$$[D]_{ep} = [D]_e - [D]_e \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} \right]^T [D]_e \left\{ \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} \right]^T [D]_e \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} - \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} [\sigma]^T \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} \right\}^{-1}. \quad (4.8)$$

Будемо будувати функцію навантаження в наступному вигляді:

$$\Phi([\sigma], \chi) = \Phi_l([\sigma]) + h(\chi) \quad (4.9)$$

( $\Phi_l([\sigma])$  – функція, яка визначає граничну поверхню і умову міцності  $\Phi_l([\sigma]) = 0$  в просторі напружень,  $h(\chi)$  – функція зміцнення). Використовуємо умову міцності для плоского деформованого стану бетону, наведене в [41]:

$$\Phi_l([\sigma]) = 0, \quad (4.10)$$

$$\Phi_l([\sigma]) = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2(R_c - R_p)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 4\sigma_{12}^2 - \frac{1}{3}(R_c + R_p)^2. \quad (4.10a)$$

Як вже помічалось,  $R_c$  і  $R_p$  – межі міцності матеріала при осьових стиску і розтязі. В дисертації прийнято:  $R_c = R_{bn} = f_{ck}$ ,  $R_p = R_{btm} = f_{ctk}$ .

Прийmemo

$$h(\chi) = -\tilde{\Phi}_l(\tilde{\sigma}_{11}), \quad (4.11)$$

де через  $\tilde{\Phi}_l(\tilde{\sigma}_{11})$  позначена  $\Phi_l([\sigma])$  при осьовому розтязі (стиску) в умовах плоскої деформації, тобто

$$\tilde{\Phi}_l(\tilde{\sigma}_{11}) = \tilde{\sigma}_{11}^2 + 2(R_c - R_p)\tilde{\sigma}_{11} - \frac{1}{3}(R_c + R_p)^2. \quad (4.12)$$

Так як поточні значення напружень (тобто компоненти вектора  $[\sigma]$ ) повинні лежати на поверхні навантаження, тобто повинні задовольняти рівнянню

$$\Phi([\sigma], \chi) = 0, \quad (4.13)$$

то рівність  $\tilde{\Phi}_l(\tilde{\sigma}_{11}) = \Phi_l([\sigma])$  являє собою квадратне рівняння щодо  $\tilde{\sigma}_{11}$ , вирішуючи яке знаходимо

$$\tilde{\sigma}_{11} = -(R_c - R_p) + \sqrt{(R_c - R_p)^2 + \frac{1}{3}(R_c + R_p)^2 + \Phi_l([\sigma])}. \quad (4.14)$$

Знак плюс перед коренем обраний тому, що при деформаціях, близьких до одноосьового розтягу (стиску), має виконуватися наступне співвідношення  $\tilde{\sigma}_{11} \approx \sigma_{11}$ .

Розглянемо тепер залізобетонний стержень, підданий одноосьовому розтягу або стиску при плоскій деформації. Відповідно до деформаційної теорії пластичності бетону Г.А.Генієва [41] можна записати наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= 3K(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_0, \tau_0 = G(\gamma_0)\gamma_0, \\ K(\varepsilon_0, \gamma_0) &= K_0 g_1(\gamma_0) g_2(\varepsilon_0, \gamma_0), G(\gamma_0) = G_0 g_1(\gamma_0).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Тут  $\sigma_0, \gamma_0$  – октаедричні напруження,

$$g_1(\gamma_0) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\Gamma_c \kappa(\lambda, \delta)} \gamma_0, g_2(\varepsilon_0, \gamma_0) = 1 + \frac{g_0}{2\varepsilon_0} \gamma_0^2. \quad (4.16)$$

$g_0$  – модуль дилатації,  $K_0$  і  $G_0$  – початкові модулі об'ємного стиску і зсуву,  $\Gamma_c$  – гранична інтенсивність деформацій зсуву при чистому зсуві, а  $\kappa(\lambda, \delta)$  визначається за формулою

$$\kappa(\lambda, \delta) = \frac{\lambda(1+\delta)}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2(1+\delta)^2}{4} + 1 + \delta}. \quad (4.17)$$

У формулі (4.17):

$$\lambda = -f_0 \sigma_0 / T, \quad \delta = -e_0 (S/T)^3, \quad S = \sqrt{3}(D_3/2)^{1/3}, \quad (4.18)$$

$D_3$  – третій інваріант девіатора напружень,  $T = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_0$  – інтенсивність дотичних напружень,  $f_0$  і  $e_0$  – безрозмірні коефіцієнти:

$$f_0 = \frac{3T_c(R_c - R_p)}{R_c R_p}, \quad e_0 = \frac{R_c R_p}{3T_c^2} - 1, \quad (4.19)$$

$T_c$  – граничне значення  $T$  при чистому зсуві. Зауважимо, що при даному напружено-деформованому стані стержня

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{(1+\nu)\tilde{\sigma}_{11}}{3}, \tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} |\tilde{\sigma}_{11}| \sqrt{1-\nu+\nu^2}, \\ \varepsilon_0 &= \frac{\mu\tilde{\varepsilon}_{11}}{3}, \gamma_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} |\tilde{\varepsilon}_{11}| \sqrt{1+\mu+\mu^2}\end{aligned}\quad (4.20)$$

( $\tilde{\sigma}_{11}$  – нормальне напруження на площинці, перпендикулярній осі стержня,

$\tilde{\varepsilon}_{11}$  – поздовжня деформація,  $\mu = \nu / (1-\nu)$ ,  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона). Тоді враховуючи що

$$D_3 = (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0), \quad (4.21)$$

формули (4.18) і (4.15) можна представити так:

$$\lambda = -\frac{f_0}{\sqrt{3}} \frac{1+\nu}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \operatorname{sgn}(\tilde{\varepsilon}_{11}), \delta = -\frac{e_0}{2} \frac{(2-\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu+\nu^2)^{3/2}} \operatorname{sgn}(\tilde{\varepsilon}_{11}), \quad (4.22)$$

тому що  $\operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}_{11}) = \operatorname{sgn}(\tilde{\varepsilon}_{11})$ .

З (4.16) і (4.20) знаходимо

$$f(\gamma_0) = 1 - \frac{\sqrt{3(1+\mu+\mu^2)}}{3\Gamma_c \kappa(\lambda, \delta)} |\tilde{\varepsilon}_{11}|, g(\varepsilon_0, \gamma_0) = 1 + \frac{4g_0(1+\mu^2+\mu^4)}{1-\mu} \tilde{\varepsilon}_{11}. \quad (4.23)$$

Використовуючи (4.15), відому формулу  $\nu = [3K(\varepsilon_0, \gamma_0) - 2G(\gamma_0)] / \{2[G(\gamma_0) + 3K(\varepsilon_0, \gamma_0)]\}$  можна представити так:

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{3K_0 g(\varepsilon_0, \gamma_0) - 2G_0}{G_0 + 3K_0 g(\varepsilon_0, \gamma_0)}. \quad (4.24)$$

З (4.17), (4.18) і (4.23) випливає, що при заданому  $\tilde{\varepsilon}_{11}$  рівність (4.24) являє собою рівняння щодо  $\nu$ . Його можна вирішити, наприклад, методом послідовних наближень. Задаваючись початковим значенням  $\nu = \nu_0$  ( $\nu_0$  - коефіцієнт Пуассона бетону в лінійно-пружній стадії) і підставляючи його в праву частину (4.24), після кількох кроків знаходимо значення  $\nu$ . Після цього визначаємо  $g_1(\gamma_0)$  і  $g_2(\varepsilon_0, \gamma_0)$  з (4.23) і за формулою

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{E} \tilde{\varepsilon}_{11}, \tilde{E} = \frac{3K_0 g_1(\gamma_0) g_2(\varepsilon_0, \gamma_0) (1-2\nu)}{1-\nu^2}, \quad (4.25)$$

що є наслідком (4.15) і (4.20), знаходимо  $\tilde{\sigma}_{11}$ . Таким чином може бути побудована функціональна залежність  $\tilde{\sigma}_{11}$  від  $\tilde{\varepsilon}_{11}$ , графік якої для бетону з  $R_c = 19,6 \text{ МПа}$ ,  $R_p = 1,96 \text{ МПа}$  і  $T_c = 3,4 \text{ МПа}$  для випадку стиску представлена рис. 4.2. Апроксимуючи висхідну гілку кубічною параболою, отримуємо

$$\tilde{\sigma}_{11} = A_c \tilde{\varepsilon}_{11} + B_c \tilde{\varepsilon}_{11}^2 + C_c \tilde{\varepsilon}_{11}^3 \quad (4.26)$$



(в разі розтягу  $A_c, B_c, C_c$  замінюються коефіцієнтами  $A_p, B_p, C_p$ ).

В даному випадку

$$d\chi = \tilde{\sigma}_{11} d\tilde{\epsilon}_{11p} \quad (4.27)$$

( $\tilde{\epsilon}_{11p}$  – пластична деформація стержня). Тоді

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \chi} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_{11}} \tilde{E}_{\tau p}, \quad \tilde{E}_{\tau p} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \tilde{\epsilon}_{11p}}. \quad (4.28)$$

Тут  $\tilde{E}_{\tau p}$  – пластичний модуль пружності для плоскої деформації.

Представимо його так

$$\tilde{E}_{\tau p} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \tilde{\epsilon}_{11} - \partial \tilde{\epsilon}_{11e}} = \left( \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{11}}{\partial \tilde{\sigma}_{11}} - \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{11e}}{\partial \tilde{\sigma}_{11}} \right)^{-1} = \frac{\tilde{E}_{\tau} \tilde{E}_0}{\tilde{E}_0 - \tilde{E}_{\tau}}, \quad (4.29)$$

де  $\tilde{E}_{\tau}$  може бути отримано диференціюванням (4.26), а  $\tilde{E}_0 = 3K_0 \frac{1-2\nu_0}{1-\nu_0^2}$

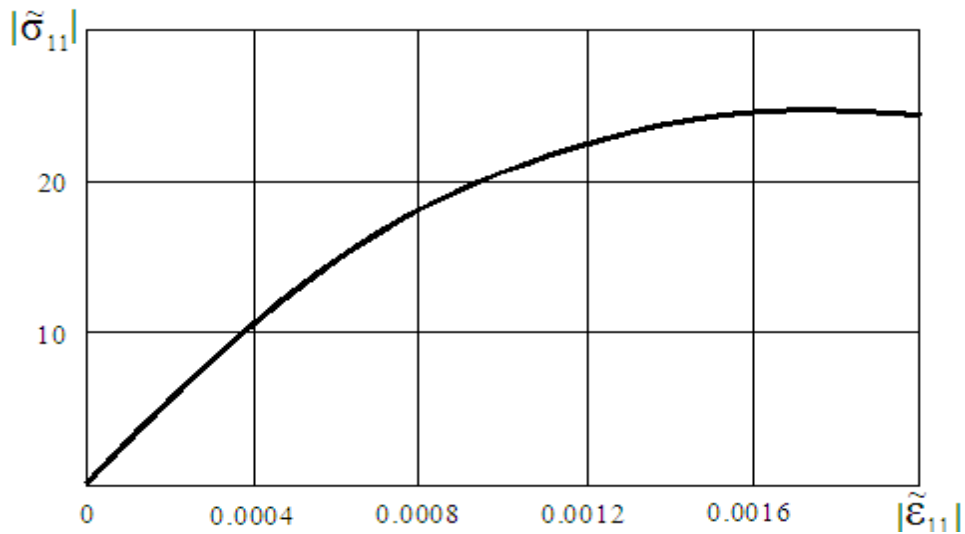


Рис. 4.2. Графік висхідній гілки діаграми деформування бетону

відповідно до (4.25).

З (4.9), (4.11), (4.12) і (4.28) знаходимо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = -\frac{\partial h}{\partial \chi} = -2[\tilde{\sigma}_{11} - (R_c - R_p)] \frac{\tilde{E}_{\tau p}}{\tilde{\sigma}_{11}}. \quad (4.30)$$

Решта величин, що входять в (4.8), легко визначаються з (4.10а):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{11}} &= 2[\sigma_{11} - \sigma_{22} - (R_c - R_p)], \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{22}} &= -2[\sigma_{11} - \sigma_{22} + R_c - R_p], \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{12}} = 8\sigma_{12}.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Переходимо тепер до визначення приростів деформацій  $d[\varepsilon]$ . Враховуючи, що (див. П.1 розділу 2) величина  $\lambda_s$  пов'язана з відносним подовженням осі стержня  $\varepsilon_s$  співвідношенням

$$\lambda_s = 1 + \varepsilon_s,$$

де  $\varepsilon_s \ll 1$ , формулу (2.17) можна записати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(s, x_2) &= \varepsilon_s(s) - B(s, x_2)\phi'(s), \\ \varepsilon_{22}(s, x_2) &= 0.5[A_2^2(s, x_2) + B_2^2(s, x_2) - 1], \\ \varepsilon_{12}(s, x_2) &= 0.5A_2(s, x_2).\end{aligned}\tag{4.32}$$

Тут

$$\begin{aligned}A(s, x_2) &= a_1(s)x_2 + a_2(s)x_2^2 + a_3(s)x_2^3, \quad B(s, x_2) = b_1(s)x_2 + b_2(s)x_2^2, \\ A_2(s, x_2) &= a_1(s) + 2a_2(s)x_2 + 3a_3(s)x_2^2, \quad B_2(s, x_2) = b_1(s) + 2b_2(s)x_2,\end{aligned}\tag{4.33}$$

$s$  – абсциса, а  $x_2$  – ордината розглянутої матеріальної точки  $K$  в недеформованому стані балки,  $\phi$  – кут повороту поперечного перерізу. Тут і нижче штрих означає диференціювання по  $s$ .

З (4.32) і (4.33) отримуємо

$$\begin{aligned}d\varepsilon_{11} &= d\varepsilon_s - dB\phi' - B d\phi', \quad d\varepsilon_{22} = A_2 dA_2 + B_2 dB_2, \quad d\varepsilon_{12} = 0.5 dA_2, \\ dA &= da_1 x_2 + da_2 x_2^2 + da_3 x_2^3, \quad dB = db_1 x_2 + db_2 x_2^2, \\ dA_2 &= da_1 + 2da_2 x_2 + 3da_3 x_2^2, \quad dB_2 = db_1 + 2db_2 x_2.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Використовуємо тепер граничні умови на верхній і нижній гранях балки:

$$d\sigma_{22} = 0, \quad d\sigma_{12} = 0 \quad \text{при } x_2 = \pm h/2.\tag{4.35}$$

З (4.7) випливає

$$\begin{aligned}d\sigma_{11} &= D_{ep,1,1} d\varepsilon_{1,1} + D_{ep,1,2} d\varepsilon_{2,2} + D_{ep,1,3} d\varepsilon_{1,2}, \\ d\sigma_{22} &= D_{ep,2,1} d\varepsilon_{1,1} + D_{ep,2,2} d\varepsilon_{2,2} + D_{ep,2,3} d\varepsilon_{1,2}, \\ d\sigma_{12} &= D_{ep,3,1} d\varepsilon_{1,1} + D_{ep,3,2} d\varepsilon_{2,2} + D_{ep,3,3} d\varepsilon_{1,2}.\end{aligned}\tag{4.36}$$

Підставляючи (4.34) в (4.36), а потім (4.36) в (4.35), отримуємо

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} da_k = W_{i,2} d\xi_2 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (4.37)$$

де

$$\begin{aligned} da_4 &= db_1, da_5 = db_2, da_6 = d\varepsilon_s, d\xi_2 = d\phi', \\ U_{i,1} &= D_{ep,j,2}^{\pm} A_2^{\pm} + \frac{1}{2} D_{ep,j,3}^{\pm}, U_{i,2} = \pm (D_{ep,j,2}^{\pm} A_2^{\pm} + \frac{1}{2} D_{ep,j,3}^{\pm}) h, \\ U_{i,3} &= \frac{3}{4} (D_{ep,j,2}^{\pm} A_2^{\pm} + \frac{1}{2} D_{ep,j,3}^{\pm}) h^2, U_{i,4} = -(\pm D_{ep,j,1}^{\pm} \phi' \frac{h}{2} - D_{ep,j,2}^{\pm} B_2^{\pm}), \\ U_{i,5} &= (-D_{ep,j,1}^{\pm} \phi' \frac{h}{4} \pm D_{ep,j,2}^{\pm} B_2^{\pm}) h, U_{i,6} = D_{ep,j,1}^{\pm}, W_{i,2} = -D_{ep,j,1}^{\pm} B^{\pm}. \end{aligned} \quad (4.37a)$$

Тут  $j = 2$  при  $i = 1, 2$  і  $j = 3$  при  $i = 3, 4$ ; знак  $+$  в дужках  $\pm$  береться при  $i = 1, 3$  і знак  $-$  при  $i = 2, 4$ . Верхній індекс «плюс» означає, що значення відповідної функції ( $D_{ep,j,m}(s, x_2)$ ,  $A_2(s, x_2)$  и т.д.) береться при  $y_2 = h / 2$ , а верхній індекс «мінус» – при  $y_2 = -h / 2$ .

З рівноваги відрізка  $AM$  балки (рис. 4.1) випливає

$$dQ + dV_A + dH_A = 0. \quad (4.38)$$

Тут  $Q$  – головний вектор внутрішніх сил, прикладених до поперечного перерізу. При цьому

$$dQ = dQ_b + dQ_{au} + dQ_{ad} \quad (4.39)$$

( $Q_b$  – головний вектор внутрішніх сил в бетоні,  $Q_{au}$  – у верхній арматурі,  $Q_{ad}$  – в нижній).

Проектуючи рівність (4.38) на осі  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) з урахуванням (4.39) будемо мати

$$dQ_{b,i} + dQ_{au,i} + dQ_{ad,i} + dV_{A,i} + dH_{A,i} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (4.40)$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} dQ_{b,i} &= b \int_{-h/2}^{h/2} d\sigma_{1,i}(y_2) dy_2, dQ_{au,1} = E_a d\varepsilon_{1,1}(h_1) S_1, dQ_{ad,1} = E_a d\varepsilon_{1,1}(-h_2) S_2, \\ dQ_{au,2} &= G_a d\varepsilon_{1,2}(h_1) S_1, dQ_{ad,2} = G_a d\varepsilon_{1,2}(-h_2) S_2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Тут  $E_a$ ,  $G_a$  – модуль пружності і модуль зсуву арматури, вона припускається близькою до ідеально пружної;  $h_1$  – ордината центра ваги верхньої арматури,

$h_2$  – нижній,  $S_1$  і  $S_2$  - площі їх поперечних перерізів.

Використовуючи (4.34) і (4.36), приходимо до наступних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} da_k = W_{i,1} d\zeta_1 + W_{i,2} d\zeta_2 + W_{i,3} d\zeta_3 + W_{i,4} d\zeta_4 \quad (i = 5,6), \quad (4.42)$$

де  $d\zeta_1 = d\phi$ ,  $d\zeta_3 = d\xi$ ,  $d\zeta_4 = d\eta$ ,

$$\begin{aligned} U_{i,1} &= [D_{ep,j,2} A_2]^\# + 0.5\{[D_{ep,j,3}]^\# + \delta_{i,6} G_a (S_1 + S_2)\}, U_{i,2} = 2[D_{ep,j,2} A_2 x_2]^\# + \\ &+ [D_{ep,j,3} x_2]^\# + \delta_{i,6} G_a (S_1 h_1 - S_2 h_2), U_{i,3} = 3[D_{ep,j,2} A_2 x_2^2]^\# + 1.5\{[D_{ep,j,3} x_2^2]^\# + \\ &+ \delta_{i,6} G_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2)\}, U_{i,4} = -[D_{ep,j,1} x_2]^\# \phi' + [D_{ep,j,2} B_2]^\# - \\ &- \delta_{i,5} E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2) \phi', U_{i,5} = -[D_{ep,j,1} x_2^2]^\# \phi' + 2[D_{ep,j,2} B_2 x_2^2]^\# - \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\delta_{i,5} E_a (S_1 h_1^2 - S_2 h_2^2) \phi', U_{i,6} = [D_{ep,j,1}]^\# + \delta_{i,5} E_a (S_1 + S_2),$$

$$W_{5,1} = H_0 (\xi \sin \phi + \eta \cos \phi), W_{i,2} = [D_{ep,j,1} B]^\# + \delta_{i,5} E_a \{S_1 B(h_1) - S_2 B(-h_2)\},$$

$$W_{5,3} = H_0 \sin \phi, W_{5,4} = -H_0 \cos \phi,$$

$$W_{6,1} = H_0 (\xi \cos \phi - \eta \sin \phi), W_{6,3} = -H_0 \cos \phi, W_{6,4} = -H_0 \sin \phi$$

( $j = 1$  при  $i = 5$  и  $j = 3$  при  $i = 6$ ,  $\delta_{i,k}$  – символ Кронекера).

Введено наступні позначення:

$$[f(y_2)]^\# = b \int_{-h/2}^{h/2} f(y_2) dy_2, H_0 = \frac{H}{l^2}, H = \frac{E_b b h^3}{12(1 - \nu_0^2)} + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2),$$

( $\xi = H_A / H_0$ ,  $\eta = V_A / H_0$ ,  $E_b$  – початковий модуль пружності бетону).

Запишемо (4.37) і (4.42) у вигляді єдиної системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} da_k = W_{i,1} d\zeta_1 + W_{i,2} d\zeta_2 + W_{i,3} d\zeta_3 + W_{i,4} d\zeta_4 \quad (i = 1,2,\dots,6), \quad (4.44)$$

причому  $W_{i,j} = 0$  ( $i = 1,2,3,4$ ,  $j = 1,3,4$ ).

Позначимо через  $[d^{(m)}]$  ( $m = 1,2,3,4$ ) рішення лінійних систем рівнянь

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} d_k^{(m)} = W_{i,m} \quad (i = 1,2,\dots,6; m = 1,2,3,4). \quad (4.45)$$

Очевидно, що рішення системи (4.44) може бути представлене в такий спосіб:

$$da_i = d_i^{(1)} d\phi + d_i^{(2)} d\phi' + d_i^{(3)} d\xi + d_i^{(4)} d\eta, \quad (4.46)$$

причому  $d_i^{(j)}$  ( $i = 1,2,\dots,6; j = 1,2,3,4$ ) не залежать від  $d\phi, d\phi', d\xi$  и  $d\eta$ .

Знайдемо тепер головний момент приросту внутрішніх сил в поперечному перерізі щодо осі  $y_3$ , що проходить через центр перерізу і перпендикулярна осям  $y_1$  і  $y_2$ :

$$dM_3 = dM_{b,3} - h_1 dQ_{au,1} + h_2 dQ_{ad,1},$$

$$dM_{b,3} = -b \int_{-h/2}^{h/2} d\sigma_{11} y_2 dy_2. \quad (4.47)$$

Використовуючи (4.34), (4.36) і (4.41), отримуємо

$$dM_3 = \sum_{k=1}^6 U_{7,k} da_k - W_{7,2} d\phi', \quad (4.48)$$

$$U_{7,1} = -[D_{ep,1,2} A_2 y_2]^\# - 0.5\{[D_{ep,1,3} y_2]^\#, U_{7,2} = -2[D_{ep,1,2} A_{22}]^\# -$$

$$-[D_{ep,1,3} y_2^2]^\#, U_{7,3} = -3[D_{ep,1,2} A_2 y_2^3]^\# - 1.5\{[D_{ep,1,3} y_2^3]^\#, U_{7,4} =$$

$$=[D_{ep,1,1} y_2^2]^\# \phi' - [D_{ep,1,2} B_2 y_2]^\# + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2) \phi', U_{7,5} = [D_{ep,1,1} y_2^3]^\# \phi' -$$

$$- 2[D_{ep,1,2} B_2 y_2^2]^\# + E_a (S_1 h_1^3 - S_2 h_2^3) \phi', U_{7,6} = -[D_{ep,1,1} y_2]^\# - E_a (S_1 h_1 -$$

$$- S_2 h_2), W_{7,2} = -[D_{ep,1,1} B y_2]^\# + E_a \{S_1 B(h_1) h_1 - S_2 B(-h_2) h_2\}. \quad (4.49)$$

Підставивши (4.46) в (4.48), матимемо

$$dM_3 = Y_1 d\phi + Y_2 d\phi' + Y_3 d\xi + Y_4 d\eta,$$

$$Y_j = \sum_{k=1}^6 U_{7,k} da_k^{(j)} - \delta_{1,j} W_{7,2} \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (4.50)$$

Використовуючи (4.38), неважко переконатися в тому, що

$$dQ_2 = R_1 d\phi + R_2 d\xi + R_3 d\eta, \quad (4.51)$$

$$R_1 = -H_0 (\xi \cos \phi + \eta \sin \phi), R_2 = -H_0 \sin \phi, R_3 = H_0 \cos \phi.$$

Скористаємося співвідношенням [262]

$$dM'_3 = -dQ_2.$$

Підставивши сюди (4.50) і (4.51), приходимо до наступного диференціального рівняння:

$$d\phi'' + Z_1 d\phi' + Z_2 d\phi + Z_3 d\xi + Z_4 d\eta = 0, \quad (4.52)$$

$$Z_1 = (Y'_1 + Y_2)/Y_1, Z_2 = (Y'_2 - R_1)/Y_1, Z_3 = (Y'_3 - R_2)/Y_1, Z_4 = (Y'_4 - R_3)/Y_1.$$

Отже, в цьому параграфі побудовано диференціальне рівняння (4.52) згину елемента залізобетонної каркасної споруди відносно приростів кутів

повороту поперечних перерізів для покрокового методу вирішення квазістатичних і динамічних задач.

#### 4.2 Дослідження квазістатичного згину залізобетонної консольної балки при складному навантаженні

Досліджується плоский згин поздовжньо стиснутої консольної залізобетонної балки з урахуванням геометричної та фізичної нелінійностей і пластичності бетону. При цьому на відміну від розділу 3 навантаження балки не передбачається простим і тому для опису напружено-деформованого стану в бетоні замість деформаційної теорії пластичності використовується теорія пластичної течії. Необхідно побудувати графік залежності прогину кінця залізобетонної консольної балки від часу (рис. 4.3, на ньому показані позитивні напрямки силових факторів), якщо задана залежність величин сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  від часу. Сили  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) і  $P$  являють собою задане навантаження, а  $V_i, H_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – складові головного вектора сил, прикладених до балки лівіше початку  $i$ -ої ділянки. При цьому передбачається, що навантаження балки поздовжньою силою  $P$  було зроблено попередньо (до навантаження силами  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )), а зміна цих сил в часі досить повільна для того, щоб можна було знехтувати інерційними ефектами, тобто вважати задачу не динамічною, а квазістатичною.

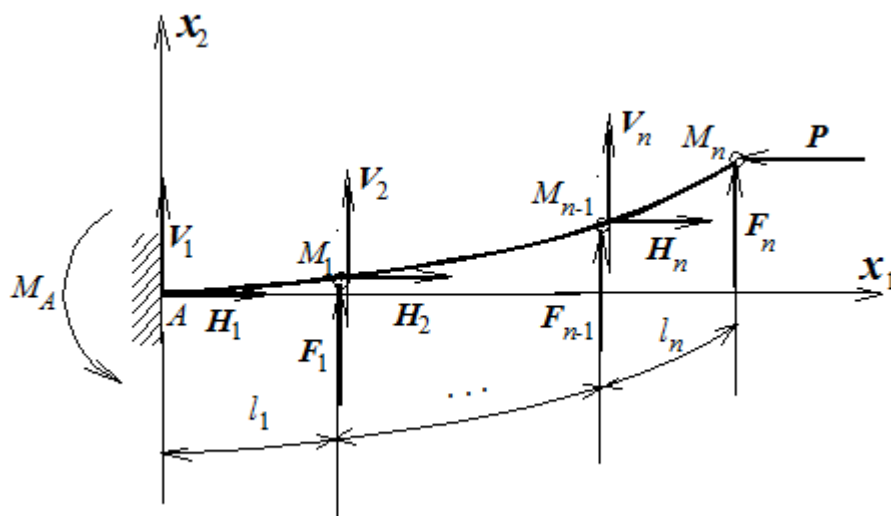


Рис. 4.3 Схема складного навантаження залізобетонної консольної балки

На початковому етапі (назвемо його першим) передбачається, що сили  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) відсутні, а алгебраїчна величина сили  $P$  убуває від нуля до деякого максимального по модулю значення  $-P_{max}$ , яке в подальшому залишається незмінним. Цей процес не передбачається монотонним, тому для дослідження напружено-деформованого стану балки на цьому етапі будемо використовувати теорію пластичної течії.

На кожному кроці першого етапу задаємося приростом поздовжньої сили  $dP$ . Збільшення напруження  $\sigma_{11}$  (з приводу позначень див. П.1) у всіх точках балки рівні

$$d\sigma_{11} = -\frac{dP}{S_{np}}. \quad (4.53)$$

Тут  $S_{np}$  – приведена площа поперечного перерізу балки:

$$S_{np} = S + E_a(S_1 + S_2)/E_0$$

( $S$  – площа бетону,  $S_1$  и  $S_2$  – площі верхньої і нижньої арматур,  $E_0$  – початковий модуль пружності бетону,  $E_a$  – модуль пружності арматури). Крім того, очевидно, що

$$d\sigma_{22} = d\sigma_{12} = 0. \quad (4.54)$$

Будемо вважати, що на першому етапі матеріал бетону залишається лінійно пружним. Тоді можна записати, що

$$d[\sigma] = [D]_e d[\varepsilon]. \quad (4.55)$$

Тут  $d[\sigma] = [d\sigma_{11}, d\sigma_{22}, d\sigma_{12}]$ ,  $d[\varepsilon] = [d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{12}]$ ,  $[D]_e$  – початкова матриця пружності. З (4.55) отримуємо

$$d[\varepsilon] = [C]_e d[\sigma], [C]_e = [D]_e^{-1}. \quad (4.56)$$

Визначивши з (4.53), (4.54) і (4.56)  $d[\varepsilon]$ , вважаємо на першому кроці

$$[\varepsilon] = d[\varepsilon], [\sigma] = d[\sigma].$$

На наступних кроках через знайдені значення  $[\sigma]$  на попередньому кроці визначаємо матрицю  $[D]_{ep}$  за формулою (5.8), а потім обчисливши  $d[\sigma]$  за формулами (4.53) – (4.54), знаходимо  $d[\varepsilon]$ :

$$d[\varepsilon] = [C]_{ep} d[\sigma], [C]_{ep} = [D]_{ep}^{-1}. \quad (4.57)$$

Нові значення  $[\sigma]$  і  $[\varepsilon]$  визначаються так:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon]_{\text{поп}} + d[\varepsilon], [\sigma] = [\sigma]_{\text{поп}} + d[\sigma] \quad (4.58)$$

( $[\varepsilon]_{\text{поп}}$  і  $[\sigma]_{\text{поп}}$  – значення  $[\sigma]$  і  $[\varepsilon]$ , знайдені на попередньому кроці).

Переходимо тепер до наступного (другого) етапу, на якому з'являються і починають змінюватися сили  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Тоді виявиться, що

$$\zeta_i = -\frac{Pl_i^2}{H}, \eta_i = -\frac{l_1^2}{H} \sum_{k=1}^{n-i+1} F_k, d\zeta_i = 0, d\eta_i = -\frac{l_1^2}{H} \sum_{k=1}^{n-i+1} dF_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.59)$$

$dF_k$  – приріст сили  $F_k$  на даному етапі, а  $\zeta_i$  і  $\eta_i$  визначаються за формулами

$$\zeta_i = \frac{H_i l_i^2}{H}, \eta_i = \frac{V_i l_i^2}{H} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.60)$$

На кожному кроці другого етапу передбачається, що функції  $\phi(s)$  і  $\phi'(s)$ , а також  $a_k(s)$  ( $k = 1, 2, 3$ ),  $b_k(s)$  ( $k = 1, 2$ ), які є коефіцієнтами функцій  $A(s, x_2)$  і  $B(s, x_2)$  (див. (4.33)), і векторні функції  $[\sigma](s, x_2)$  і  $[\varepsilon](s, x_2)$  вже визначені на попередньому етапі. Тоді відповідно до формул (4.30) і (4.31) можуть бути знайдені величини  $\frac{\partial F}{\partial [\sigma]}$  і  $\frac{\partial F}{\partial \chi}$ , а отже, і елементи матриці  $[D]_{ep}$

для усіх  $x_2$  і  $s$ .

Далі за формулами (4.37a), (4.42a) і (4.48a) знаходимо значення коефіцієнтів матриці-функції  $U_{i,k}(s)$  ( $i = 1, 2, \dots, 7; k = 1, 2, \dots, 10$ ) для ряду значень  $s = s_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ), а через них - значення функцій  $d_i^{(j)}(s_m)$  ( $i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3, 4; m = 1, 2, \dots, N$ ) шляхом вирішення лінійних систем рівнянь (4.45). Тепер використовуючи формулу (4.49), можна обчислити значення величин  $y_j(s_m)$  ( $j = 1, 2, 3, 4; m = 1, 2, \dots, N$ ). З них шляхом інтерполяції (наприклад, многочленом) будуємо функції  $Y_j(s)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ),



що дозволяє побудувати коефіцієнти

$$Z_1(s) = \frac{Y_1'(s) + Y_2(s)}{Y_1(s)}, Z_k(s) = \frac{Y_k'(s) - R_{k-1}(s)}{Y_1(s)} \quad (k = 2,3,4) \quad (4.61)$$

диференціального рівняння

$$d\phi'' + Z_1(s)d\phi' + Z_2(s)d\phi + Z_3(s)d\xi + Z_4(s)d\eta = 0 \quad (4.62)$$

для кожної з ділянок балки. В (4.61) через  $R_k(s)$  ( $k = 1,2,3$ ) позначені функції

$$R_1 = -H_0(\xi \cos \phi + \eta \sin \phi), R_2 = -H_0 \sin \phi, R_3 = H_0 \cos \phi. \quad (4.63)$$

Граничні умови диференціального рівняння (4.62) такі:

$$\begin{aligned} d\phi(0) &= 0, \\ Y_1(L)d\phi(L) + Y_2(L)d\phi'(L) &= -Y_3(L)d\xi - Y_4(L)d\eta \quad (L = l_1 + l_2 + \dots + l_n). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Враховуючи що функція  $d\eta(s)$  терпить розрив в точках  $s_i = \sum_{k=1}^i l_k$

( $i = 1,2,\dots,n-1$ ), то для полегшення рішення рівняння (4.62) його можна представити як систему диференціальних рівнянь, заданих на ділянках  $s_{i-1} \leq s \leq s_i$  ( $i = 1,2,\dots,n; s_0 = 0$ ) з додаванням граничних умов, що виражають безперервність  $d\phi$  і  $d\phi'$  в точках  $s_i$  ( $i = 1,2,\dots,n-1$ ). За допомогою досить простої підстановки ці рівняння можуть бути приведені до відрізка  $[0,1]$ . В результаті рішення отримуємо функції  $d\phi(s)$  і  $d\phi'(s)$ . За допомогою формули

$$dv(s) = \int_0^s \sin d\phi(x) dx \quad (4.65)$$

можна визначити приріст прогину балки при будь-якому  $s$ .

Далі з (4.46) знаходимо

$$\begin{aligned} da_1 &= d_1^{(1)}d\phi + d_1^{(2)}d\phi' + d_1^{(3)}d\xi + d_1^{(4)}d\eta, \\ da_2 &= d_2^{(1)}d\phi + d_2^{(2)}d\phi' + d_2^{(3)}d\xi + d_2^{(4)}d\eta, \\ da_3 &= d_3^{(1)}d\phi + d_3^{(2)}d\phi' + d_3^{(3)}d\xi + d_3^{(4)}d\eta, \\ db_1 &= d_4^{(1)}d\phi + d_4^{(2)}d\phi' + d_4^{(3)}d\xi + d_4^{(4)}d\eta, \\ db_2 &= d_5^{(1)}d\phi + d_5^{(2)}d\phi' + d_5^{(3)}d\xi + d_5^{(4)}d\eta, \\ d\varepsilon_s &= d_6^{(1)}d\phi + d_6^{(2)}d\phi' + d_6^{(3)}d\xi + d_6^{(4)}d\eta. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Потім з (4.34) визначаємо  $dA$ ,  $dA_2$ ,  $dB$ ,  $dB_2$ ,  $d\varepsilon_{11}$ ,  $d\varepsilon_{22}$ ,  $d\varepsilon_{12}$ , а з (36)[1]  $d\sigma_{11}$ ,  $d\sigma_{22}$ ,  $d\sigma_{12}$ . Залишилося визначити нові значення  $\phi(s)$ ,  $\phi'(s)$ ,  $v(s)$ ,  $a_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $b_i(s)$  ( $i = 1, 2$ ),  $\varepsilon_{11}(s, x_2)$ ,  $\varepsilon_{22}(s, x_2)$ ,  $\varepsilon_{12}(s, x_2)$ ,  $\sigma_{11}(s, x_2)$ ,  $\sigma_{22}(s, x_2)$ ,  $\sigma_{12}(s, x_2)$ :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{\text{поп}} + d\phi, \quad \phi' = \phi'_{\text{поп}} + d\phi', \quad v = v_{\text{поп}} + dv, \\ a_i &= a_{i,\text{поп}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad b_i = b_{i,\text{поп}} \quad (i = 1, 2), \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11,\text{поп}} + d\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22,\text{поп}} + d\varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{\text{поп}} + d\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{11} &= \sigma_{11,\text{поп}} + d\sigma_{11}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22,\text{поп}} + d\sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12,\text{поп}} + d\sigma_{12}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Індекс «поп» означає, що це значення відповідної величини, визначене в кінці попереднього кроку. Таким чином, розглянутий крок завершено і можна переходити до наступного.

**Приклад 4.1.** Розглядається квазістатична задача для консольної балки, зображеної на рис. 2.5. Нехай  $l = 8 \text{ м}$ ,  $F_1(t) = 14,67 \sin(2\pi t/T) \text{ кН}$ ,  $T = 10 \text{ с}$ . Розміри поперечного перерізу і характеристики бетону і арматури прийняті такими ж, як і в п.3 розділу 3:  $b = 0,8 \text{ м}$ ,  $h = 0,28 \text{ м}$ , армування симетричне:  $S_1 = S_2 = 18,5 \text{ см}^2$ ; арматура: сталь марки А-III; бетон:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 19 \text{ МПа}$ ,  $R_p = 1,9 \text{ МПа}$ ,  $\Gamma_c = 0,583 \cdot 10^{-3}$ . Поздовжня сила  $P = -490,5 \text{ кН}$ . Прийmemo крок обчислень за часом  $dt = 0,25 \text{ с}$ . Тоді  $dF_1 = F_1(t + dt) - F_1(t) \approx 2,934\pi \cos(0,2\pi t) dt$ . Далі слідуємо алгоритму, викладеному вище. На рис. 4.4 представлений графік зміни  $v(l_1)$  в залежності від часу протягом перших 40 секунд. Помітно накопичення залишкових деформацій: форма осі балки, яка

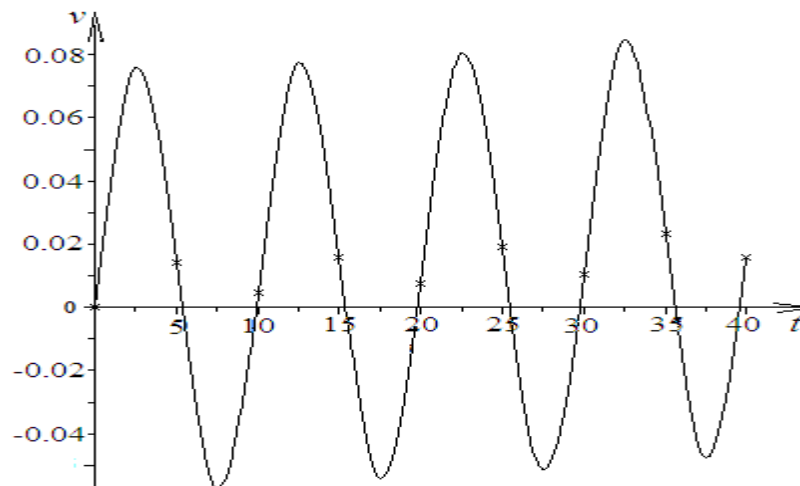


Рис. 4.4 Зміна прогину консолі при гармонійній зміні сили  $F_1$  з течією часу

перестає бути прямолінійною, так як  $v(l_1) > 0$  при  $t = t_k$  (на рис. 4.4 ці значення  $v(l_1)$  позначені зірочкою). На рис. 4.5 показаний графік залежності прогину на кінці консолі  $v(l_1)$  від зміни параметра  $\beta$  (тобто від зміни сили  $F_1$ ). На ньому також помітно накопичення залишкових деформацій з течією часу.

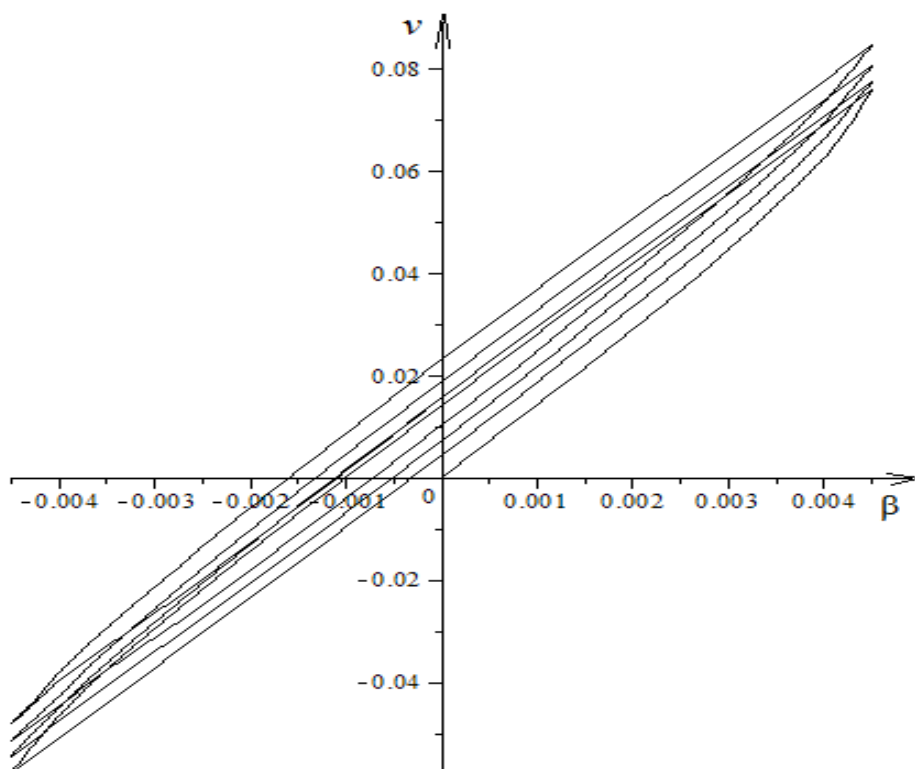


Рис. 4.5 Графік зміни максимального прогину консолі в залежності від амплітудного значення гармонійної сили  $F_1$

**Приклад 4.2.** Нехай тепер  $n = 2, l_1 = 0,4\text{ м}, l_2 = 0,4\text{ м}, F_1(t) = 9,777 \sin(2\pi t/T_1)$  кН,  $T_1 = 20\text{ с}, F_2(t) = 9,777 \sin(2\pi t/T_2)$  кН,  $T_2 = 10\text{ с}$ . Розміри поперечного перерізу і характеристики бетону і арматури ті ж, що і в попередньому прикладі. На рис. 4.6 наведено графік залежності  $v(l)$  ( $l = l_1 + l_2$ ) від часу. Відповідно до положення зірочок (а вони означають те саме, що і в попередньому прикладі) можна судити про поступове накопичення залишкових згинальних деформацій.

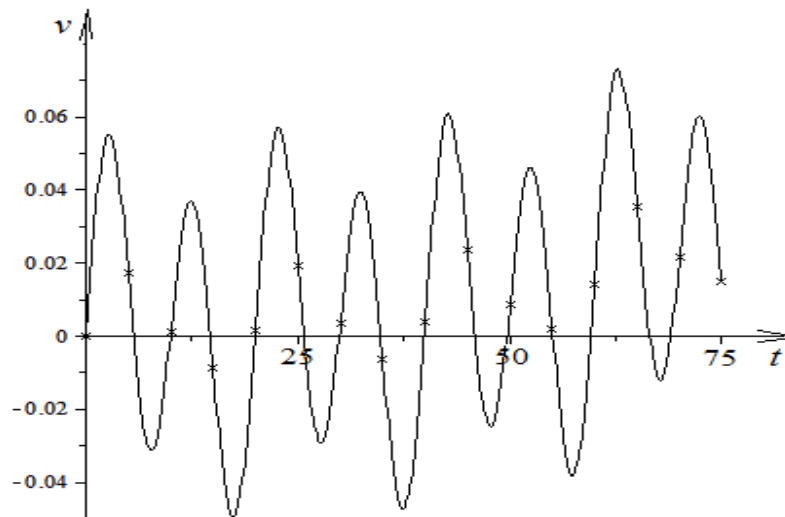


Рис. 4.6 Графік руху вантажу на колоні

У цьому параграфі викладено побудову методу вирішення квазістатичної задачі згину залізобетонної консольної балки при складному навантаженні

### 4.3 Дослідження нестационарних коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі під дією вертикальних і горизонтальних змінних сил

Розглядаються вимушені нестационарні коливання вантажу  $M$ , розташованого на кінці залізобетонної колони, що знаходиться під дією сили ваги вантажу, а також вертикальної  $G(t)$  і горизонтальної  $F(t)$  змінних сил (рис. 4.7), причому зміна цих сил з часом не передбачається синхронною.

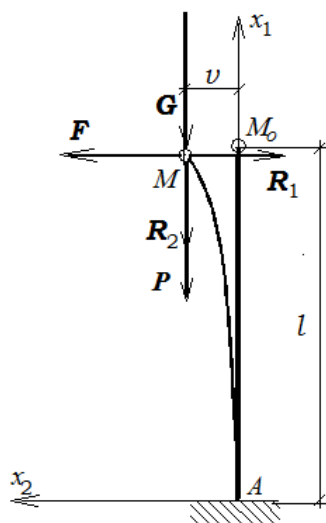


Рис.4.7 Сили, що діють на вантаж, розташований на залізобетонній колоні

Будемо вважати, що навантаження балки відбувається в два етапи: перший етап – квазістатичне прикладення стискаючої поздовжньої сили  $P$ , при якому величина сили повільно зростає від нуля до  $P$ . Методи визначення напружено-деформованого стану в кінці першого етапу викладені в п. 4.1. Потім прикладаються сили  $G(t)$  і  $F(t)$ , причому  $G(0) = 0$  і  $F(0) = 0$  (відлік часу починається з моменту початку дії цих сил).

Для побудови закону руху вантажу  $M$  будемо використовувати покроковий метод лінійного прискорення. На підставі цього методу маємо (п. 4.2)

$$\Delta \dot{v} = \ddot{v}_0 \Delta t + \Delta \ddot{v} \frac{\Delta t}{2}, \quad \Delta v = \dot{v}_0 \Delta t + \ddot{v}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2} + \Delta \ddot{v} \frac{(\Delta t)^2}{6}. \quad (4.68)$$

Тут  $\dot{v}_0$  і  $\ddot{v}_0$  – значення швидкості і прискорення точки на початку кроку, а  $\Delta \dot{v}$  і  $\Delta \ddot{v}$  – їх прирости,  $\Delta \dot{v}$  – приріст прогину.

Для визначення приросту горизонтальної реакції консолі  $\Delta R_1$  складемо основне рівняння динаміки і спроектуємо його на вісь  $y$ . В результаті матимемо

$$m \Delta \ddot{v} = \Delta F + \Delta R_1. \quad (4.69)$$

Знайдемо коефіцієнт податливості. Методами п. 4.1 можна побудувати залежність

$$\Delta v = \Delta v(\Delta R_1) \quad (4.70)$$

на даному етапі, тобто при визначеному на попередньому кроці напружено-деформованому стані консолі.

Далі, виражаючи  $\Delta \ddot{v}$  через  $\Delta v$  з другої рівності (4.68) і підставляючи в (4.69), отримуємо наступне рівняння щодо  $\Delta R_1$ :

$$Y(\Delta R_1) = 0, \quad (4.71)$$

де

$$Y(\Delta R_1) = m \frac{6}{(\Delta t)^2} [\Delta v(\Delta R_1) - \dot{v}_0 \Delta t - \ddot{v}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2}] - \Delta F - \Delta R_1 \quad (4.71a)$$

( $\dot{v}_0$  і  $\ddot{v}_0$  визначені на попередньому етапі). Як показують обчислення, проведені на основі алгоритму, наведеного в п. 4.1,  $Y(\Delta R_1)$  є монотонною функцією, а тому (4.71) має єдине рішення. Визначивши з (4.71)  $\Delta R_1$ , з (4.69) знаходимо  $\Delta \ddot{v}$ . Далі з (4.68) визначаємо  $\Delta \dot{v}$  і  $\Delta v$ . Приймавши  $\Delta R_1$  в якості  $dF_1$ , переходимо до вирішення статичної задачі, розглянутої в п.2 при числі ділянок  $n = 1$ . В результаті отримуємо значення приростів напружень і деформацій в точках консолі, а отже, напружено-деформований стан колон в кінці кроку, що дозволить побудувати функцію  $\Delta v(\Delta R_1)$  на наступному кроці.

Для посилення стійкості процесу обчислень можна використовувати модифікацію Вільсона методу лінійного прискорення. В цьому випадку при вирішенні рівняння (4.71) у натуральному вираженні (4.71а) для  $Y(\Delta R_1)$  часовий крок повинен бути замінений на  $\theta \Delta t$ , де  $\theta$  – коефіцієнт, більший одиниці, а потім замість визначення  $\Delta \ddot{v}$  з (4.69) використовується вираз

$$\Delta \ddot{v} = \frac{1}{\theta m} (\Delta F + \Delta R_1). \quad (4.72)$$

**Приклад 4.3. Дослідження динамічної стійкості одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі при дії змінної вертикальної сили.**

Вантаж масою  $20 T$  розташований на вертикальній залізобетонній колоні. Поперечний переріз колони прямокутний. Розміри поперечного перерізу: ширина  $b = 0.8$  м, висота  $h = 0.28$  м. Довжина колони  $l = 12$  м. Армування симетричне:  $S_1 = S_2 = 18,5 \text{ см}^2$ . Сталь марки А-III, характеристики бетону:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4$  МПа,  $R_c = 19$  МПа,  $R_p = 1,9$  МПа,  $\Gamma_c = 0.583 \cdot 10^{-3}$ . Розглядаються коливання консолі в площині найменшої жорсткості поперечного перерізу.

На вантаж у момент часу  $t = 0$  с впливає синусоїдальний імпульс (рис. 4.8) з параметрами  $t_0 = 1,73$  с,  $F_0 = 0,7$  кН, що призводить до відхилення вантажу з положення рівноваги і вільних коливань. У цей момент на колону починає діяти вертикальна гармонійна сила  $G(t) = G_0 \sin p_0 t$ ,  $G_0 = 83,4$  кН. При  $p_0 \ll 2v_0$  ( $v_0 = 0,321 \text{ с}^{-1}$  – частота вільних лінійних коливань) вплив поздовжньої

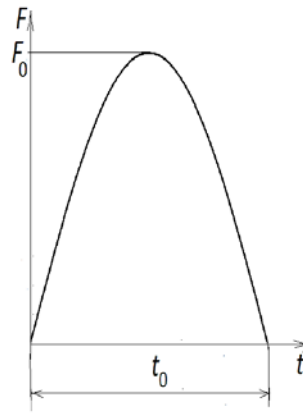


Рис. 4.8 Графік імпульсу, що діє на вантаж

сили  $G(t)$  практично невідчутний - коливання, викликані імпульсом, швидко згасають (графік 1 на рис. 4.9,  $p_0 = 0,321 \text{ c}^{-1}$ ; на графіку  $t$  - в секундах,  $v$  - прогин на кінці колони в метрах). при наближенні  $p_0$  до частоти  $\nu_p = 2\nu_0$  коливання перестають бути затухаючими (графік 2,  $p_0 = 0,583 \text{ c}^{-1}$ ), а при  $p_0 = \nu_p$  спостерігається зростання амплітуди коливань. Явище, при якому гармонійна поздовжна сила викликає розгойдування поперечних коливань балки, називається параметричним резонансом [22,97]. При подальшому збільшенні частоти поздовжньої сили коливання знову стають затухаючими.

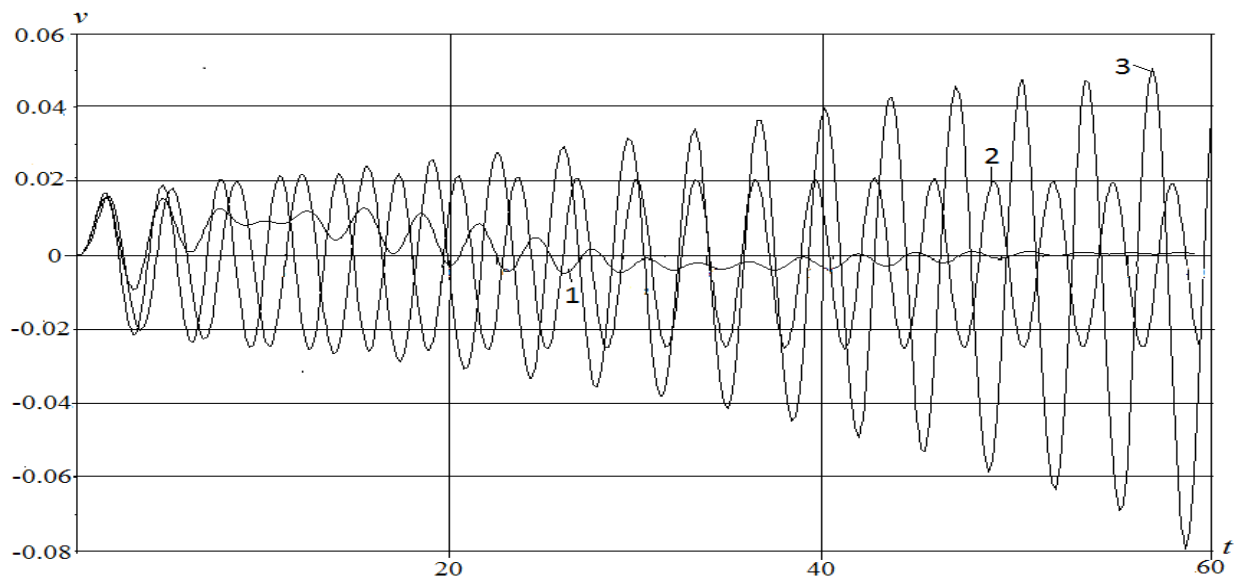


Рис. 4.9 Графіки руху вантажу при відсутності (1) і наявності (2,3) гармонійної поздовжньої сили

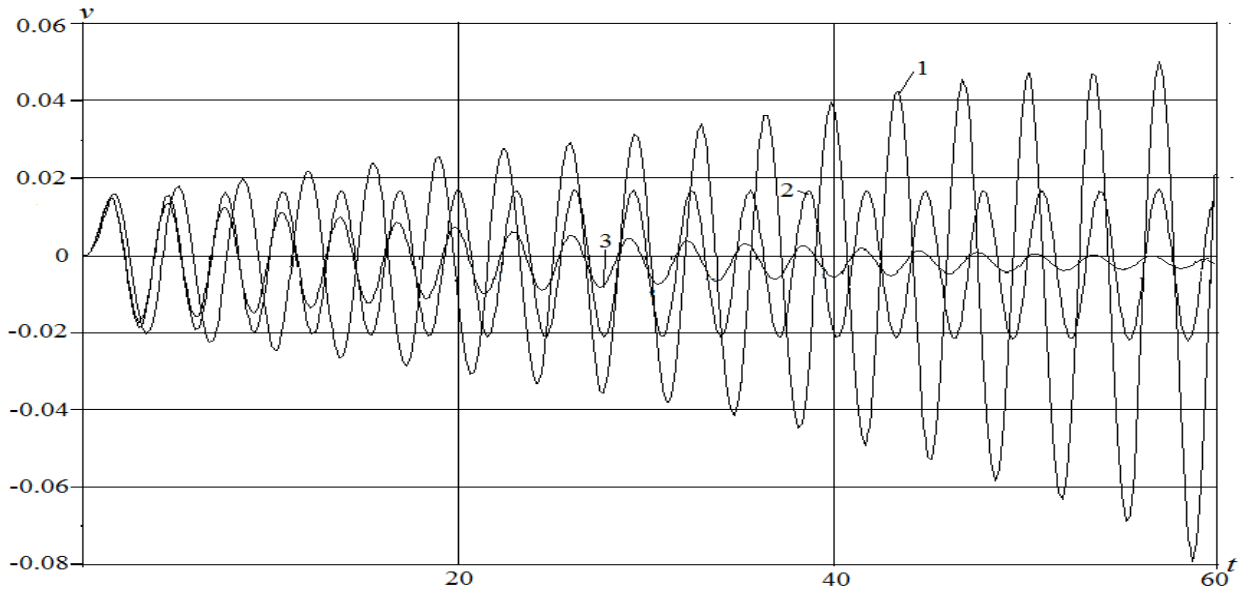


Рис. 4.10 Графіки руху вантажу при різних амплітудних значеннях гармонійної поздовжньої сили

На рис. 4.10 наведені графіки руху вантажу при різних значеннях  $G_0$ : графік 1 – при  $G_0 = 83,4 \text{ кН}$ , графік 2 – при  $G_0 = 73,6 \text{ кН}$ , графік 3 – при  $G_0 = 49,1 \text{ кН}$ . Неважко помітити, що центр коливань зміщується від точки  $v = 0$  внаслідок накопичення залишкових деформацій (особливо при наявності параметричного резонансу).

**Приклад 4.4.** Дослідження динамічної стійкості одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі при дії вертикальної і горизонтальної змінних сил. Нехай тепер на вантаж діють одночасно вертикальна і горизонтальна гармонійні сили:

$$N(t) = N_0 \sin p_0 t, F(t) = F_0 \sin q_0 t.$$

Розглянемо спочатку випадок, коли  $q_0 = v_0$ , тобто резонансний випадок. При відсутності пульсуючої поздовжньої сили (тобто при  $G_0 = 0$ ) будемо мати наростаючі вимушені коливання з обмеженою максимальною амплітудою. Так як амплітуда поперечної сили мала (прийнято  $F_0 = 0,136 \text{ кН}$ ), то максимальна амплітуда коливань виявляється малою (рис. 4.11, графік 1).



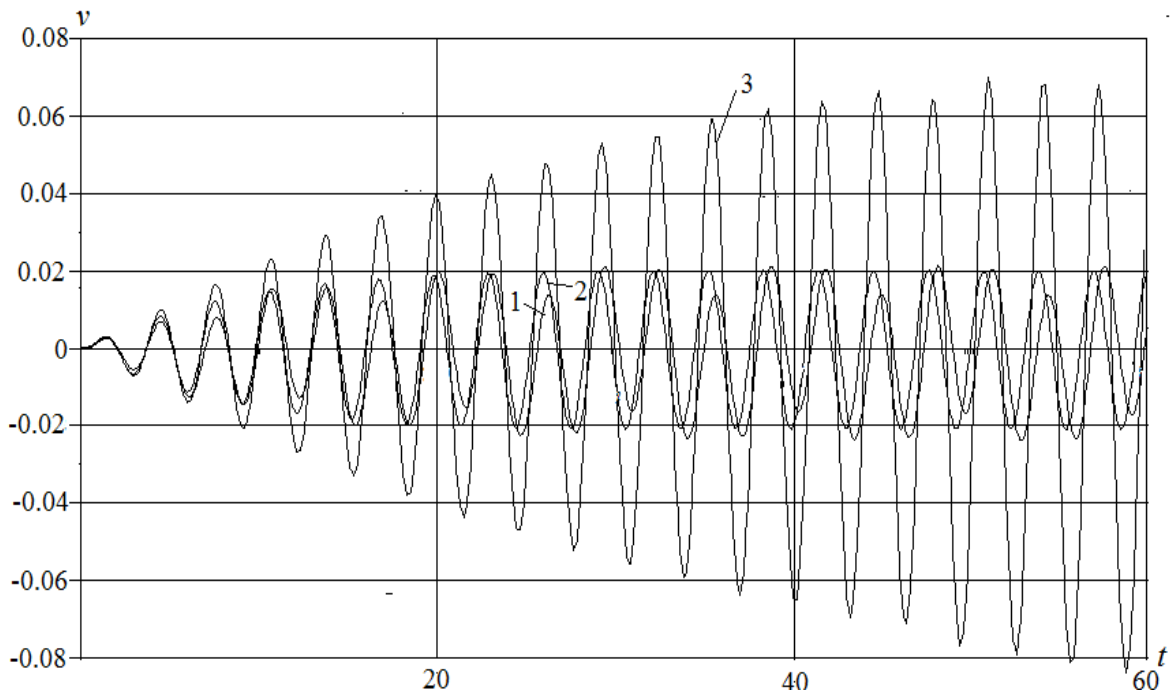


Рис. 4.11 Графіки руху вантажу

При  $N_0$ , відмінному від нуля, і  $p_0$ , досить віддаленому від  $v_p$ , графіки коливань практично збігаються з 1 (графік 2 відповідає  $G_0 = 61,3$  кН і  $p_0 = 0,428$  с<sup>-1</sup>) і при  $p_0 = v_p$  (графік 3) спостерігається розгойдування коливань, тобто спостерігається параметричний резонанс.

Розглянемо тепер випадок, коли  $q_0 \neq v_0$ . Графік вимушених коливань (при  $F_0 = 0,51$  кН і  $N_0 = 0$ ) зображений на рис. 4.12 (графік 1).

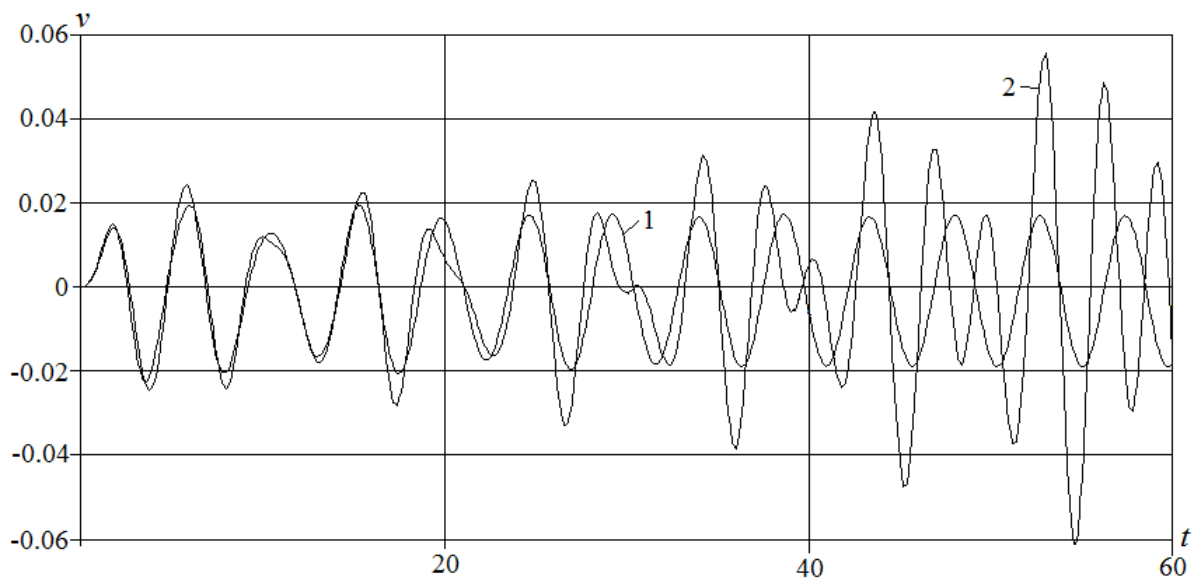


Рис. 4.12 Графіки коливань вантажу

Прикладемо тепер гармонійну поздовжню силу  $N(t)$  з  $N_0 = 98,1 \text{ кН}$  і  $p_0 = v_p$ . Переміщення вантажу в цьому випадку зображені у вигляді графіка 2. У наявності присутність параметричного резонансу.

У цьому параграфі викладено побудову алгоритму дослідження нестационарних коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі під дією вертикальних і горизонтальних змінних сил. В якості прикладів проведені дослідження динамічної стійкості одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі при дії змінної вертикальної сили і при дії вертикальної і горизонтальної змінних сил.

#### **4.4 Побудова варіанта методу граничних елементів, для дослідження статичних та динамічних задач пружнопластичного згину елементів залізобетонних каркасних споруд**

У попередніх параграфах було запропоновано алгоритм вирішення задач статичної і динамічної роботи каркасних будівель з урахуванням нелінійного деформування і пластичності бетону, заснований на вирішенні систем диференціальних рівнянь з змінними коефіцієнтами. У цьому параграфі пропонується використовувати для вирішення указаних задач метод граничних елементів [14,19,59,106,155-167,320-322].

У параграфі 1 цього розділу було побудовано диференціальне рівняння (4.52) для визначення приросту кутів повороту поперечних перерізів залізобетонної балки при покроковому методі рішення. Запишемо його в наступному вигляді:

$$d\phi'' + Z_1(s)d\phi' + Z_2(s)d\phi = -Z_3(s)d\xi - Z_4(s)d\eta. \quad (4.73)$$

Тут  $\phi$  — кут повороту поперечного перерізу балки (воно передбачається прямокутним,  $b$  — ширина,  $h$  — висота),  $s$  — довжина відрізка дуги осі балки між її лівим кінцем і даним поперечним перерізом (рис.4.12),  $\xi = np_x H_A / H_0$ ,  $\eta$

$$= np_x V_A / H_0, \quad H_0 = H / l^2, \quad H = \frac{E_b b h^3}{12(1 - \nu_0^2)} + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2), \quad l — довжина$$

відрізка  $AB$  осі балки,  $E_b$  — початковий модуль пружності бетону,  $\nu_0$  — його

початковий коефіцієнт Пуассона,  $E_a$  — модуль пружності арматури,  $S_1$  і  $S_2$  — площі поперечних перерізів верхньої і нижньої арматур,  $h_1$  і  $h_2$  — відстані від центру перерізу до арматур,  $H_A$  і  $V_A$  — горизонтальна і вертикальна складові головного вектора зовнішніх сил, прикладених до балки (або рами) лівіше точки  $A$ . Штрих означає похідну по  $s$ . Слід зауважити, що в даному параграфі, так само як і в п. 1-3, розглядається випадок, коли навантаження являє собою систему зосереджених сил, прикладених в вузлових точках балки або рами.

Як показали численні приклади розв'язання задач статички і динаміки за допомогою вказаного вище алгоритму функції  $Z_i(s)$  ( $i = 1,2,3,4$ ) неперервні і добре апроксимуються многочленами невисокого ступеня (третього-четвертого) за методом найменших квадратів, тобто в подальшому ми вважаємо,  $Z_i(s)$  ( $i = 1,2,3,4$ ) є многочленами ступеня  $n \leq 4$ :

$$Z_i(s) = \sum_{k=0}^n Z_{i,k} s^k \quad (i = 1,2,3,4). \quad (4.74)$$

У відповідності зі схемою застосування методу граничних елементів до стержневих систем [14,19,59,106,155-167,196-202,320-322] необхідно знайти фундаментальну систему  $f_i(s)$  ( $i = 1,2$ ) розв'язків задачі Коші для однорідного рівняння, відповідного рівняння (4.73). Ці рішення будемо шукати у вигляді степеневих рядів:

$$f_i(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,k} s^k \quad (i = 1,2,3), \quad (4.75)$$

причому

$$f_i'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,k+1} (k+1) s^k, \quad f_i''(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,k+2} (k+1)(k+2) s^k. \quad (4.75a)$$

Після підстановки рядів (4.74), (4.75) і (4.75a) в рівняння (4.73), їх перемноження і складання прирівнюємо коефіцієнти при різних ступенях  $s$  в виразі, що стоїть в лівій частині (4.73), нулю. В результаті приходимо до наступного рекурентного співвідношення:

$$f_{i,k+2} = -\frac{\sum_{m=0}^k f_{i,m+1}(m+1)Z_{1,k-m} + \sum_{m=0}^k f_{i,m}Z_{2,k-m}}{(k+1)(k+2)} \quad (i=1,2). \quad (4.76)$$

Для побудови функції  $f_1(s)$  вважаємо  $f_{1,0} = 1$ ,  $f_{1,1} = 0$  і приймаємо в формулі (4.76)  $k = 0$ . У результаті отримуємо  $f_{1,2}$ , потім прирівнюємо  $k = 1$  і знаходимо  $f_{1,3}$  і т.д. Зупиняючись на деякому етапі  $N$ , отримуємо наближене вираження для  $f_1(s)$  у вигляді полінома.

Для побудови функції  $f_2(s)$  вважаємо  $f_{2,0} = 0$ ,  $f_{2,1} = 1$  і повторюємо процедуру знаходження коефіцієнтів за допомогою співвідношення (4.76).

Таким чином, отримуємо наближені вирази

$$f_i(s) = \sum_{k=0}^N f_{i,k} s^k \quad (i=1,2). \quad (4.77)$$

Для побудови частинного рішення  $f_p(s)$  рівняння (4.73), при нульових початкових умовах, використовуємо наступне рекурентне співвідношення:

$$f_{p,k+2} = -\frac{\sum_{m=0}^k f_{p,m+1}(m+1)Z_{1,k-m} + \sum_{m=0}^k f_{p,m}Z_{2,k-m} + Z_{3,k}d\xi + Z_{4,k}d\eta}{(k+1)(k+2)}, \quad (4.78)$$

в якому слід покласти  $f_{p0} = f_{p1} = 0$ . В результаті отримаємо наближений вираз для  $f_p(s)$  у вигляді полінома змінної  $s$ :

$$f_p(s) = \sum_{k=0}^N f_{p,k} s^k. \quad (4.79)$$

Рішення задачі Коші для рівняння (4.73) має наступний вигляд:

$$d\phi(s) = d\phi(0)\Phi_1(s) + d\phi'(0)f_2(s) + f_p(s). \quad (4.80)$$

Диференціюючи (4.80) по  $s$ , отримуємо

$$d\phi'(s) = d\phi(0)f_1'(s) + d\phi'(0)f_2'(s) + f_p'(s). \quad (4.80a)$$

У векторно-матричному вигляді рівняння (4.80) - (4.80a) записуються так:

$$Y(s) = A(s)X(0) + B(s), \quad (4.81)$$

де

$$Y(s) = \begin{bmatrix} d\phi(s) \\ d\phi'(s) \end{bmatrix}, \quad A(s) = \begin{bmatrix} \Phi_1(s) & \Phi_2(s) \\ \Phi_1'(s) & \Phi_2'(s) \end{bmatrix}, \quad (4.81a)$$

$$B(s) = \begin{bmatrix} \Phi_p(s) \\ \Phi_p'(s) \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} d\phi(0) \\ d\phi'(0) \end{bmatrix}.$$

Для побудови функції  $dv(s)$  приросту прогинів балки скористаємося співвідношенням [262]

$$dv(s) = \int_0^s \sin d\phi(\tau) d\tau + dv_A, \quad (4.82)$$

де  $dv_A$  — вертикальне переміщення точки А. Користуючись тим, що для залізобетонних балок  $d\phi(s)$  мало, можна призначити

$$dv(s) = \int_0^s d\phi(\tau) d\tau + dv_A,$$

звідки випливає, що

$$V_i(s) = \sum_{k=1}^{N+1} V_{i,k} s^k \quad (i = 1, 2), \quad V_p(s) = \sum_{k=1}^{N+1} V_{p,k} s^k, \quad V_{i,k} = \frac{\Phi_{i,k-1}}{k}, \quad V_{p,k} = \frac{\Phi_{p,k-1}}{k}. \quad (4.83)$$

Аналогічно можуть бути представлені прирости згинальних моментів і перерізуючих сил:

$$\begin{aligned} dM(s) &= Hd\phi'(s) = H[d\phi(0)\Phi_1'(s) + d\phi'(0)\Phi_2'(s) + \Phi_p'(s)], \\ dQ(s) &= Hd\phi''(s) = H[d\phi(0)\Phi_1''(s) + d\phi'(0)\Phi_2''(s) + \Phi_p''(s)] \end{aligned} \quad (4.84)$$

#### Приклад 4.5. Квазістатичний згин одновимірної моделі триповерхової залізобетонної каркасної будівлі

Досліджуємо квазістатичний згин залізобетонної колони, на якій розташовані три вантажу масою  $5 T$  і на яку діють горизонтальні сили  $F_i(t) = A_i \sin(2\pi t/T_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (рис. 4.14), причому  $A_1 = 4,9 \text{ кН}$ ,  $A_2 = -4,1 \text{ кН}$ ,

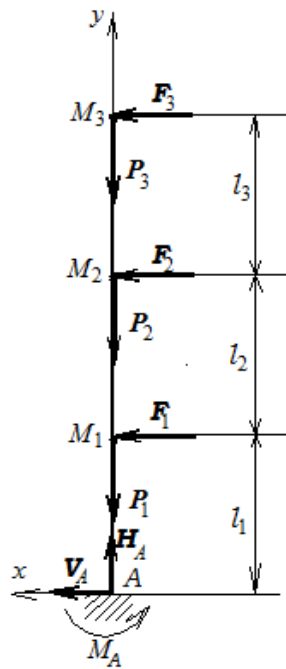


Рис.4.13 Сили, що діють на триповерхову залізобетонну колону

$A_3 = - 3,25 \text{ кН}$ ,  $T_1 = 10 \text{ с}$ ,  $T_2 = 10 \text{ с}$ ,  $T_3 = 15 \text{ с}$ ,  $l_1 = l_2 = l_3 = 4 \text{ м}$ . Розміри поперечного перерізу, клас бетону і армування такі ж як і в попередніх прикладах. Колону будемо вважати стержневою системою, що складається зі стержнів, граничні перерізи яких проходять через точки  $A$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ .

Навантаження колони відбувається в два етапи. На попередньому етапі відбувається поступове збільшення маси вантажів (тобто поступове збільшення сил ваги) від нуля до заданого значення. Це призводить до появи стискаючих напружень і переміщень, які легко визначаються за допомогою деформаційної теорії пластичності. Потім при  $t = 0$  починається основний етап: включаються сили  $F_1$ ,  $F_2$  і  $F_3$ . Для визначення прогинів використовуємо метод граничних елементів. Прийmemo крок за часом  $\Delta t = 0,25 \text{ с}$ . Відповідно до алгоритму, викладеному в п.1, на кожному кроці для кожного зі стержнів будуються функції  $Z_{j,i}(s)$  ( $i = 1,2,3,4$ ;  $j = 1,2,3$ ;  $j$  — номер стержня). Потім за допомогою методу найменших квадратів отримуємо поліноміальну апроксимацію для кожної з цих функцій. Далі за допомогою (4.76) знаходимо коефіцієнти розкладання фундаментальних функцій  $\Phi_{j,i}(s)$  ( $i = 1,2$ ;  $j = 1,2,3$ ;  $j$  — номер стержня) задачі Коші для кожного зі стержнів, а за допомогою (4.77)

їх поліноміальний представлення. Аналогічно за допомогою (4.78) і (4.79) будемо частинні рішення  $\Phi_{p,j}(s)$  ( $j = 1,2,3$ ) задачі Коші для стержнів.

Запишемо наступне співвідношення [14,59,157]:

$$A(l)X(0) - Y(l) = -B(l). \quad (4.84)$$

Тут (для розглянутої стержневої системи)

$$A(l) = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1}(l_1) & \Phi_{1,2}(l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{1,1}'(l_1) & \Phi_{1,2}'(l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{2,1}(l_2) & \Phi_{2,2}(l_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{2,1}'(l_2) & \Phi_{2,2}'(l_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{3,1}(l_3) & \Phi_{3,2}(l_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{3,1}'(l_3) & \Phi_{3,2}'(l_3) \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} d\phi_1(0) \\ d\phi_1'(0) \\ d\phi_2(0) \\ d\phi_2'(0) \\ d\phi_3(0) \\ d\phi_3'(0) \end{bmatrix}, \quad Y(l) = \begin{bmatrix} d\phi_1(l_1) \\ d\phi_1'(l_1) \\ d\phi_2(l_2) \\ d\phi_2'(l_2) \\ d\phi_3(l_3) \\ d\phi_3'(l_3) \end{bmatrix}, \quad B(l) = \begin{bmatrix} \Phi_{p,1}(l_1) \\ \Phi_{p,1}'(l_1) \\ \Phi_{p,2}(l_2) \\ \Phi_{p,2}'(l_2) \\ \Phi_{p,3}(l_3) \\ \Phi_{p,3}'(l_3) \end{bmatrix}. \quad (4.85a)$$

Граничні умови для стержневої системи, зображеної на рис. 4.14, виглядають наступним чином:

$$\begin{aligned} d\phi_1(0) = 0, \quad d\phi_2(0) = d\phi_1(l_1), \quad d\phi_2'(0) = d\phi_1'(l_1), \\ d\phi_3(0) = d\phi_2(l_2), \quad d\phi_3'(0) = d\phi_2'(l_2), \quad d\phi_2'(l_3) = 0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Таким чином, перший елемент вектора  $X(0)$  і останній елемент вектора  $Y(l)$  дорівнюють нулю.

Використовуючи (4.86) можна записати вектор  $Y(l)$  так:

$$Y(l) = \begin{bmatrix} d\phi_2(0) \\ d\phi_2'(0) \\ d\phi_3(0) \\ d\phi_3'(0) \\ d\phi_3(l_3) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Замінімо нульовий елемент вектора  $X(0)$  на елемент  $d\phi_3(l_3)$  вектора  $Y(l)$ :

$$X^*(0, l) = \begin{bmatrix} d\phi_3(l_3) \\ d\phi_1'(0) \\ d\phi_2(0) \\ d\phi_2'(0) \\ d\phi_3(0) \\ d\phi_3'(0) \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$A(l)X(0) = A_0(l)X^*(0, l) \quad (4.87)$$

( $A_0(l)$  дорівнює матриці  $A(l)$  з обнуленим першим стовпцем).

Матриця  $C$ , яка опустить перший елемент вектора  $X^*(0, l)$  на п'яту сходинку, другий зробить рівним нулю, а чотири останніх підніме вгору на два номери, виглядає так:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що

$$CX^*(0, l) = Y(l). \quad (4.88)$$

Тоді враховуючи (4.87) і (4.88), рівність (4.84) можна записати в наступному вигляді:

$$A^*(l)X^*(0, l) = -B(l), \quad (4.89)$$

де  $A^*(l) = A_0(l) - C$ .

Таким чином, знаходження невідомих величин  $d\phi_1'(0)$ ,  $d\phi_2(0)$ ,  $d\phi_2'(0)$ ,  $d\phi_3(0)$ ,  $d\phi_3'(0)$  і  $d\phi_3(l_3)$ , необхідних для побудови прогинів колони звелось до вирішення системи лінійних рівнянь (4.89).



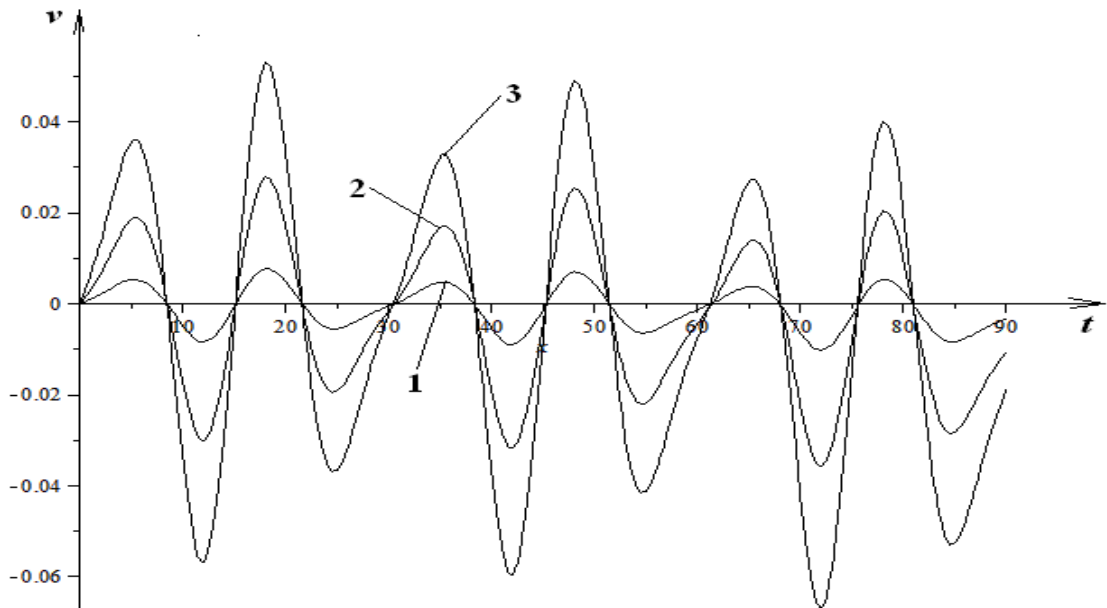


Рис. 4.14 Графіки руху вантажів  $M_1$ ,  $M_2$  і  $M_3$

На підставі викладеного алгоритму було проведено ряд розрахунків. На рис. 4.14 наведені графіки руху вантажів  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ; час  $t$  в секундах, переміщення вантажів  $v$  в метрах). На рис. 4.15 приведена траєкторія руху зображаючої точки на площині  $(F(t), v_3(t))$  ( $v_3(t)$  — переміщення третього вантажу,  $F(t) = F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)$ ).

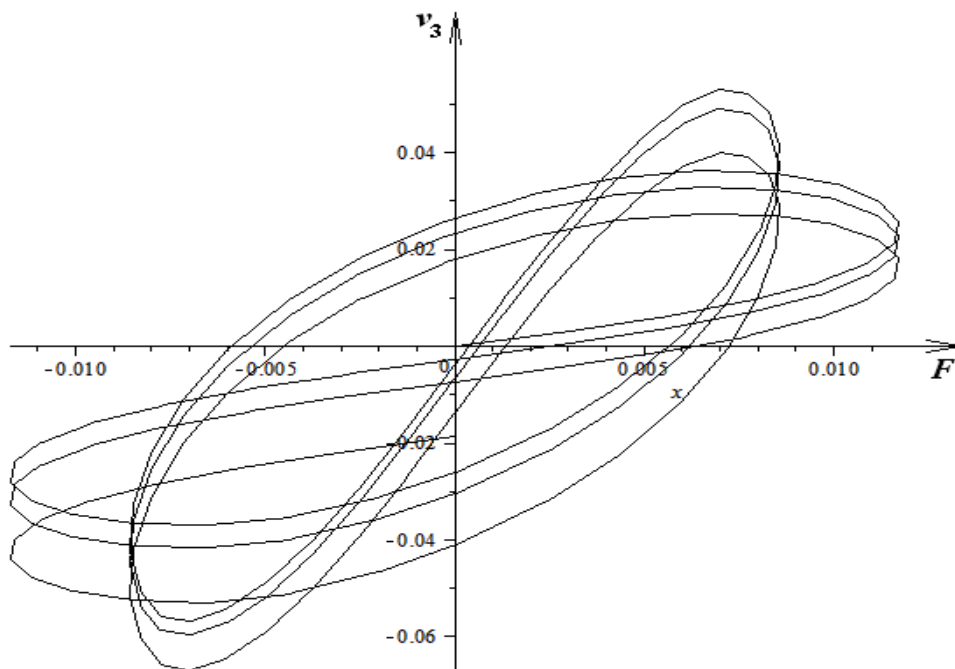


Рис. 4.15 Траєкторії руху вантажів  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  в площині  $(F, v_3)$

На рис. 4.15 помітно накопичення залишкових деформацій.

У цьому параграфі побудовано варіант методу граничних елементів для вирішення квазістатичних та динамічних задач для елементів та одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель. При цьому при побудованні фундаментальних рішень задачі Коші для побудованого у параграфі 4.1 диференціального рівняння використовується метод розкладу розшукованих функцій в степеневі ряди.

Таким чином, запропонована методика, яка відкриває шлях до застосування методу граничних елементів при розрахунку залізобетонних балок і рам з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності бетону.

#### 4.5 Модифікація методу граничних елементів

У параграфі 1 цього розділу було побудовано диференціальне рівняння для визначення приростів кутів повороту поперечних перерізів залізобетонної балки при покроковому методі рішення:

$$d\phi'' + Z_1(s)d\phi' + Z_2(s)d\phi = -Z_3(s)d\xi - Z_4(s)d\eta \quad (4.90)$$

(штрих означає похідну по  $s$ ,  $Z_j(s)$  ( $j = 1,2,3,4$ ) – неперервні функції  $s$ ,  $d\xi = -dN(0)l^2/H$ ,  $d\eta = dQ(0)l^2/H$  ( $dN(0)$  и  $dQ(0)$  – приріст поздовжньої і поперечної сил на початку розглянутої ділянки балки,  $l$  – її довжина,  $H$  – приведена жорсткість поперечного перерізу).

Представимо рівняння (4.90) в наступному вигляді

$$y'''+Z_1(s)y''+Z_2(s)y'=Z_3(s)dN(0)/H_0 - Z_4(s)dQ(0)/H_0. \quad (4.91)$$

Тут через  $y$  позначено  $dv$  – приріст прогину балки,  $H_0 = H / l^2$ . В попередньому параграфі пропонувалося апроксимувати функції  $Z_k(s)$  ( $k = 1,2,3,4$ ) полиномами змінної  $s$ . У цьому параграфі вчинимо інакше: діючи аналогічно [14], замінимо ці функції кусково-постійними функціями, тобто фактично замінимо розглянуту ділянку балки рядом дрібніших ділянок (будемо називати їх сегментами), кожному з яких відповідає диференціальне

рівняння (4.91) з постійними коефіцієнтами. Так на  $i$ -му сегменті матимемо таке рівняння:

$$y'''' + z_{1,i}y'' + z_{2,i}y' = z_{3,i}dN(0)/H_0 - z_{4,i}dQ(0)/H_0. \quad (4.92)$$

Тут  $z_{k,i}$  – значення функції  $z_k(s)$  на початку  $i$ -го сегмента ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).

Відхилимося від пропонованої в [14] методики. Будемо будувати фундаментальні функції задачі Коші для однорідного диференціального рівняння, відповідного (4.91), в такий спосіб: на першому сегменті  $j$ -а функція задовольняє початковим умовам

$$y_j^{(j-1)} = 1, y_j^{(m)} = 0 \text{ при } m \neq j-1 \text{ (} j = 1, 2, 3), \quad (4.93)$$

а далі ця функція триває на наступний сегмент безперервно разом з її першою та другою похідними.

Характеристичне рівняння для однорідного рівняння, відповідного (4.92), на  $i$ -му сегменті виглядає так:

$$\lambda^3 + z_{1,i}\lambda^2 + z_{2,i}\lambda = 0. \quad (4.94)$$

Його коріння:

$$\lambda_{i,1} = -\frac{z_{1,i}}{2} + \sqrt{D_i}, \lambda_{i,2} = -\frac{z_{1,i}}{2} - \sqrt{D_i} \quad (D_i = \frac{z_{1,i}^2}{4} - z_{2,i}), \lambda_{i,3} = 0. \quad (4.95)$$

Якщо  $D_i > 0$ , то загальний розв'язок рівняння (4.92) має вигляд:

$$y = c_{i,1}e^{\lambda_{i,1}x} + c_{i,2}e^{\lambda_{i,2}x} + c_{i,3}. \quad (4.96)$$

Легко переконатися в тому, що постійні інтегрування  $c_{i,j}$  ( $i$  – номер сегмента,  $j = 1, 2, 3$ ) виражаються через значення функції  $y(x)$  і її похідних на початку сегмента в такий спосіб:

$$c_{i,1} = \frac{\lambda_{i,2}y'(0) - y''(0)}{\lambda_{i,1}(\lambda_{i,2} - \lambda_{i,1})}, c_{i,2} = -\frac{\lambda_{i,1}y'(0) - y''(0)}{\lambda_{i,2}(\lambda_{i,2} - \lambda_{i,1})}, \quad (4.96a)$$

$$c_{i,3} = \frac{\lambda_{i,1}\lambda_{i,2}y(0) - (\lambda_{i,1} + \lambda_{i,2})y'(0) + y''(0)}{\lambda_{i,1}\lambda_{i,2}}.$$

Якщо  $D_i = 0$ , то загальний розв'язок рівняння (4.92) такий

$$y = (c_{i,1} + c_{i,2}x)e^{\lambda_{i,1}x} + c_{i,3}. \quad (4.97)$$

Постійні інтегрування записуються через  $y(0)$ ,  $y'(0)$  і  $y''(0)$  так:

$$\begin{aligned} c_{i,1} &= 2y'(0) - y''(0)/\lambda_{i,1}, \quad c_{i,2} = -y'(0) - y''(0)/\lambda_{i,1}, \\ c_{i,3} &= y(0) - 2y'(0) + y''(0)/\lambda_{i,1}. \end{aligned} \quad (4.97a)$$

Якщо ж  $D_i < 0$ , то загальне рішення зазначеного вище рівняння виглядає так:

$$y = (c_{i,1} \sin b_i x + c_{i,2} \cos b_i x)e^{a_i x} + c_{i,3}, \quad a_i = -z_{1,i}/2, \quad b_i = \sqrt{-D_i}, \quad (4.98)$$

де

$$\begin{aligned} c_{i,1} &= -\frac{(a_i^2 - b_i^2)y'(0) - a_i y''(0)}{b_i(a_i^2 + b_i^2)}, \quad c_{i,2} = \frac{2a_i y'(0) - y''(0)}{a_i^2 + b_i^2}, \\ c_{i,3} &= \frac{(a_i^2 + b_i^2)y(0) - 2a_i y'(0) + y''(0)}{a_i^2 + b_i^2}. \end{aligned} \quad (4.98a)$$

На першому сегменті підставляємо в (4.96a) (або (4.97a), або (4.98a) (в залежності від значення  $D_1$ ) замість  $y(0)$ ,  $y'(0)$ ,  $y''(0)$  початкові значення (4), а на  $i$ -му сегменті ( $i > 1$ ) –  $y_j(l_{i-1})$ ,  $y_j'(l_{i-1})$ ,  $y_j''(l_{i-1})$  ( $j$  – номер фундаментальної функції,  $l_{i-1}$  – довжина  $i-1$ -го сегмента).

Аналогічно робимо і з побудовою частинного рішення рівнянь

$$y'''' + z_{1,i}y'' + z_{2,i}y' = \frac{z_{3,i}}{H_0}, \quad (4.99)$$

$$y'''' + z_{1,i}y'' + z_{2,i}y' = -\frac{z_{4,i}}{H_0}, \quad (4.100)$$

при нульових початкових умовах.

Загальне рішення рівняння (4.99) будемо шукати у такому вигляді:

$$y_N(s) = y(s) + \frac{z_{3,i}}{H_0 z_{2,i}} s, \quad (4.101)$$

а рівняння (4.100) – в такому:

$$y_Q(s) = y(s) - \frac{z_{4,i}}{H_0 z_{2,i}} s \quad (4.102)$$

( $y$  - загальне рішення однорідного рівняння). З формул (4.101) і (4.102) випливає, що значення постійних інтегрування в цих формулах можна обчислити за формулами (4.96а), (4.97а) і (4.98а) з заміною  $y(0)$  на  $y_N(0)$ ,  $y'(0)$  на  $y_N'(0) + z_{3,i}/H_0 z_{2,i}$  і  $y''(0)$  на  $y_N''(0)$  для формули (4.101), і с заміною  $y(0)$  на  $y_Q(0)$ ,  $y'(0)$  на  $y_Q'(0) - z_{4,i}/H_0 z_{2,i}$  і  $y''(0)$  на  $y_Q''(0)$  для формули (4.102), причому в першому випадку на першому сегменті  $y_N(0) = y_N'(0) = y_N''(0) = 0$ , а у другому –  $y_Q(0) = y_Q'(0) = y_Q''(0) = 0$ .

Далі будуюмо матрицю  $A(x)$  і вектори  $B_Q(x)$  і  $B_N(x)$  :

$$A(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{bmatrix}, B_Q(x) = \begin{bmatrix} y_Q(x) \\ y_Q'(x) \\ y_Q''(x) \end{bmatrix}, B_N(x) = \begin{bmatrix} y_N(x) \\ y_N'(x) \\ y_N''(x) \end{bmatrix}. \quad (4.103)$$

Подальші побудови зміненого алгоритму будуть виконані в процесі вирішення ряду задач, представлених в наведеному нижче ряді прикладів.

**Приклад 4.6.** Досліджуємо процес плоского згину статично

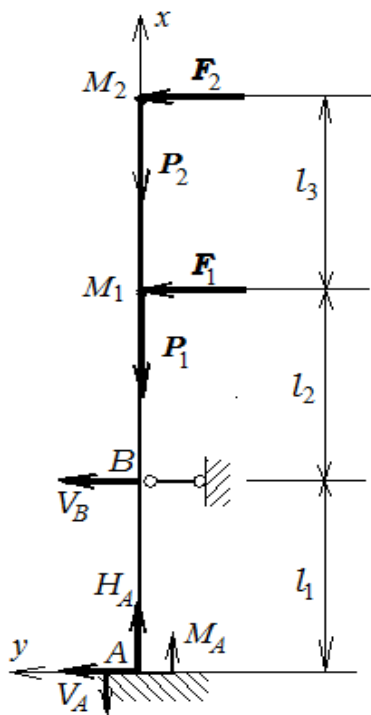


Рис. 4.16 Статично невизначена колона

невизначеної залізобетонної колони, на якій розташовані два вантажу масою  $5T$  і на яку діють гармонійно змінюючися горизонтальні сили  $F_i(t) = A_i \sin(2\pi t / T_i)$  ( $i = 1, 2$ ) (рис. 4.16), причому періоди зміни цих сил є такими, що можна вважати деформації згину квазістатичними  $T_1 = 30$  с,  $T_2 = 10$  с. Інші параметри:  $A_1 = 2$  кН,  $A_2 = 8$  кН,  $l_1 = 2$  м,  $l_2 = l_3 = 4$  м. Розміри поперечного перерізу, клас бетону і армування такі ж як і в попередньому прикладі. Колону вважатимемо балочною системою, що складається з трьох балкових елементів (ділянок), граничні перерізи яких проходять через точки  $A$ ,  $B$ ,  $M_1$  і  $M_2$ .

Як і в попередньому параграфі передбачається, що навантаження колони відбувається в два етапи. На попередньому етапі відбувається поступове збільшення маси вантажів (тобто поступове збільшення сил тяжіння) від нуля до заданого значення. Це призводить до появи стискаючих напружень і переміщень, які легко визначаються за допомогою деформаційної теорії пластичності. Потім при  $t = 0$  починається основний етап: включаються сили  $F_1$  і  $F_2$ . Поздовжні сили залишаються незмінними.

Використовуючи алгоритм методу граничних елементів [14], можна записати наступні співвідношення:

$$\mathbf{X}_k(l_k) = \mathbf{A}_k(l_k)\mathbf{X}_k(0) + \mathbf{B}_{N,k}dN_k(0) + \mathbf{B}_{Q,k}dQ_k(0). \quad (4.104)$$

Тут

$$\mathbf{X}_k(x) = \begin{bmatrix} dv_k(x) \\ dv_k'(x) \\ dv_k''(x) \end{bmatrix}$$

(введений індекс  $k$ , що позначає номер елемента,  $k = 1,2,3$ ).

З рівності  $\mathbf{X}_2(0) = \mathbf{X}_1(l_1)$  маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2(l_2) = & \mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{A}_1(l_1)\mathbf{X}_1(l_1) + \mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{B}_{Q,1}dQ_1(0) + \mathbf{B}_{Q,2}dQ_2(0) + \\ & + \mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{B}_{N,1}dN_1(0) + \mathbf{B}_{N,2}dN_2(0). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Враховуючи що  $\mathbf{X}_3(0) = \mathbf{X}_2(l_2)$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_3(l_3) = & \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{A}_1(l_1)\mathbf{X}_1(l_1) + \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{B}_{Q,1}dQ_1(0) + \\ & + \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{B}_{Q,2}dQ_2(0) + \mathbf{B}_{Q,3}dQ_3(0) + \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{B}_{N,1}dN_1(0) + \\ & + \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{B}_{N,2}dN_2(0) + \mathbf{B}_{N,3}dN_3(0). \end{aligned} \quad (4.106)$$

Зауважимо, що в зв'язку зі сказаним вище про поздовжні сили

$$dN_k(0) = 0 \quad (k = 1,2,3).$$

Крім того, очевидно (див. Рис.4.17), що

$$dQ_3(0) = -dF_2, \quad dQ_2(0) = -dF_1 - dF_2.$$

Тоді (4.106) запишеться так

$$\mathbf{X}_3(l_3) = \mathbf{A}_p\mathbf{X}_1(0) + \mathbf{U}_1dQ_1(0) + \mathbf{U}_2, \quad (4.107)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p &= \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{A}_1(l_1), \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{B}_{Q,1}, \\ \mathbf{U}_2 &= -\mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{B}_{Q,2}dF_2 - (\mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{B}_{Q,2} + \mathbf{B}_{Q,3})dF_3. \end{aligned} \quad (4.107a)$$

З умов закріплення на кінцях колони випливає

$$\mathbf{X}_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dv_1''(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3(l_3) = \begin{bmatrix} dv_3(l_3) \\ dv_3'(l_3) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.108)$$

Утворюємо матрицю  $\mathbf{A}_p^{(0)}$ , яка створюється з  $\mathbf{A}_p$  обнуленням перших двох стовпців і вектор  $\mathbf{X}_1^*$ , що складається з незаданих елементів векторів  $\mathbf{X}_1(0)$  і  $\mathbf{X}_3(l_3)$ :

$$\mathbf{X}_1^* = \begin{bmatrix} dv_3(l_3) \\ dv_3'(l_3) \\ dv_1''(0) \end{bmatrix}. \quad (4.109)$$

Неважко переконатися в тому, що

$$\mathbf{A}_p^{(0)}\mathbf{X}_1^* = \mathbf{A}_p\mathbf{X}_1(0). \quad (4.110)$$

Крім того, також неважко з'ясувати, що

$$\mathbf{C}\mathbf{X}_1^* = \mathbf{X}_3(l_3), \quad (4.111)$$

де

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

За допомогою (4.110) і (4.111) рівність (4.107) записується так

$$(\mathbf{A}_p^{(0)} - \mathbf{C})\mathbf{X}_1^* = -\mathbf{U}_1dQ_1(0) - \mathbf{U}_2,$$

звідки знаходимо

$$\mathbf{X}_1^* = -(\mathbf{A}_p^{(0)} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{U}_1dQ_1(0) - (\mathbf{A}_p^{(0)} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{U}_2. \quad (4.112)$$

З рівності (4.104) при  $k = 1$  маємо

$$\mathbf{X}_1(l_1) = \mathbf{A}_1^{(0)}(l_1)\mathbf{X}_1^* + \mathbf{B}_{Q,1}dQ_1(0). \quad (4.113)$$

Тут враховано, що

$$\mathbf{A}_1(l_1)\mathbf{X}_1(0) = \mathbf{A}_1^{(0)}(l_1)\mathbf{X}_1^* \quad (4.114)$$

( $A_1^{(0)}(l_1)$ ) – матриця, отримана з  $A_1(l_1)$  обнуленням перших двох стовпців).

Беручи до уваги (5.112), рівність (5.113) можна записати так

$$X_1(l_1) = U_3 dQ_1(0) + U_4. \quad (4.115)$$

Тут

$$U_3 = -A_1^{(0)}(l_1)(A_p^{(0)} - C)^{-1}U_1 + B_{Q,1}, \quad U_4 = -A_1^{(0)}(l_1)(A_p^{(0)} - C)^{-1}U_2.$$

Врахуємо тепер, що  $dv_1(l_1) = 0$ , тобто

$$X_{1,1}(l_1) = 0 \quad (4.116)$$

( $X_{1,1}(l_1)$  – перший елемент вектора  $X_1(l_1)$ ). Тоді з (4.115) матимемо

$$dQ_1(0) = -\frac{U_{4,1}}{U_{3,1}}.$$

Таким чином, невідома величина  $dQ_1(0)$  знайдена, а з (4.112) знайдемо інші невідомі величини.

На рис. 4.17 наведені графіки руху точок  $M_1$  (графік 1) і  $M_2$  (графік 2) під дією зазначених вище сил  $F_1$  і  $F_2$ . Помітно накопичення залишкових деформацій.

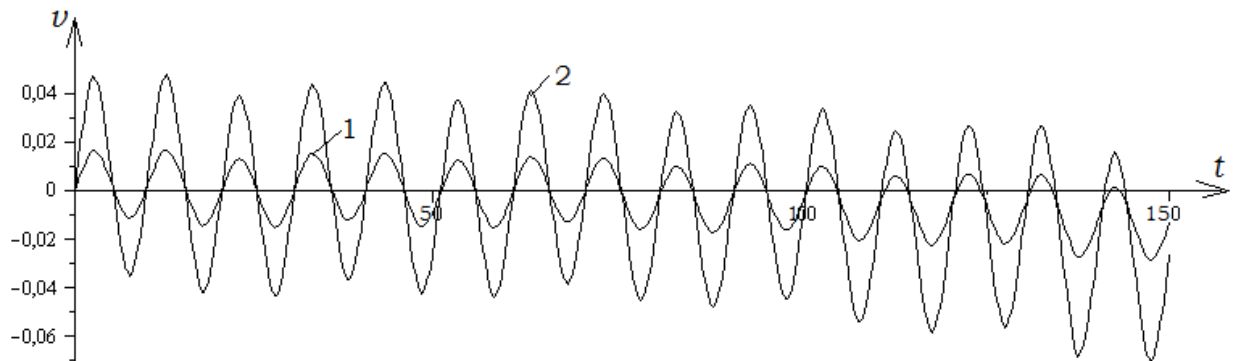


Рис.4.17 Графіки руху вантажів  $M_1$  (1) і  $M_2$  (2)

У цьому параграфі побудовано варіант методу граничних елементів для вирішення квазістатичних та динамічних задач для елементів та одновимірних моделей залізобетонних каркасних будівель. При цьому при побудуванні фундаментальних рішень задачі Коші для побудованого у



параграфі 4.1 диференціального рівняння використовується метод представлення розшукованих функцій в вигляді кусково-постійних функцій.

#### 4.6 Застосування методу граничних елементів при дослідженні динаміки статично невизначеної залізобетонної колони при ударному впливі

Будемо досліджувати рух статично невизначеної залізобетонної колони під дією системи зосереджених змінних сил. При цьому будемо вважати, що маса колони зосереджена в системі матеріальних точок (зосереджених мас) на неї розташованих, а змінні сили  $F_k(t) = A_k \sin(2\pi t / T_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  — число матеріальних точок) прикладені до цих точок. Подібна задача розглядалась в попередньому параграфі, проте там передбачалося, що частоти змушуючих сил набагато менше частот власних коливань конструкції і тому можна було вважати навантаження квазістатичним. У даній роботі таке не передбачається і тому необхідно враховувати динамічну поведінку конструкції. При визначенні приростів прогинів будемо використовувати метод лінійного прискорення з модифікацією Вільсона [93].

Складаючи основне рівняння динаміки для кожної з зосереджених мас, отримуємо

$$M\hat{\Delta}a = \hat{\Delta}F + \hat{\Delta}R. \quad (4.117)$$

(розглядається випадок, коли  $\hat{\Delta}N = 0$ , тобто коли поздовжні сили в стержнях постійні). У формулі (4.117)  $M$  — діагональна матриця мас точок,  $\hat{\Delta}a$  — вектор - стовпець приростів прискорень,  $\hat{\Delta}F$  і  $\hat{\Delta}R$  — вектори приростів змушуючих сил і реакцій конструкції. На підставі методу лінійних прискорень маємо

$$\hat{\Delta}a = \frac{6}{(\hat{\Delta}t)^2} [\hat{\Delta}v - V\hat{\Delta}t - \frac{1}{2}a(\hat{\Delta}t)^2]. \quad (4.118)$$

Тут  $\hat{\Delta}t$  — приріст часу, причому відповідно до методу Вільсона  $\hat{\Delta}t = \theta\Delta t$  ( $\theta > 1$  — скалярний множник,  $\Delta t$  — часовий крок),  $\hat{\Delta}v$  — вектор приростів переміщень точок,  $V$  і  $a$  — вектори їх швидкостей і прискорень, визначені на

попередньому кроці. Зауважимо, що прирости  $\hat{\Delta v}$ ,  $\hat{\Delta a}$ ,  $\hat{\Delta F}$  і  $\hat{\Delta R}$  відповідають проміжку часу  $\hat{\Delta t}$ .

Використовуючи алгоритм, викладений в попередньому параграфі, можна визначити вектор переміщень, викликаний статичним навантаженням  $\hat{\Delta F}_{stat}$ :

$$\hat{\Delta v} = Y \hat{\Delta F}_{stat} \quad (4.119)$$

( $Y$  — матриця, стовпцями якої є вектори приростів переміщень точок, викликані векторами приростів навантажень  $\Delta F_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $k$ -й елемент кожного з яких дорівнює одиниці, а решта — нулю). Очевидно,

$$\hat{\Delta v} = -Y \hat{\Delta R}. \quad (4.120)$$

Підставляючи (4.120) в (4.118), а потім (4.118) і (4.117), отримуємо

$$\hat{\Delta R} = -[I + \frac{6}{(\hat{\Delta t})^2} MY]^{-1} \{ \frac{6}{(\hat{\Delta t})^2} M[V\hat{\Delta t} + a \frac{(\hat{\Delta t})^2}{2}] + \hat{\Delta F} \}. \quad (4.121)$$

Визначивши з (4.121)  $\hat{\Delta R}$ , знаходимо з (4.120) і (4.118)  $\hat{\Delta v}$  і  $\hat{\Delta a}$ , а потім з формул

$$\Delta a = \frac{1}{\theta} \hat{\Delta a}, \Delta V = (a + \frac{1}{2} \Delta a) \Delta t, \Delta v = V \Delta t + \frac{1}{2} (a + \frac{1}{3} \Delta a) (\Delta t)^2 \quad (4.122)$$

визначаємо прирости прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок, що відповідають проміжку часу. Завершується крок обчисленням нових значень прискорень, швидкостей і переміщень:

$$a_{нов} = a + \Delta a, V_{нов} = V + \Delta V, v_{нов} = v + \Delta v. \quad (4.123)$$

**Приклад 4.7.** Досліджуємо рух статично невизначеної залізобетонної колони, на якій розташовані два вантажу масою  $5T$  (рис. 4.18), викликаний імпульсною дією. Геометричні параметри:  $l_1 = 2$  м,  $l_2 = l_3 = 6$  м. Розміри перерізу, бетон і армування такі ж, як в прикладі 4.6.

Навантаження колони відбувається в два етапи. На першому (попередньому) етапі відбувається поступове збільшення маси вантажів

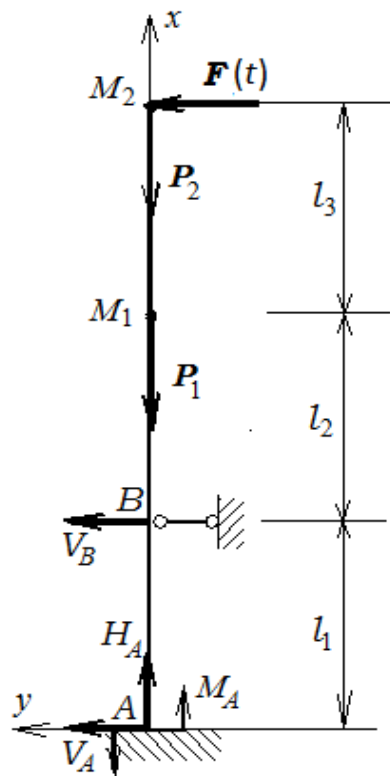


Рис. 4.18 Розрахункова схема колони

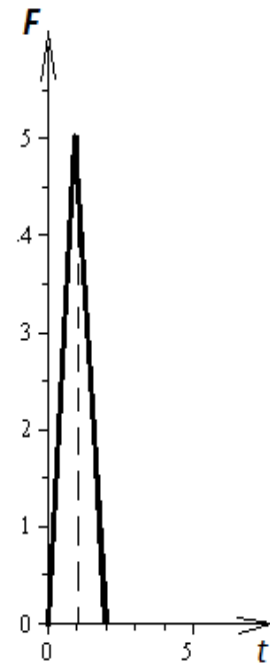


Рис. 4.19 Графік імпульсу

(тобто поступове збільшення сил тяжіння) від нуля до заданого значення. Це призводить до появи поздовжніх сил, які в подальшому залишаються незмінними. Потім при  $t = 0$  починається другий (основний) етап: на зосереджену масу  $M_2$  впливає імпульс, графік якого представлений на рис. 4.19 ( $F$  в  $kH$ ,  $t$  в  $сек$ ). Після закінчення дії імпульса, тривалість якого дорівнює  $2\ c$  колона з вантажами здійснює вільні коливання.

Переміщення вантажів будемо знаходити за допомогою покрокового методу лінійних прискорень, визначаючи при цьому реакції колони по відношенню до вантажів (як було зазначено вище) методом граничних елементів. Як і в попередньому прикладі колону вважаємо балочною системою, що складається з трьох балкових елементів, граничні перерізи яких проходять через точки  $A$ ,  $B$ ,  $M_1$  і  $M_2$ . Графіки руху вантажів представлені на рис. 4.20.

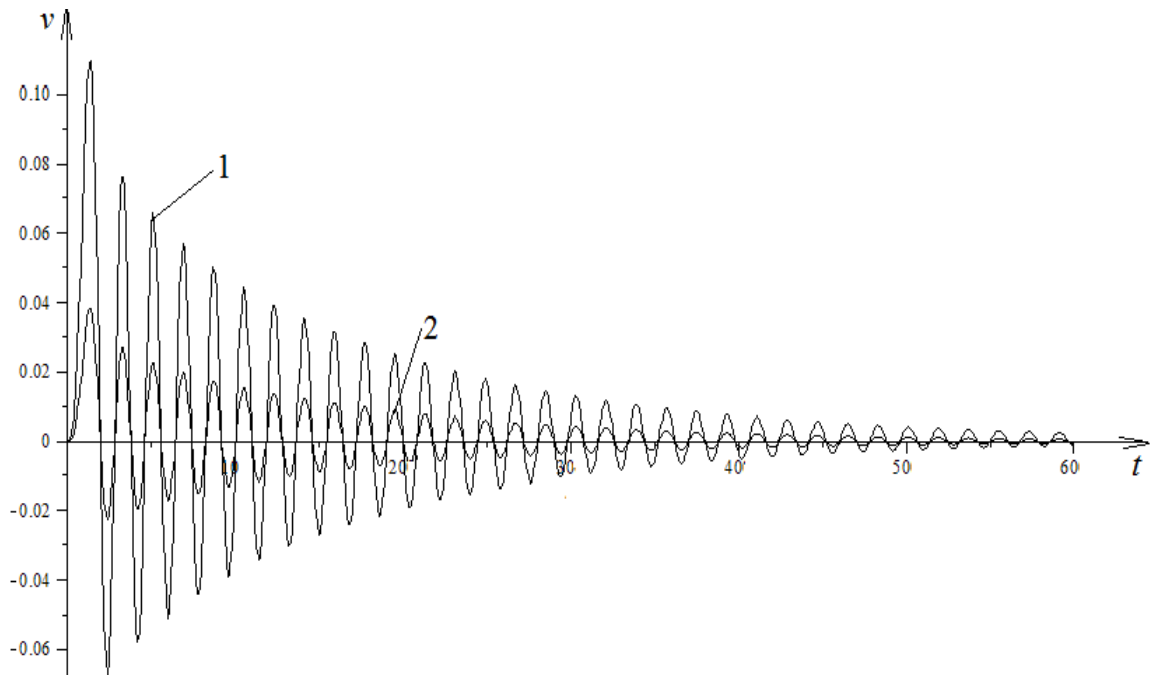


Рис. 4.20 Графіки руху вантажів  $M_1$  і  $M_2$

Помітно загасання коливань. Однак також можна помітити відсутність залишкових деформацій. Збільшимо тривалість дії імпульсу вдвічі не змінюючи при цьому його максимальної величини. Графіки руху приймають вигляд, представлений на рис. 4.21 (графік 1 відповідає руху точки  $M_1$ , а

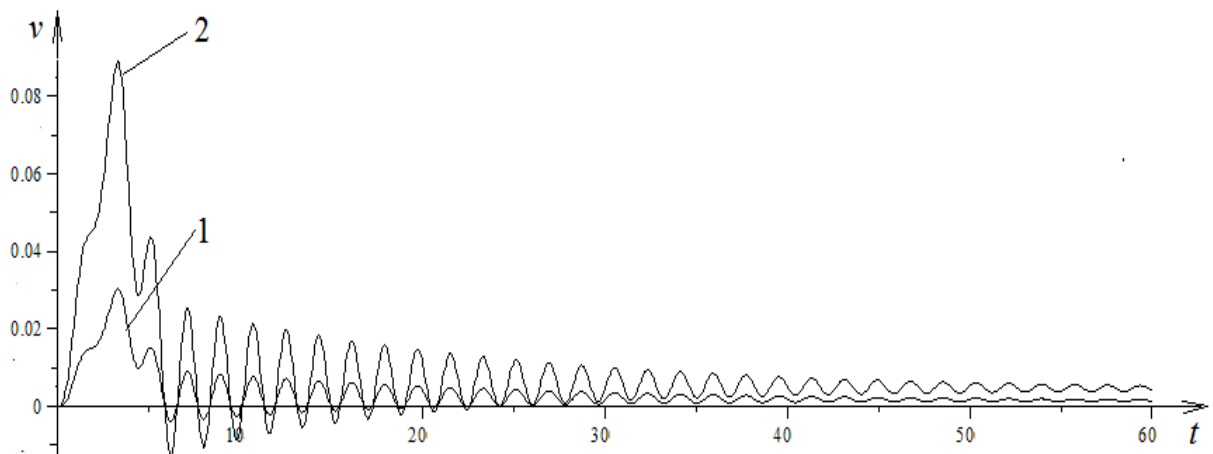


Рис. 4.21 Графіки руху вантажів  $M_1$  і  $M_2$  при посиленому імпульсі.

графік 2 — руху точки  $M_2$ ). Помітна поява залишкових деформацій, в результаті чого при загасанні коливань вісь колони не прагне до своєї первісної прямолінійної форми, а стає зігнутою.

У цьому параграфі викладено метод дослідження динаміки статично невизначеної залізобетонної колони при ударному впливі. Використання алгоритму цього методу продемонстровано на конкретному прикладі.

#### 4.7 Дослідження динаміки багатоповерхової залізобетонної рами з абсолютно жорсткими ригелями при ударній дії методом граничних елементів

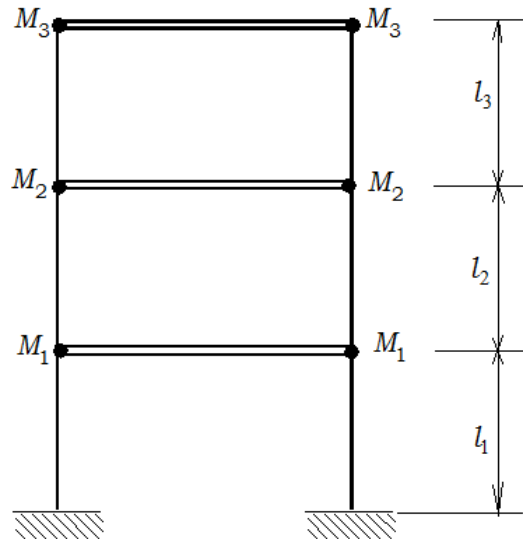


Рис. 4.22 Розрахункова схема рами з абсолютно жорсткими ригелями

Будемо досліджувати рух плоскої залізобетонної рами з абсолютно жорсткими ригелями в своїй площині (рис.4.22). Рама розглядається як

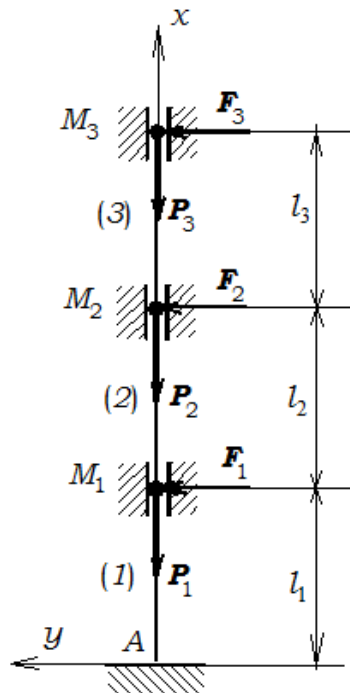


Рис. 4.23 Розрахункова схема еквівалентної колони

система зі скінченним числом ступенів свободи. Для цього маса самої рами, а також маса корисного навантаження, розташованої на ній, зосереджується в ряді матеріальних точок.

Розглядувана задача еквівалентна задачі дослідження динаміки залізобетонної колони з додатковими зв'язками, які чинять опір повороту в площині тих перерізів, в яких знаходяться зосереджені маси, але не перешкоджають переміщенню цих зосереджених мас (рис. 4.23).

Для стержневого елемента  $AM_1$  колони методами, викладеними вище, будуємо матрицю  $A(x)$  фундаментальних функцій однорідного рівняння, відповідного рівнянню (4.91), а також матриці-стовпці рішень рівняння (4.91). Потім записуємо рівність

$$\mathbf{X}^{(1)}(x) = \mathbf{A}^{(1)}(x)\mathbf{X}^{(1)}(0) + \mathbf{B}_Q^{(1)}(x)dQ^{(1)} + \mathbf{B}_N^{(1)}(x)dN^{(1)}. \quad (4.124)$$

Тут  $dQ^{(1)}$  і  $dN^{(1)}$  — величини поперечної і поздовжньої сил на початку елемента. Очевидно, що

$$\begin{aligned} dQ^{(1)} &= -(dF_1 + dF_2 + dF_3), \\ dN^{(1)} &= -(dP_1 + dP_2 + dP_3). \end{aligned} \quad (4.125)$$

Зауважимо, що стовпці  $\mathbf{X}^{(1)}(0)$  і  $\mathbf{X}^{(1)}(l_1)$  (через наявність згаданого вище зв'язку в точці  $M_1$ ) мають такий вигляд:

$$\mathbf{X}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dv_1''(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(1)}(l_1) = \begin{bmatrix} dv_1(l_1) \\ 0 \\ dv_1''(l_1) \end{bmatrix}. \quad (4.126)$$

З ненульових елементів цих стовпців формуємо стовпець  $\mathbf{X}^{(1)*}(0)$ :

$$\mathbf{X}^{(1)*} = \begin{bmatrix} dv_1(l_1) \\ dv_1''(l_1) \\ dv_1''(0) \end{bmatrix}. \quad (4.127)$$

Будуємо матрицю

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.128)$$

Яка має наступну властивість:

$$CX^{(1)*} = X^{(1)}(l_1). \quad (4.129)$$

Неважко переконатися в тому, що

$$A^{(1)*}(l_1)X^{(1)*} = A^{(1)}(l_1)X^{(1)}(0). \quad (4.130)$$

Тут  $A^{(1)*}(x)$  – матриця, отримана з  $A^{(1)}(x)$  обнуленням перших двох стовпців. При  $x = l_1$  рівність (4.124) з урахуванням (4.129) і (4.130) виглядає так

$$CX^{(1)*} = A^{(1)*}X^{(1)*} + B_Q^{(1)}(x)dQ^{(1)} + B_N^{(1)}dN^{(1)}. \quad (4.131)$$

З (4.131) знаходимо

$$X^{(1)*} = [C - A^{(1)*}]^{-1} [B_Q^{(1)}(x)dQ^{(1)} + B_N^{(1)}dN^{(1)}] \quad (4.132)$$

і тим самим визначаємо  $dv_1''(0)$ ,  $dv_1(l_1)$  і  $dv_1''(l_1)$ , тобто стовпці  $X^{(1)}(0)$  і  $X^{(1)}(l_1)$ , що дозволяє визначити прогини в точках елемента (1).

Переходимо тепер до елемента (2). З безперервності функцій  $dv$ ,  $dv'$  ( $dv''$  не безперервна) випливає, що  $dv_2(0) = dv_1(l_1)$ ,  $dv_2'(0) = dv_1'(l_1) = 0$ .

Представимо стовпець  $X^{(2)}(0)$  в наступному вигляді:

$$X^{(2)}(0) = X^{(2,1)} + X^{(2,2)},$$

де

$$X^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dv_2''(0) \end{bmatrix}, \quad X^{(2,2)} = \begin{bmatrix} dv_2(0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Зауважимо, що  $dv_2(0)$  (на відміну від  $dv_2''(0)$ ) вже знайдена величина.

Тоді рівність (4.123) для другого елемента запишеться так:

$$X^{(2)}(x) = A^{(2)}(x)X^{(2,1)} + A^{(2)}(x)X^{(2,2)} + B_Q^{(2)}(x)dQ^{(2)} + B_N^{(2)}(x)dN^{(2)} \quad (4.133)$$

Зауважимо, що через наявність зв'язку в точці  $M_2$

$$X^{(2)}(l_2) = \begin{bmatrix} dv_2(l_2) \\ 0 \\ dv_2''(l_2) \end{bmatrix}. \quad (4.134)$$

Сформуємо стовпець  $X^{(2)*}$  наступним чином:

$$X^{(2)*} = \begin{bmatrix} dv_2(l_2) \\ dv_2''(l_2) \\ dv_2''(0) \end{bmatrix}.$$

Неважко переконатися в тому, що

$$CX^{(2)*} = X^{(2)}(l_2), A^{(2)*}(l_2)X^{(2)*} = A^{(2)}(l_2)X^{(2)}(0) \quad (4.135)$$

( $A^{(2)*}(x)$  – матриця, отримана з  $A^{(2)}(x)$  обнуленням перших двох стовпців).

Тоді (4.133) запишеться так

$$CX^{(2)*} = A^{(2)*}X^{(2)*} + A^{(2)}X^{(2,2)} + B_Q^{(2)}(x)dQ^{(2)} + B_N^{(2)}dN^{(2)}. \quad (4.136)$$

Очевидно, що  $dQ^{(2)} = -(dF_2 + dF_3)$ ,  $dN^{(2)} = -(dP_2 + dP_3)$ .

З (4.136) визначаємо

$$X^{(2)*} = [C - A^{(2)*}]^{-1}[A^{(2)}X^{(2,2)} + B_Q^{(2)}(x)dQ^{(2)} + B_N^{(2)}dN^{(2)}] \quad (4.137)$$

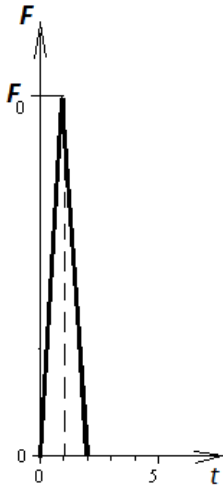
і тим самим знаходимо  $dv_2(l_2)$ ,  $dv_2''(l_2)$  і  $dv_2''(0)$ .

Всі викладки для третього стержневого елемента (або для всіх інших, якби їх було більше) проводяться аналогічно викладкам для другого.

Все викладене вище відноситься до вирішення статичних або квазістатичних задач. При вирішенні динамічних задач цей алгоритм використовується при визначенні залежності приростів реакцій рами по відношенню до матеріальних точок, розташованих на ній, від приростів переміщень цих точок (тобто для побудови матриць  $Y$ ).

**Приклад 4.8.** Розглянемо рух зазначеної рами (рис. 4.22) (або ж еквівалентної залізобетонної колони з додатковими зв'язками, рис. 4.23), викликане імпульсною дією. Маса матеріальних точок (вантажів)  $m_1 = m_2 = m_3 = 25$  Т. Геометричні параметри:  $l_1 = l_2 = l_3 = 5$  м. Розміри поперечного перерізу:  $b = 0.8$  м,  $h = 0.18$  м. Армування симетричне:  $S_1 = S_2 = 8,5\text{см}^2$ . Сталь марки А-III, характеристики бетону:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4$  МПа,  $R_c = 19$  МПа,  $R_p = 1,9$  МПа,  $\Gamma_c = 0.583 \cdot 10^{-3}$ . Як і в попередніх прикладах передбачається, що навантаження рами проводиться в два етапи. На першому етапі відбувається поступове збільшення маси вантажів (тобто поступове збільшення сил





тяжіння) від нуля до заданого значення. Потім при  $t = 0$  починається другий етап: на зосереджену масу  $M_3$  впливає імпульс, графік якого представлений на рис.4.24.

Після закінчення дії імпульсу, тривалість якого дорівнює 2 с рама з вантажами здійснює вільні коливання. Переміщення вантажів визначаються за допомогою покрокового методу лінійних прискорень, причому реакції

колони по відношенню до вантажів обчислюються методом імпульсу граничних елементів. Графіки руху вантажів представлені на рис. 4.25 при  $F_0 = 6$  кН і 4.26 (при  $F_0 = 8,5$  кН). Нумерація графіків відповідає номерам вантажів. Помітно загасання коливань. У першому випадку залишкові деформації практично відсутні. У другому випадку помітно поява залишкових деформацій.

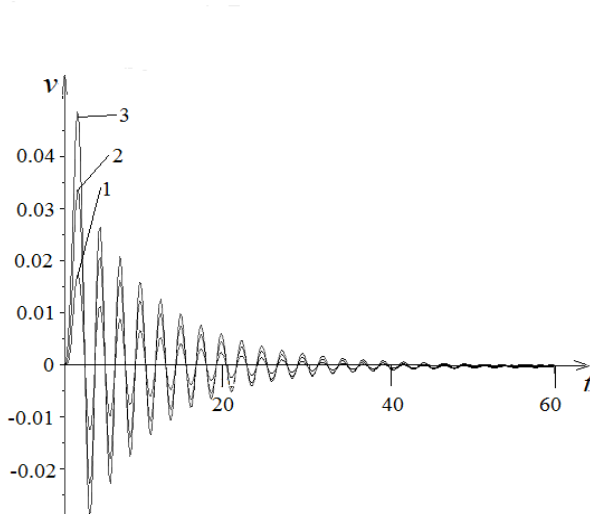


Рис. 4.25 Рух вантажів після впливу імпульсу з  $F_0 = 6$  кН

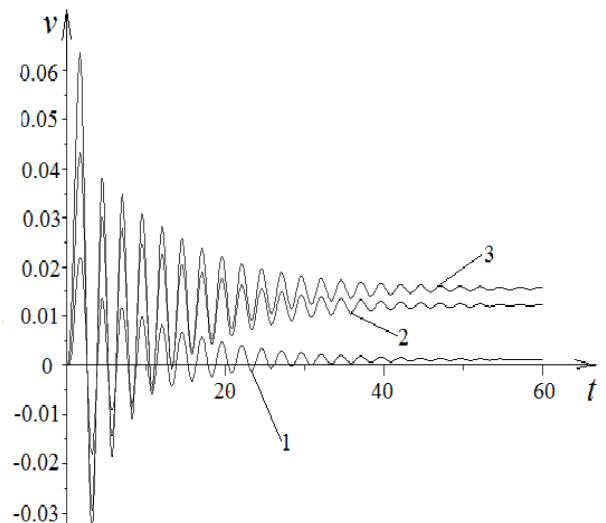


Рис. 4.26 Рух вантажів після впливу імпульсу з  $F_0 = 8,5$  кН

Досліджуємо тепер рух рами під дією гармонічних сил  $F_k(t) = \hat{F}_k \sin \omega t$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Прийmemo  $\omega = 2,5$  с<sup>-1</sup>, що близько до першої кругової частоти вільних коливань рами. Крім того, прийmemo  $\hat{F}_1 = 0,52$  кН,  $\hat{F}_2 = 0,93$  кН,  $\hat{F}_3 = 1,16$  кН. Ці значення утворюють узагальнену силу,

відповідну першому головному коливанию. Графік руху вантажів представлений на рис. 4.27.

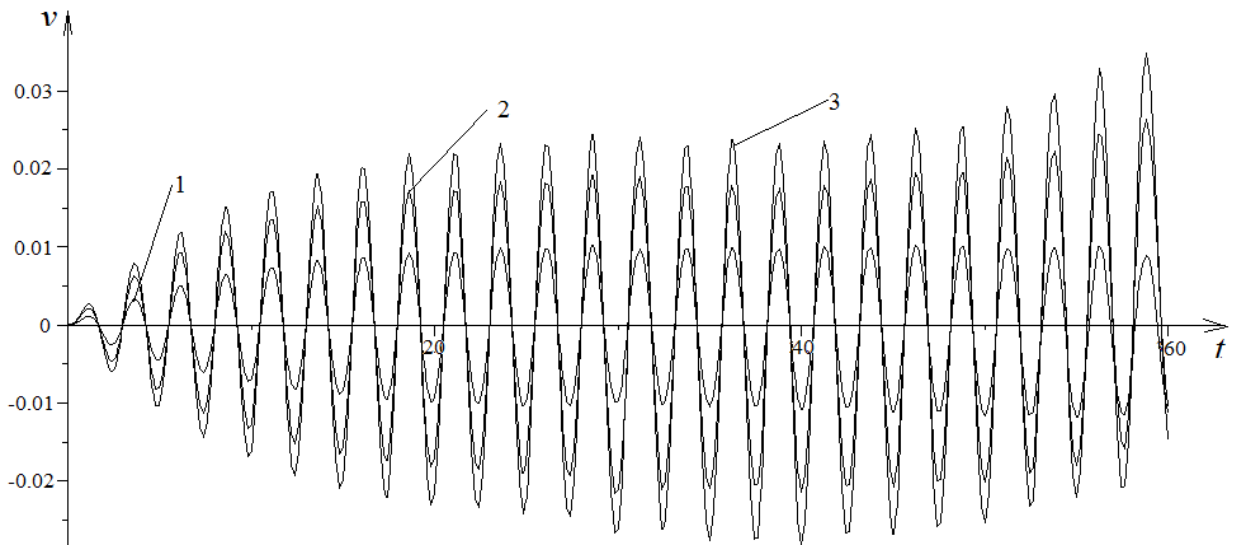


Рис. 4.27 Рух вантажів при гармонійному впливі ( $F_1, F_2, F_3$  відповідають формі першого головного коливання)

Прийmemo тепер  $\hat{F}_1 = 16,58 \text{ кН}$ ,  $\hat{F}_2 = 7,38 \text{ кН}$ ,  $\hat{F}_3 = -13,3 \text{ кН}$ . Ці значення утворюють узагальнену силу, відповідну другому головному коливанию. Частоту залишимо незмінною, тобто відповідною першому головному коливанию. Графік руху представлений на рис. 4.28.

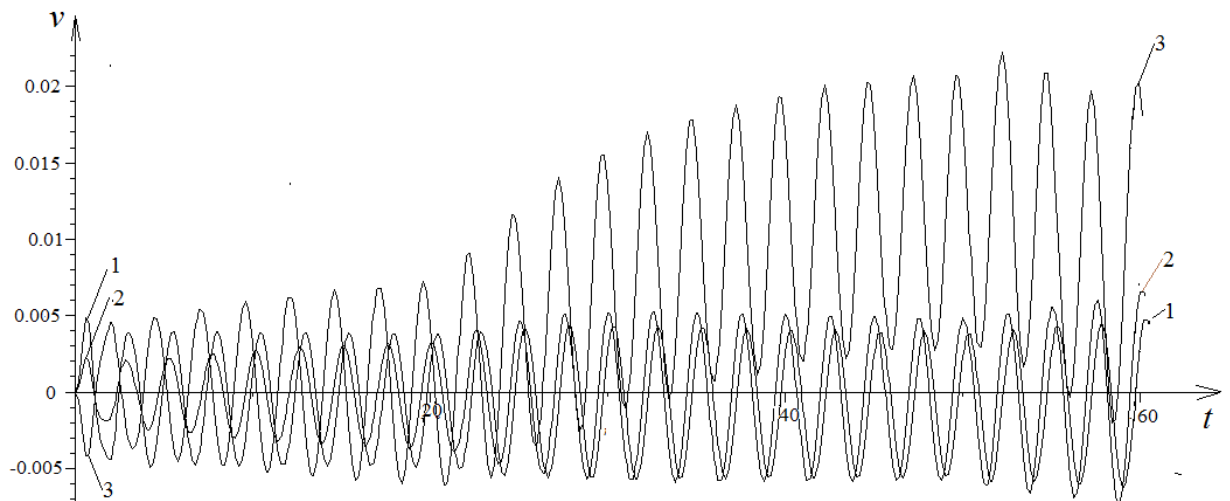


Рис. 4.28 Рух вантажів при гармонійному впливі ( $F_1, F_2, F_3$  відповідають формі другого головного коливання)

Помітна зміна форми коливань. Якщо на початку руху форма коливань близька до форми другого головного коливання (рис. 4.29а), то через хвилину вона близька до форми першого (рис. 4.29б).

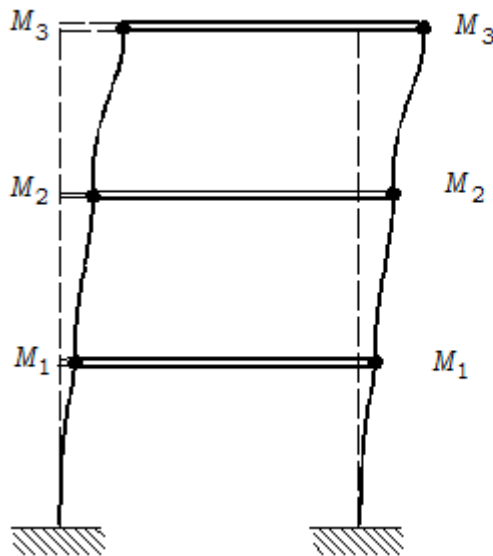


Рис. 4.29а Форма першого  
головного коливання

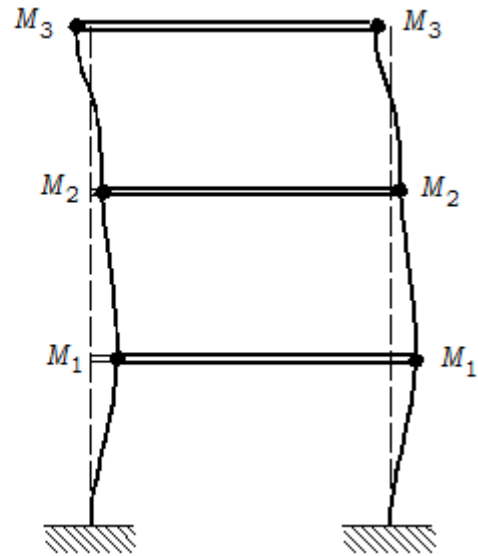


Рис. 4.29б Форма другого  
головного коливання

Таким чином, відбувається перекачування енергії з однієї форми головних коливань в іншу, що в лінійному випадку неможливо. Крім того, з'являється ефект резонансу (наростання амплітуди коливань), що знову таки неможливо при відсутності нелінійного поведіння бетону.

В цьому параграфі проведено побудову методу дослідження динаміки багатоповерхової залізобетонної рами з абсолютно жорсткими ригелями при ударній дії. Продемонстровано застосування алгоритму цього методу на конкретному прикладі.

#### 4.8 Дослідження динамічної стійкості багатоповерхової залізобетонної каркасної будівлі

У цьому парграфі викладений в п. 4.4 алгоритм застосовується до дослідження динамічної стійкості одновимірної моделі багатоповерхової залізобетонної каркасної будівлі, тобто колони з системою зосереджених мас, що знаходиться під дією системи постійних і змінних в часі осьових сил.

Досліджуються згинні коливання злізобетонної колони в площині її найменшої жорсткості, викликані імпульсною дією  $F_n$  (рис. 4.30) і системами осьових постійних сил  $P_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) і змінних сил  $G_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Колона розглядається як система зі скінченним числом ступенів свободи. Для цього маса колони зосереджується в ряді матеріальних точок  $M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Вибираємо на кожному стержневому елементі  $M_{k-1}M_k$  локальну систему координат  $x_k y_k$  колони і присвоюємо йому номер  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Розглянемо спочатку деяку квазістатичну задачу для колони, коли на неї крім осьових сил  $P_k$ , прикладених в точках  $M_k$ , діють ще й горизонтальні сили  $F_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), причому ці сили не передбачаються постійними (рис. 4.33). Методами, викладеними в п.4, будемо матрицю  $A^{(k)}(x_k)$  фундаментальних функцій однорідного диференціального рівняння, відповідного рівнянню (4.81), а також матриці-стовпці  $B_Q^{(k)}(x_k)$  і  $B_N^{(k)}(x_k)$  спеціальних частинних рішень рівняння (4.81). Потім запишемо рівність

$$X^{(k)}(x_k) = A^{(k)}(x_k)X^{(k)}(0) + B_Q^{(k)}(x_k)\Delta Q^{(k)} + B_N^{(k)}(x_k)\Delta N^{(k)}. \quad (4.138)$$

Тут  $\Delta Q^{(k)}$  і  $\Delta N^{(k)}$  — величини приростів поперечної і поздовжньої сил на початку стержневого елемента, а

$$X_k(x_k) = \begin{bmatrix} \Delta v_k(x_k) \\ \Delta v_k'(x_k) \\ \Delta v_k''(x_k) \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

( $\Delta v_k(x_k)$  — приріст прогину консолі, викликаний приростами сил  $\Delta F_i$ ,  $\Delta P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), штрих означає похідну по  $x_k$ ).

Тоді при  $k=1$  і  $x_1 = l_1$  маємо з (4.138)

$$X^{(1)}(l_1) = A^{(1)}(l_1)X^{(1)}(0) + B_Q^{(1)}(l_1)\Delta Q^{(1)} + B_N^{(1)}(l_1)\Delta N^{(1)}, \quad (4.140)$$

а при  $k=2$  і  $x_2 = l_2$

$$X^{(2)}(l_2) = A^{(2)}(l_2)X^{(2)}(0) + B_Q^{(2)}(l_2)\Delta Q^{(2)} + B_N^{(2)}(l_2)\Delta N^{(2)}. \quad (4.141)$$

Скористаємося тим, що  $X^{(2)}(0) = X^{(1)}(l_1)$ . В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(2)}(l_2) &= \mathbf{A}^{(2)}(l_2)\mathbf{A}^{(1)}(l_1)\mathbf{X}^{(1)}(0) + [\mathbf{A}^{(2)}(l_2)\mathbf{B}_Q^{(1)}(l_1) + \mathbf{B}_Q^{(2)}(l_2)]\Delta Q^{(1)} + \\ &+ [\mathbf{A}^{(2)}(l_2)\mathbf{B}_N^{(1)}(l_1) + \mathbf{B}_N^{(2)}(l_2)]\Delta N^{(1)} + \mathbf{B}_Q^{(2)}(l_2)\Delta F_1 + \mathbf{B}_N^{(2)}(l_2)\Delta P_1. \end{aligned}$$

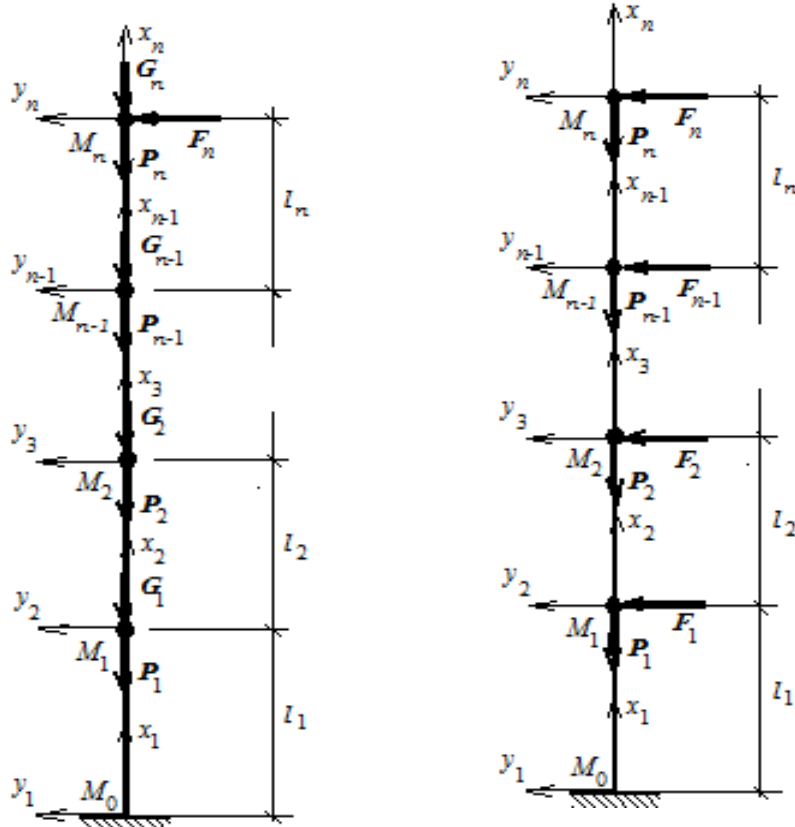


Рис. 4.30 Розрахункова схема колони    Рис. 4.31 Завантаженість колони

Продовжуючи таким же чином далі, знаходимо

$$\mathbf{X}^{(k)}(l_k) = \mathbf{D}^{(1,k)} \mathbf{X}^{(1)}(0) + \sum_{i=1}^k \mathbf{D}^{(i,k)} [\mathbf{B}_Q^{(i)}(l_i)\Delta Q^{(i)} + \mathbf{B}_N^{(i)}(l_i)\Delta N^{(i)}]. \quad (4.142)$$

Тут  $\mathbf{D}^{(i,k)} = \prod_{j=i}^k \mathbf{A}^{(j)}(l_j)$ . Зауважимо, що

$$\Delta Q^{(i)} = -\sum_{j=i}^n \Delta F_j, \quad \Delta N^{(i)} = -\sum_{j=i}^n \Delta P_j. \quad (4.143)$$

Враховуюч граничні умови консолі, можемо записати

$$\mathbf{X}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta v_1''(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(n)}(l_n) = \begin{bmatrix} \Delta v_n(l_n) \\ \Delta v_n'(l_n) \\ 0 \end{bmatrix}$$

З ненульових елементів цих стовпців формуємо стовпець  $\mathbf{X}^{(1)*}$ :

$$\mathbf{X}^{(1)*} = \begin{bmatrix} \Delta v_n(l_n) \\ \Delta v_n'(l_n) \\ \Delta v_1''(0) \end{bmatrix}. \quad (4.144)$$

Введемо матрицю

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.145)$$

яка має наступну властивість:

$$\mathbf{C}\mathbf{X}^{(1)*} = \mathbf{X}^{(n)}(l_n). \quad (4.146)$$

Неважко переконатися в тому, що

$$\mathbf{D}^{(1,k)*} \mathbf{X}^{(1)*} = \mathbf{D}^{(1,k)} \mathbf{X}^{(1)}(0). \quad (4.147)$$

Тут  $\mathbf{D}^{(1,k)*}$  — матриця, отримана з  $\mathbf{D}^{(1,k)}$  обнуленням перших двох стовпців.

При  $k = n$  рівність (4.142) з урахуванням (4.146) і (4.147) виглядає так

$$\mathbf{C}\mathbf{X}^{(1)*} = \mathbf{D}^{(1,n)*} \mathbf{X}^{(1)*} + \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^{(i,n)} [\mathbf{B}_Q^{(i)}(l_i) \Delta Q^{(i)} + \mathbf{B}_N^{(i)}(l_i) \Delta N^{(i)}]. \quad (4.148)$$

З (4.148) знаходимо

$$\mathbf{X}^{(1)*} = [\mathbf{C} - \mathbf{D}^{(1,n)*}]^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^{(i,n)} [\mathbf{B}_Q^{(i)}(l_i) \Delta Q^{(i)} + \mathbf{B}_N^{(i)}(l_i) \Delta N^{(i)}], \quad (4.149)$$

тобто  $\Delta v_1''(0)$ ,  $\Delta v_n(l_n)$  і  $\Delta v_n'(l_n)$ . Після цього за допомогою рівності (4.142) можна визначити  $\Delta v_k(l_k)$ ,  $\Delta v_k'(l_k)$  і  $\Delta v_k''(l_k)$  при будь-якому  $k$ .

Застосуємо викладений алгоритм до побудови матриці коефіцієнтів впливу  $\mathbf{Y}$ , тобто покладемо  $\Delta P_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $\Delta F_k = 0$  ( $k \neq i$ ),  $\Delta F_i = 1$  (для деякого фіксованого  $i$ ) і визначимо прирости прогинів  $\Delta v_k(l_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Покладемо  $Y_{ik} = \Delta v_k(l_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Змінюючи  $i$  від 1 до  $n$  отримаємо всі елементи матриці  $\mathbf{Y}$ . Переходимо тепер до визначення приростів динамічних прогинів колони, зображеної на рис. 4.30. При цьому будемо використовувати метод лінійних прискорень в модифікації Вільсона [83,134]. Відповідно до методики, запропонованої в [134], спочатку визначаємо матрицю-стовпець приростів реакцій колони до точок  $M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\hat{\Delta R} = -[I + \frac{6}{(\hat{\Delta t})^2} MY]^{-1} \{ \frac{6}{(\hat{\Delta t})^2} M[V\hat{\Delta t} + a \frac{(\hat{\Delta t})^2}{2}] + \hat{\Delta F} \}. \quad (4.150)$$

Тут  $\hat{\Delta t} = \theta \Delta t$  ( $\Delta t$  – часовий крок,  $\theta > 1$  – деякий множник),  $\hat{\Delta F}$  – матриця-стовпець приростів сил  $F_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) на часовому інтервалі  $\hat{\Delta t}$ ,  $M$  – діагональна матриця мас точок  $M_k$ ,  $Y$  – матриця коефіцієнтів впливу,  $V$  і  $a$  – матриці-стовпці швидкостей і прискорень точок  $M_k$ , визначені в результаті обчислень на попередніх часових кроках,  $I$  – одинична матриця.

З формули

$$\hat{\Delta v} = -Y \hat{\Delta R}$$

знаходимо матрицю-стовпець приростів переміщень точок  $M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), відповідних часовому кроку  $\hat{\Delta t}$ , а з виразу

$$\hat{\Delta a} = \frac{6}{(\hat{\Delta t})^2} [\hat{\Delta v} - V\hat{\Delta t} - \frac{1}{2}a(\hat{\Delta t})^2]$$

визначаємо матрицю-стовпець приростів прискорень цих точок на тому ж часовому кроці, а потім з формул

$$\Delta a = \frac{1}{\theta} \hat{\Delta a}, \Delta V = (a + \frac{1}{2} \Delta a) \Delta t, \Delta v = V \Delta t + \frac{1}{2} (a + \frac{1}{3} \Delta a) (\Delta t)^2$$

визначаємо прирости прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок  $M_k$ , відповідні проміжку часу. Прискорення, швидкості і переміщення точок  $M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) після закінчення аналізованого проміжку часу приймають наступні значення:

$$a_{нов} = a + \Delta a, V_{нов} = V + \Delta V, v_{нов} = v + \Delta v.$$

**Приклад 4.9.** Проблема динамічної стійкості споруд має велике значення при розрахунках конструкцій на сейсмічні впливи при урахуванні їх вертикальної складової. Цій проблемі присвячена численна література (наприклад, [25,108,109]). Будемо досліджувати динамічну стійкість залізобетонної колони при наступних значеннях параметрів: число мас (вантажів)  $n = 3$ , маси матеріальних точок (вантажів) однакові і рівні деякій величині  $m$ , значення якої буде прийнято пізніше. Будемо розглядати

випадок, коли вертикальні змінні сили також однакові і визначаються формулою  $G_k(t) = \hat{G} \sin \omega t$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Геометричні параметри:  $l_1 = l_2 = l_3 = 4$  м. Розміри поперечного перерізу:  $b = 0.8$  м,  $h = 0.28$  м. Армування симетричне:  $S_1 = S_2 = 8,5 \text{ см}^2$ . Сталь марки А-III, характеристики бетону:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4$  МПа,  $R_c = 19$  МПа,  $R_p = 1,9$  МПа,  $\Gamma_c = 0.583 \cdot 10^{-3}$ . Прийmemo  $m = 25$  Т і проведемо

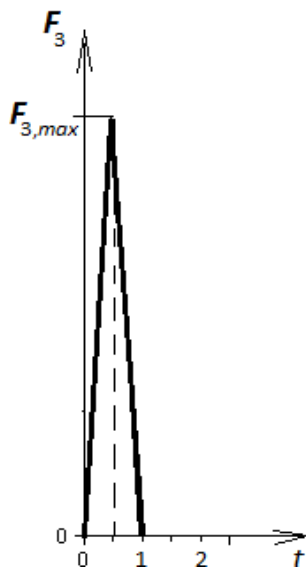


Рис. 4.32 Графік імпульсу

дослідження вільних коливань колони в площині її найменшої жорсткості. Як і в попередніх прикладах передбачається, що навантаження колони відбувається в два етапи. На першому етапі відбувається поступове збільшення маси вантажів (тобто поступове збільшення сил тяжіння) від нуля до заданого значення. Це призводить до появи в точках  $M_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) постійних вертикальних сил  $P = mg = 245,25$  кН, які в подальшому залишаються незмінними. Потім при  $t = 0$  починається другий етап: на зосереджену масу  $M_3$  впливає імпульс  $F_3(t)$ , графік якого представлений на рис. 4.32. після закінчення дії імпульса, тривалість якого дорівнює

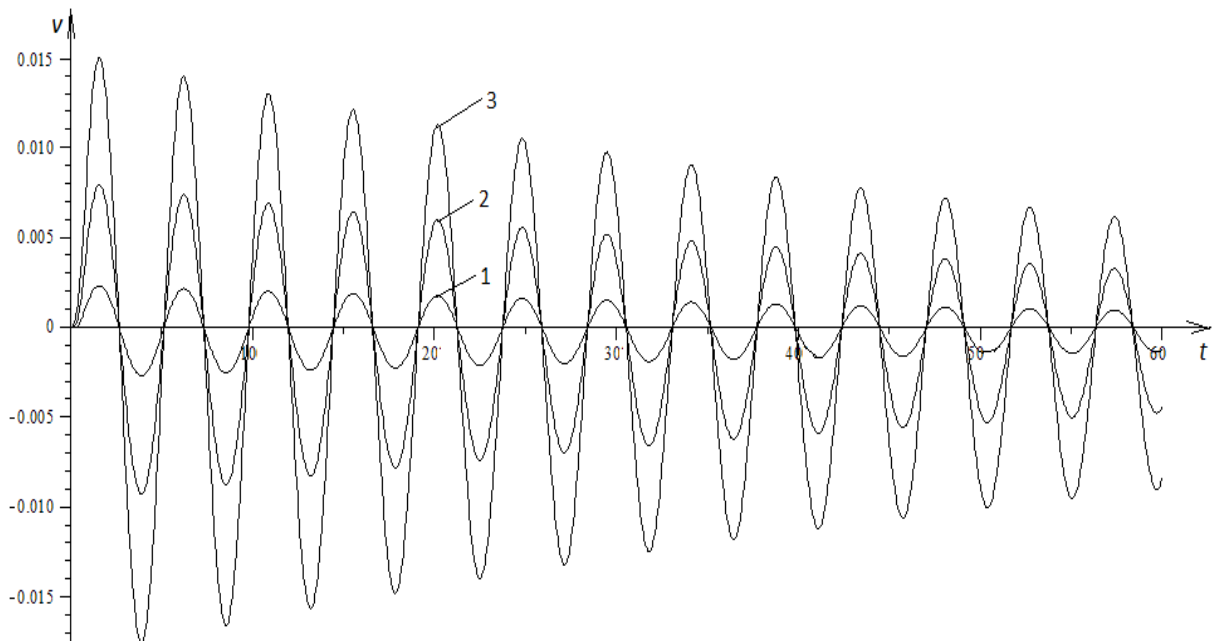


Рис. 4.33 Вільні коливання вантажів на колоні після впливу імпульсу



1 с, колона з вантажами здійснює вільні коливання. Переміщення вантажів визначаються за допомогою покрокового методу, викладеного вище. Графіки руху вантажів представлені на рис. 4.33 ( $F_{3, \max} = 1 \text{ кН}$ ).

Нумерація графіків відповідає номерам вантажів. Помітно загасання коливань. Крім того, нижча частота коливань, визначена за пружною стадією, дорівнює  $\omega_{1,y} = 1,719 \text{ с}^{-1}$ , що відповідає періоду  $T_{1,y} = 3,654 \text{ с}$ . Неважко визначити з рис. 4.33, що частота вільних коливань значно нижче. Це пояснюється тим, що стиснутий бетон володіє дотичним модулем пружності, набагато меншим, ніж початковий. Якщо визначити коефіцієнти впливу колони після закінчення початкового етапу навантаження, а потім на їх підставі знайти нижчу частоту, то вона виявиться рівною  $\omega_1 = 1,353 \text{ с}^{-1}$ , що відповідає періоду  $T_1 = 4,644 \text{ с}$  і досить добре відповідає графіку на рис. 4.33. Тому при дослідженні динамічної стійкості будемо виходити з значень частот, визначених за запропонованою вище методикою.

Досліджуємо тепер рух колони під дією поперечного імпульсного впливу  $F_3(t)$  і гармонійних осьових сил  $G_k(t) = \hat{G} \sin \omega t$  ( $k = 1,2,3$ ). Прийmemo  $\hat{G} = 61 \text{ кН}$ . Сила  $F_3(t)$  виводить колону з неізогнутого стану, а результат впливу сил  $G_k(t)$  ( $k = 1,2,3$ ) залежить від їх частоти. Як відомо з теорії [22,97,98], при деяких значеннях  $\omega$ ,  $P$  і  $\hat{G}$  виникають інтенсивні поперечні коливання. Таке явище називається параметричним резонансом. Введемо коефіцієнт збудження  $\mu$ , який визначається за формулою

$$\mu = \hat{G} / 2(P_* - P) \quad (4.151)$$

( $P_*$  – значення  $P$ , відповідне втраті статичної стійкості колони; в даному випадку  $P_* = 640 \text{ кН}$ ,  $\mu = 0,077$ ). У площині  $(\mu, \omega)$  множини значень цих параметрів, при яких виникають необмежено зростаючі коливання, називаються областями динамічної нестійкості. У лінійному випадку при відсутності загасання кожна область динамічної нестійкості (дамо їй номер  $j$ ) містить точку  $\mu = 0$ ,  $\omega = 2\omega_1 / j$  ( $j = 1,2,\dots$ ). Головна область (або як її інакше називають «область головного параметричного резонансу») відповідає  $j = 1$ ,

тобто випадку  $\omega = 2\omega_1 = 2,706 \text{ c}^{-1}$ . При наявності загасання області стають менше і починаються з точки з координатами  $\omega = 2\omega_1 / j$  и  $\mu = \mu^*$  ( $\mu^*$  - деяке позитивне число, що зростає зі збільшенням номера  $j$ ).

Досліджуємо спочатку нерезонансний випадок, коли  $\omega \neq 2\omega_1 / j$  ні при якому  $j$ , наприклад,  $\omega = 2,095 \text{ c}^{-1}$  ( $T = 3 \text{ c}$ ). Графіки руху точок  $M_k$  ( $k = 1,2,3$ ) представлені на рис. 4.34. Легко помітити, що графіки на малюнках 4.33 і 4.34 практично не відрізняються один від одного, тобто вплив сил  $G_k(t)$  ( $k = 1,2,3$ ) не відчувається..

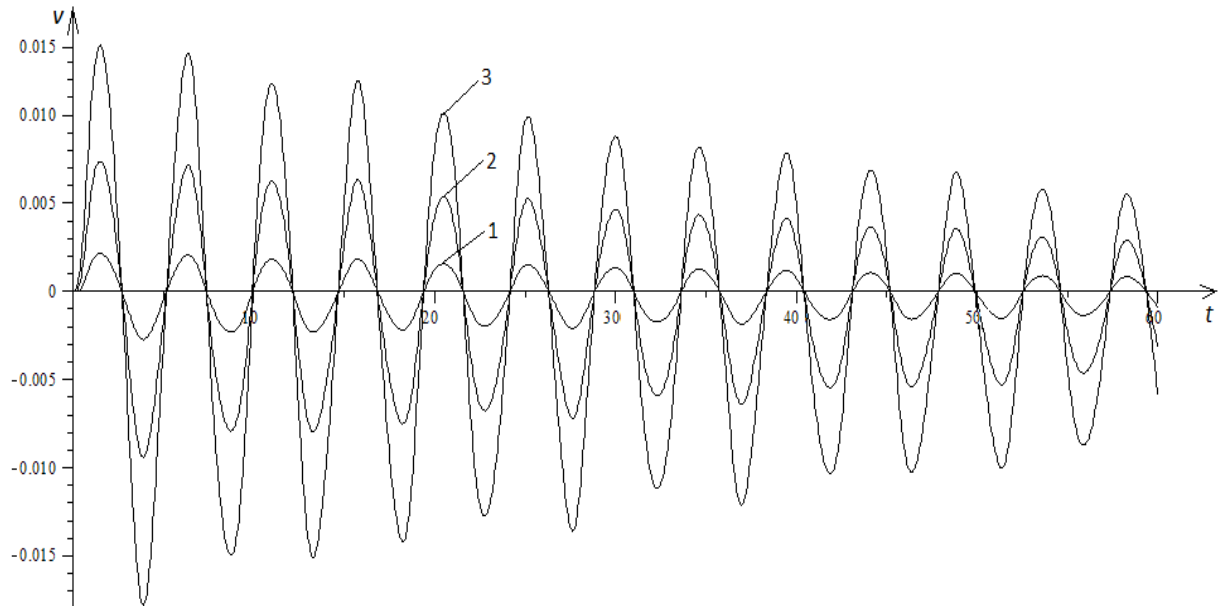


Рис. 4.34 Коливання вантажів при відсутності параметричного резонансу

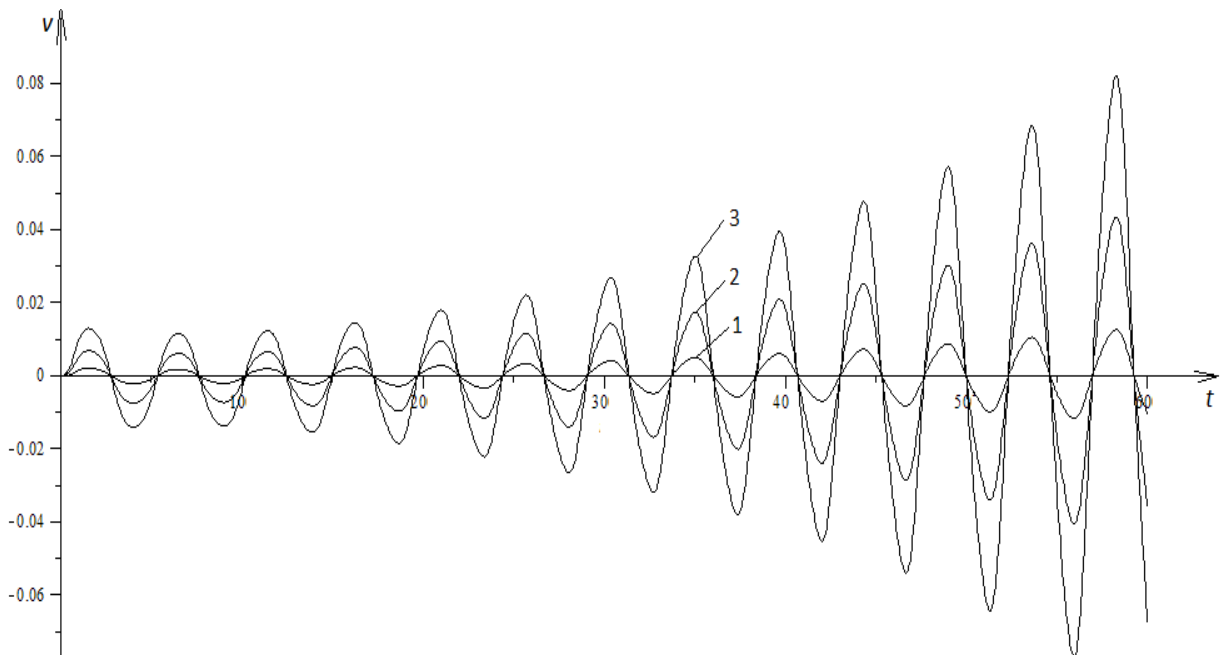


Рис. 4.35 Коливання вантажів при наявності параметричного резонансу

Нехай тепер  $\omega = 2\omega_1 = 2,706 \text{ с}^{-1}$ . Значення  $P_i$  залишимо незмінними. Графіки руху вантажів в цьому випадку представлені на рис. 4.35. Легко помітити присутність резонансу.

Перевіримо наявність другого резонансу, тобто коли  $j = 2$  і  $\omega = \omega_1$ . Як показали обчислення, при  $\mu = 0,077$  цей резонанс не спостерігається. Збільшимо  $\mu$ , прийнявши  $P = 392,4 \text{ кН}$  (тобто  $m = 40 T$ ),  $\hat{G} = 98,1 \text{ кН}$ . Тоді виявиться, що  $\mu = 0,25$ . Нове значення першої частоти  $\omega_1 = 0,802 \text{ с}^{-1}$  ( $T_1 = 7,83 \text{ с}$ ). Графіки руху точок  $M_k$  ( $k = 1,2,3$ ) наведені на рис. 4.36. Очевидна наявність резонансу.

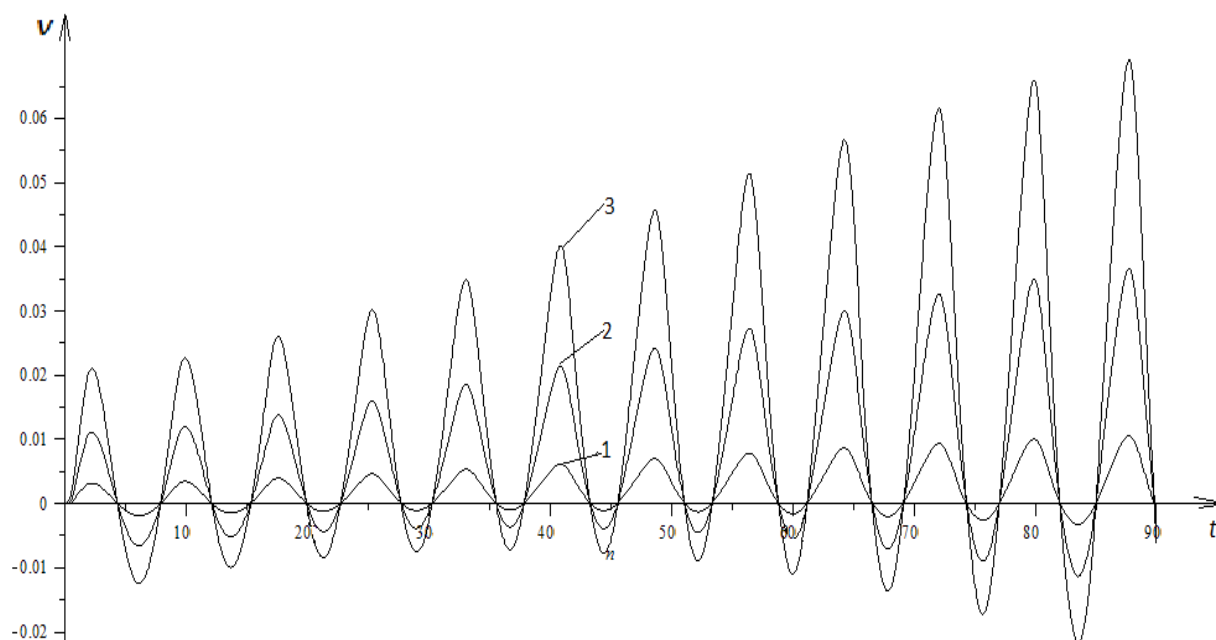


Рис. 4.35 Коливання вантажів при другому параметричному резонансі

У цьому параграфі викладено алгоритм дослідження згинних коливань злізобетонної колони в площині її найменшої жорсткості, викликані імпульсною дією і системами осьових змінних сил. Показана наявність параметричних резонансів, тобто рзгойдування згинних коливань при деяких значеннях частот і амплітуд поздовжніх сил.

Зміст даного розділу опубліковано в роботах [223-236].

#### **Висновки за розділом 4**

1. Запропоновано метод побудови диференціального рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням геометричної та фізичної нелінійностей і пластичності бетону при складному навантаженні виходячи з асоційованого закону пластичної течії для покрокового вирішення задач динаміки залізобетонних балок і рам.

2. На підставі побудованого диференціального рівняння проведено дослідження квазістатичного руху одновимірної моделі залізобетонних каркасних споруд при багатоциклових завантаженні. Досліджено процес накопичення залишкових деформацій.

3. Вивчені коливання одновимірної моделі залізобетонних каркасних споруд під дією змінних горизонтальних і вертикальних сил. Виявлено явище динамічної нестійкості і параметричного резонансу (розгойдування поперечних коливань при певних частотах зміни поздовжніх сил). Показано, що параметричний резонанс є більш небезпечним явищем, ніж звичайний резонанс.

4. Проведено побудову варіанта методу граничних елементів для дослідження статичних та динамічних задач пружнопластичного згину елементів та одновимірних моделей залізобетонних каркасних споруд. При цьому при побудуванні фундаментальних рішень задачі Коші для побудованого у параграфі 4.1 диференціального рівняння використовується метод розкладу розшукованих функцій в степеневі ряди.

5. Проведено модифікацію методу граничних елементів. При цьому при побудуванні фундаментальних рішень задачі Коші для побудованого у параграфі 4.1 диференціального рівняння використовується метод представлення розшукованих функцій в вигляді кусково-постійних функцій.

## РОЗДІЛ 5

**ДИНАМІКА ДВОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ  
КАРКАСНИХ БУДІВЕЛЬ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ  
НЕЛІНІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЇ І ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ І  
ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ  
(метод граничних елементів)**

**5.1 Застосування методу граничних елементів при дослідженні динаміки одноповерхової багатопрольотної залізобетонної каркасної споруди при дії плоскої системи змінних сил**

Відповідно до визначення п. 1.4 двовимірною моделлю одноповерхової протяжної залізобетонної каркасної споруди є плоска багатопрольотна залізобетонна рама.

Розглянемо спочатку квазістатичний рух плоскої залізобетонної багатопрольотної рами в своїй площині, викликане системою горизонтальних і вертикальних сил, що лежать в цій площині і прикладених до вузлів рами (рис. 5.1). При цьому передбачається, що рама невагома, а маса зосереджена в системі матеріальних точок  $M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n + 1$ ) ( $n$  - число прогонів). Якщо знехтувати поздовжніми деформаціями стержнів, то у рами залишиться тільки одна форма коливань - згинна, пов'язана з горизонтальними переміщеннями ригеля. Будемо вважати, що зміна сил, що діють на раму, з плином часу досить повільна в порівнянні з коливань рами.

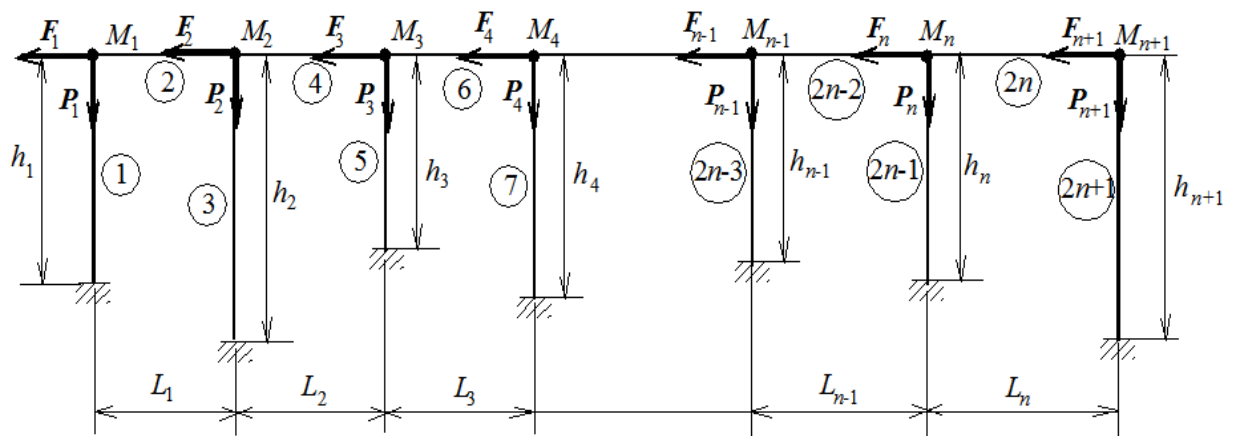


Рис. 5.1 Розрахункова схема багатопрольотної рами

Тоді інерційні ефекти будуть незначні і рух рами можна буде вважати квазістатичним. Конструкцію рами представимо у вигляді системи більш простих рам: перша - П-подібна рама, яка утворює перший прольот і складається зі стержнів 1, 2 і 3 (номера стержнів вказані в гуртках). Будемо називати її першим суперелементом. Кожна наступна складається з двох стержнів, які утворюють Г-подібну раму (наприклад, друга - зі стержнів 4 і 5). Вони будуть називатися  $k$ -м суперелементом відповідно до номеру прогону ( $k = 2, 3, \dots, n$ ).

Розглянемо зовнішні сили, що діють на першу раму (рис. 5.2). Крім заданих сил  $F_1, P_1, F_2, P_2$  діють ще реакції  $H_1, V_1, H_3, V_3$  і реактивні моменти  $M_{o,1}, M_{o,3}$ .

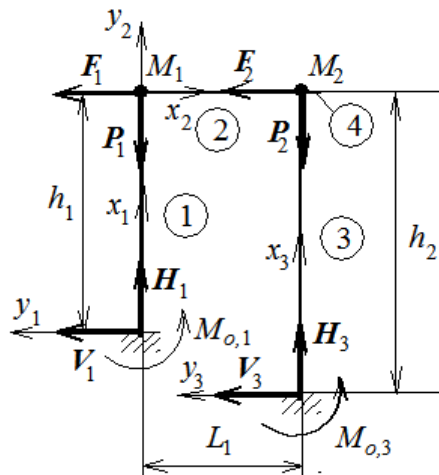


Рис. 5.2 Перший суперелемент

Для стержнів 1, 2 і 3, використовуючи покроковий метод, викладений у п. 4.4, будемо квадратні матриці  $A^{(i)}(x_i)$ , а також матриці-стовпці  $B_Q^{(i)}(x_i)$  і  $B_N^{(i)}(x_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ,  $x_i$  – абсциси точок стержнів в локальних системах координат). Потім запишемо рівності

$$\mathbf{X}^{(i)}(x_i) = \mathbf{A}^{(i)}(x_i)\mathbf{X}^{(i)}(0) + \mathbf{B}_Q^{(i)}(x_i)dQ^{(i)} + \mathbf{B}_N^{(i)}(x_i)dN^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.1)$$

Тут  $dQ^{(i)}$  і  $dN^{(i)}$  – величини приростів поперечної і поздовжньої сил в  $i$ -му стержні,

$$\mathbf{X}^{(i)}(x_i) = \begin{bmatrix} dv_i(x_i) \\ dv_i'(x_i) \\ dv_i''(x_i) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$(dv_i(x_i))$ - приріст прогину  $i$  – го стержня в перерізі з абсцисою  $x_i$ , викликане приростами  $dF_1, dP_1, dF_2, dP_2$  сил  $F_1, P_1, F_2, P_2$ , штрих означає похідну по  $x_i$ ).

Видозмінимо алгоритм, запропонований в п. 4.4. введемо матриці  $\mathbf{A}^{(i)}(x_i), \mathbf{B}_Q^{(i)}(x_i), \mathbf{B}_N^{(i)}(x_i), \mathbf{X}^{(i)}(x_i)$ :

$$\mathbf{A}^{(i)}(x_i) = \begin{bmatrix} y_1^{(i)}(x_i) & y_2^{(i)}(x_i) & y_3^{(i)}(x_i) & 0 & 0 \\ y_1^{(i)'}(x_i) & y_2^{(i)'}(x_i) & y_3^{(i)'}(x_i) & 0 & 0 \\ y_1^{(i)''}(x_i) & y_2^{(i)''}(x_i) & y_3^{(i)''}(x_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{(i)}(x_i) = \begin{bmatrix} dv_i(x_i) \\ dv_i'(x_i) \\ dv_i''(x_i) \\ dQ^{(i)} \\ dN^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{B}_Q^{(i)}(x_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & y_Q^{(i)}(x_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_Q^{(i)'}(x_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_Q^{(i)''}(x_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_N^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & y_N^{(i)}(x_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_N^{(i)'}(x_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_N^{(i)''}(x_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

За допомогою введених матриць формула (5.1) записується так:

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(i)}(x_i) = [\widehat{\mathbf{A}}^{(i)}(x_i) + \widehat{\mathbf{B}}_Q^{(i)}(x_i) + \widehat{\mathbf{B}}_N^{(i)}(x_i)] \widehat{\mathbf{X}}^{(i)}(0) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.4)$$

Зауважимо, що

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dv_1''(0) \\ dQ^{(1)} \\ dN^{(1)} \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{X}}^{(3)}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dv_3''(0) \\ dQ^{(3)} \\ dN^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

причому  $dQ^{(1)} = dV_1$ ,  $dN^{(1)} = -dH_1$ ,  $dQ^{(3)} = dV_3$ ,  $dN^{(3)} = -dH_3$ .

Розглянемо рівновагу граничного елемента  $M_1$ , розташованого між

стержнями 1 і 2 (рис. 5.3, на малюнку показані позитивні напрямки внутрішніх зусиль). З рівнянь рівноваги знаходимо

$$\begin{aligned} dN^{(2)} &= dF_1 + dQ^{(1)}, \\ dQ^{(2)} &= -dN^{(1)} - dP_1, \\ dM^{(2)}(0) &= dM^{(1)}(l_1). \end{aligned} \quad (5.6)$$

( $l_i$  – довжина  $i$  – го стержня,  $l_1 = h_1$ ).

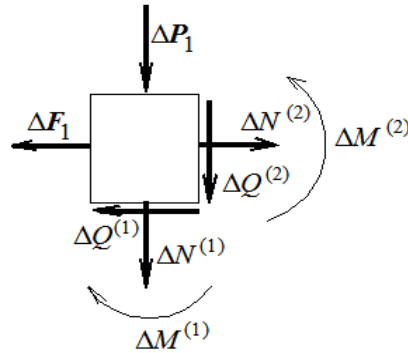


Рис. 5.3 Граничний елемент  $M_1$

З формули (4.50) отримуємо

$$\begin{aligned} dM^{(i)}(x_i) &= Y_1^{(i)}(x_i)dv_i'' + Y_2^{(i)}(x_i)dv_i' - \\ &- Y_3^{(i)}(x_i)dN^{(i)} / H_0^{(i)} + Y_4^{(i)}(x_i)dQ^{(i)} / H_0^{(i)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Тут  $Y_k^{(i)}(x_i)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) – функції, визначені на попередньому кроці алгоритму,  $H_0^{(i)}$  – початкова жорсткість поперечного перерізу  $i$ -го стержня.

Зауважимо, що

$$dv_2'(0) = dv_1'(l_1), \quad dv_2(0) = 0 \quad (5.8)$$

(друга рівність випливає з передбачуваної поздовжньої нестискуємості стержнів,  $l_1 = h_1$ ).

Співвідношення (5.6) – (5.8) можуть бути записані в наступному вигляді:

$$C^{(2)} \widehat{X}^{(2)}(0) = D^{(1)} \widehat{X}^{(1)}(l_1) + U_1, \quad (5.9)$$

де



$$\mathbf{C}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{(i)}(0) & Y_1^{(i)}(0) & Y_4^{(i)}(0)/H_0^{(i)} & -Y_3^{(i)}(0)/H_0^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.9a)$$

$$\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -dP_k \\ dF_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{(1)}(l_1) & Y_1^{(1)}(l_1) & Y_4^{(1)}(l_1)/H_0^{(1)} & -Y_3^{(1)}(l_1)/H_0^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

З (5.9) отримуємо

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(2)}(0) = [\mathbf{C}^{(2)}]^{-1} \mathbf{D}^{(1)} \widehat{\mathbf{X}}^{(1)}(l_1) + [\mathbf{C}^{(2)}]^{-1} \mathbf{U}_1. \quad (5.10)$$

Розглянемо тепер рівновагу граничного елемента  $M_2$ , що з'єднує стержні 2, 3 і 4 (рис. 5.4).

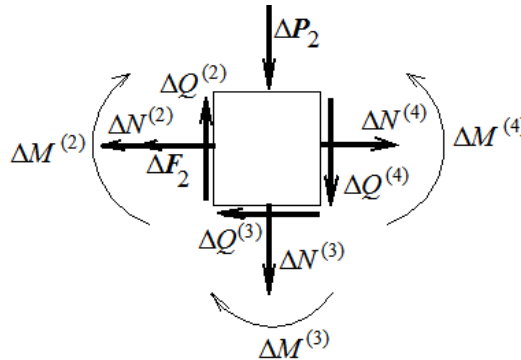


Рис. 5.4 Граничний елемент  $M_2$

З рівнянь рівноваги знаходимо

$$\begin{aligned} dN^{(4)} &= dN^{(2)} + dF_2 + dQ^{(3)}, \\ dQ^{(4)} &= dQ^{(2)} - dN^{(3)} - dP_2, \\ dM^{(4)}(0) &= dM^{(2)}(l_2) + dM^{(3)}(l_3). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Тут  $l_2 = L_1$ ,  $l_3 = h_2$ . З співвідношень  $dv_4'(0) = dv_2'(l_2) = dv_3'(l_3)$ ,  $\Delta v_4(0) = 0$

впливає, що (5.11) можна записати так

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(4)}(0) = [\mathbf{C}^{(4)}]^{-1} \mathbf{D}^{(2)} \widehat{\mathbf{X}}^{(2)}(l_2) + [\mathbf{C}^{(4)}]^{-1} \mathbf{D}^{(3)} \widehat{\mathbf{X}}^{(3)}(l_3) + [\mathbf{C}^{(4)}]^{-1} \mathbf{U}_2, \quad (5.12)$$

де

$$D^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{(i)}(l_i) & Y_1^{(i)}(l_i) & Y_4^{(i)}(l_i)/H_0^{(i)} & -Y_3^{(i)}(l_i)/H_0^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (i > 1).$$

**Зауваження 5.1.** З формул (5.10), (5.12) і (5.4) випливає, що елементи будь-якої матриці-стовпця  $\widehat{X}^{(i)}(x_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) є лінійними функціями елементів матриць-стовпців  $\widehat{X}^{(1)}(0)$  і  $\widehat{X}^{(3)}(0)$ .

Формула (5.12) дозволяє перейти до наступного (другого) суперелемента (рис. 5.5 при  $k = 2$ ). Ця формула дозволяє висловити елементи стовпця  $\widehat{X}^{(4)}(0)$  через величини  $\Delta v_j''(0)$ ,  $\Delta Q^{(j)}$ ,  $\Delta N^{(j)}$  ( $j = 1, 3$ ). За допомогою (5.4) визначаємо  $\widehat{X}^{(4)}(l_4)$  і  $\widehat{X}^{(5)}(l_5)$ , причому  $\widehat{X}^{(5)}(0)$  має такий вигляд:

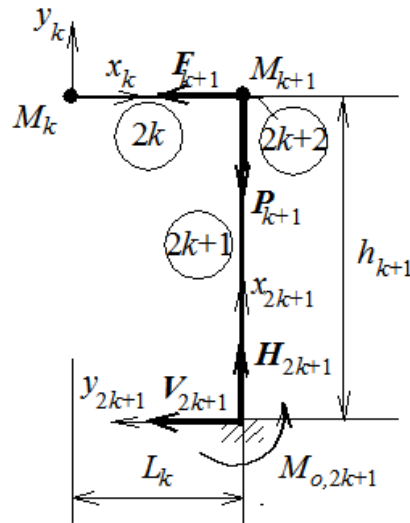


Рис. 5.5 Схема другого суперелементу

$$\widehat{X}^{(5)}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta v_5''(0) \\ \Delta Q^{(5)} \\ \Delta N^{(5)} \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Далі за допомогою формули, аналогічної (5.12), визначаємо

$$\widehat{X}^{(6)}(0) = [C^{(6)}]^{-1} D^{(4)} \widehat{X}^{(4)}(l_4) + [C^{(6)}]^{-1} D^{(5)} \widehat{X}^{(5)}(l_5) + [C^{(6)}]^{-1} U_3. \quad (5.14)$$

З (5.4), (5.10) і (5.14) випливає, що елементи стовпців  $\widehat{X}^{(4)}(l_4)$ ,  $\widehat{X}^{(5)}(l_5)$  и  $\widehat{X}^{(6)}(0)$  є лінійними функціями величин  $\Delta v_j''(0)$ ,  $\Delta Q^{(j)}$ ,  $\Delta N^{(j)}$  ( $j = 1, 3, 5$ ).

**Зауваження 5.2.** Для стержня з номером  $2k$ , що відноситься до  $k$ -го прогону, формула (5.14) записується так

$$\begin{aligned} \widehat{X}^{(2k)}(0) = & [C^{(2k)}]^{-1} D^{(2k-2)} \widehat{X}^{(2k-2)}(l_{2k-2}) + \\ & + [C^{(2k)}]^{-1} D^{(2k-1)} \widehat{X}^{(2k-1)}(l_{2k-1}) + [C^{(2k)}]^{-1} U_k. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Звідси випливає, що для стержнів  $k$ -го прольоту елементи стовпців  $\widehat{X}^{(2k)}(0)$ ,  $\widehat{X}^{(2k)}(l_{2k})$ , а крім того, і  $\widehat{X}^{(2k+1)}(l_{2k+1})$  є лінійними функціями величин  $\Delta v_j''(0)$ ,  $\Delta Q^{(j)}$ ,  $\Delta N^{(j)}$  ( $j = 1, 3, \dots, 2k + 1$ ). Продовжуючи таким же чином далі для останнього  $n$ -го прольоту отримуємо, що елементи стовпців  $\widehat{X}^{(2n)}(l_{2n})$  і  $\widehat{X}^{(2n+1)}(l_{2n+1})$  з'являються лінійними функціями величин  $\Delta v_j''(0)$ ,  $\Delta Q^{(j)}$ ,  $\Delta N^{(j)}$  ( $j = 1, 3, \dots, 2n + 1$ ). Загальна кількість цих невідомих величин  $N_{\text{невід}} = 3n + 3$ .

Введемо позначення  $u_{1+3k} = \Delta v_{2k+1}''(0)$ ,  $u_{2+3k} = \Delta Q^{(2k+1)}$ ,  $u_{3+3k} = \Delta N^{(2k+1)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Необхідно мати  $3n + 3$  рівнянь для їх визначення. З умови поздовжньої нестискуємості стержнів і жорсткого з'єднання їх в вузлах маємо

$$\begin{aligned} \Delta v_{2k}(l_{2k}) = 0, \Delta v_{2k+1}(l_{2k+1}) = \Delta v_1(l_1), \\ \Delta v_{2k}'(l_{2k}) = \Delta v_{2k+1}'(l_{2k+1}) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ще три рівняння можна побудувати наступним чином. Введемо додатковий стержень, який має номер  $2n + 2$  і є продовженням ригеля за межі  $n$ -го прольоту. Так як він не завантажений, то для нього виконуються такі рівності:

$$\Delta v_{2n+2}''(0) = 0, \Delta Q^{(2n+2)} = 0, \Delta N^{(2n+2)} = 0 \quad (5.17)$$

і, крім того, його можна вважати лінійно пружним і в формулі (5.9а) для матриці  $C^{(2n+2)}$ , необхідної для обчислення стовпця  $X^{(2n+2)}(0)$ , покласти

$$Y_1^{(2n+2)}(0) = H_0^{(2n)}, \quad Y_2^{(2n+2)}(0) = Y_3^{(2n+2)}(0) = Y_4^{(2n+2)}(0) = 0.$$

Рівняння (5.16) і (5.17) можуть бути записані так

$$\left. \begin{aligned} \widehat{X}_1^{(2k)}(l_{2k}) &= 0 \\ \widehat{X}_1^{(2k+1)}(l_{2k+1}) - \widehat{X}_1^{(1)}(l_1) &= 0 \\ \widehat{X}_2^{(2k)}(l_{2k}) - \widehat{X}_2^{(2k+1)}(l_{2k+1}) &= 0 \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, n; \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} X_3^{(2n+2)}(0) &= 0 \\ X_4^{(2n+2)}(0) &= 0 \\ X_5^{(2n+2)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

З зауваження 5.2 випливає, що ліва частина кожного з них являє собою лінійну функцію невідомих  $u_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 3n + 3$ ), тобто система рівнянь (5.18) може бути записана так:

$$E_{i,0} + \sum_{k=1}^{3n+3} E_{i,k} u_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 3n + 3). \quad (5.19)$$

Для чисельного визначення величин  $E_{i,0}$  ( $i = 1, 2, \dots, 3n+3$ ) поступимо таким чином: покладемо всі величини  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 3n + 3$ ) рівними нулю, тобто приймемо, що

$$\Delta v_j''(0) = 0, \quad \Delta Q^{(j)} = 0, \quad \Delta N^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 3, \dots, 2n + 1),$$

і відповідно до викладеного вище алгоритма обчислимо значення величин, що стоять в лівих частинах формул (5.18). Ці значення і будуть значеннями коефіцієнтів  $E_{i,0}$  ( $i = 1, 2, \dots, 3n+3$ ).

Для визначення величин  $E_{i,k}$  ( $i = 1, 2, \dots, 3n+3$ ) для деякого  $k > 0$  зробимо так: покладемо, що  $u_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, 3n+3$ ), а  $u_k = 1$ , і знову обчислимо значення величин, що стоять в лівих частинах формул (5.18). Ці значення і будуть значеннями коефіцієнтів  $E_{i,k}$  ( $i = 1, 2, \dots, 3n+3$ ).

Після визначення значень всіх коефіцієнтів системи рівнянь (5.19) вирішуємо її і знаходимо значення невідомих величин  $\Delta v_j''(0)$ ,  $\Delta Q^{(j)}$ ,  $\Delta N^{(j)}$  ( $j = 1, 3, \dots, 2k + 1$ ), а через них за допомогою викладеного алгоритму визначаємо прирости переміщень і напружень в точках рами, а значить, і значення самих переміщень і напружень, складаючи збільшення зі

знайденими на попередніх кроках значеннями.

**Приклад 5.1.** Досліджуємо квазістатичний рух залізобетонної трипрольотної рами (рис. 5.6), викликаний горизонтальною гармонійною силою  $F_4$  з періодом  $T_4 = 5c$  і амплітудою  $\hat{F}_4 = 100 \text{ кН}$ . Маса матеріальних точок (вантажів)  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 35 \text{ Т}$ . Вертикальні сили постійні і рівні вагам вантажів. Геометричні параметри:  $L_1 = L_2 = L_3 = h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 8 \text{ м}$ . Розміри поперечних перерізів: колон –  $b = 0.8 \text{ м}$ ,  $h = 0.28 \text{ м}$ , ригеля –  $b = 0.8 \text{ м}$ ,  $h = 0.5 \text{ м}$ . Армування симетричне:  $S_1 = S_2 = 8,5 \text{ см}^2$ . Сталь марки А-III, характеристики бетону:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 19 \text{ МПа}$ ,  $R_p = 1,9 \text{ МПа}$ ,  $\Gamma_c = 0.583 \cdot 10^{-3}$ .

Як і в попередніх прикладах передбачається, що навантаження рами відбувається в два етапи. На першому етапі відбувається поступове збільшення маси вантажів від нуля до заданих значень. Це призводить до появи стискаючих поздовжніх сил в колонах, що впливає на

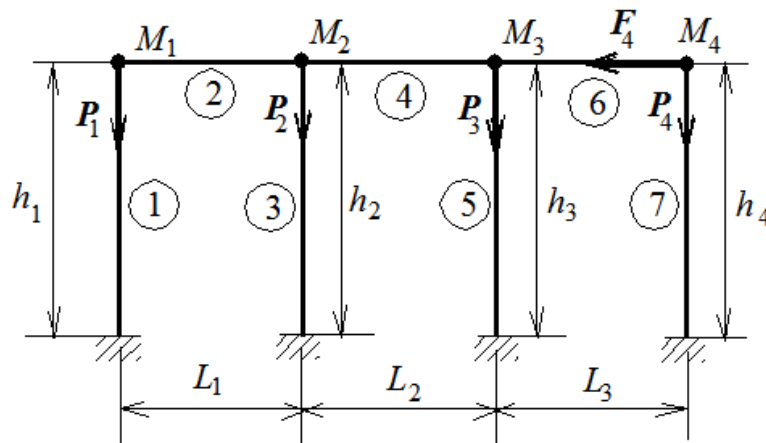


Рис. 5.6 Розрахункова схема рами

частоту вільних згинальних коливань. В даному випадку період вільних коливань  $T_0 = 1,07 \text{ с}$ , що набагато менше періоду вимушених коливань  $F_4$ . Тому можна знехтувати інерційними ефектами і вважати рух рами квазістатичним. Потім «включається» сила  $F_4 = \hat{F}_4 \sin \frac{2\pi}{T_4} t$ .

Рух точки  $M_4$  (а значить, і точок  $M_1, M_2, M_3$  наведено на рис. 5.7.

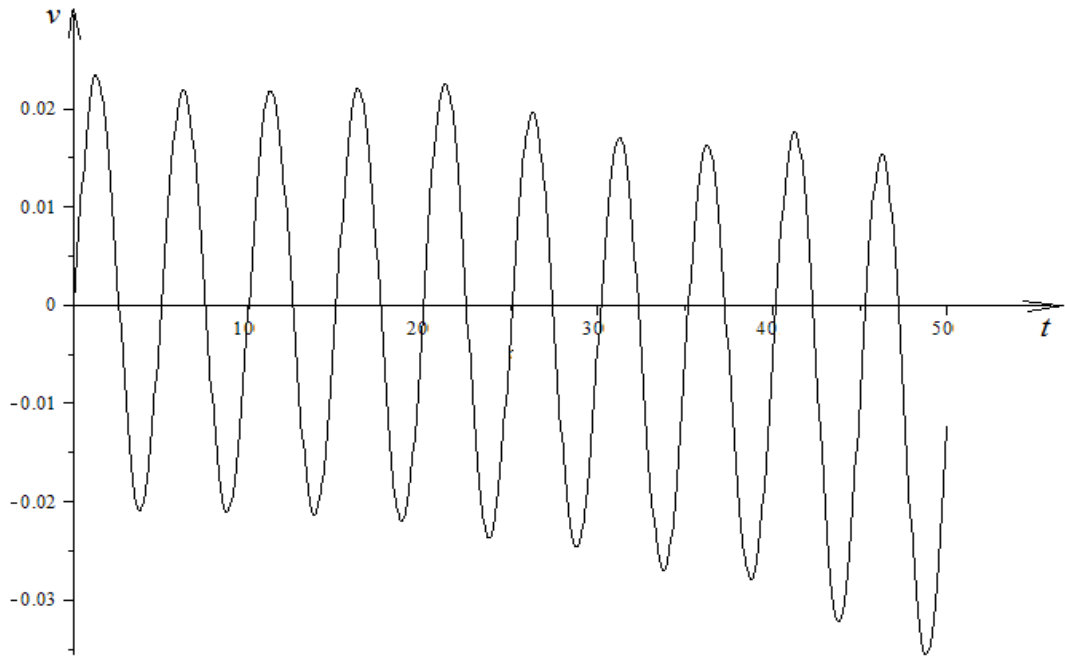


Рис. 5.7 Графік руху ригеля

Приступимо тепер до дослідження динамічної задачі для багатопрольотної залізобетонної рами, що знаходиться під дією системи зосереджених змінних сил, що лежать в площині рами та прикладених в її вузлах. При цьому передбачається, що маса рами зосереджена в системі матеріальних точок, а змінні сили - горизонтальні  $F_k(t)$  і вертикальні  $P_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n + 1$ ,  $n$  — число прогонів) прикладені до цих точок (рис. 5.8). При визначенні приростів переміщень точок використовується метод лінійного прискорення з модифікацією Вільсона [93,152].

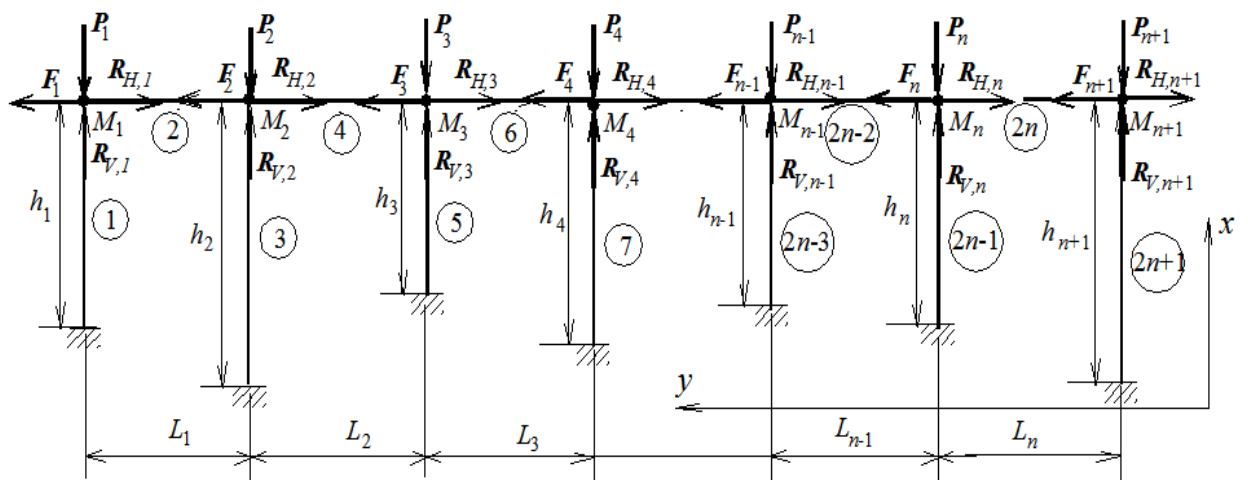


Рис. 5.8 Розрахункова схема рами

Як і при вирішенні квазістатичної задачі будемо нехтувати позовжніми деформаціями стержнів і зсувами точок стержнів уздовж їх початкових осей, викликаними викривленням цих осей. Тоді матеріальні точки будуть рухатися синхронно по горизонталі як одна матеріальна точка (позначимо її символом  $M_0$ ) з сумарною масою  $M = \sum_{k=1}^{n+1} m_k$ . Складаючи

основне рівняння динаміки для цієї точки, отримуємо

$$M\hat{\Delta}a = \hat{\Delta}F + \hat{\Delta}P + \hat{\Delta}R_H + \hat{\Delta}R_V. \quad (5.20)$$

Тут

$$M = \sum_{k=1}^{n+1} m_k, \hat{\Delta}F = \sum_{k=1}^{n+1} \hat{\Delta}F_k, \hat{\Delta}P = \sum_{k=1}^{n+1} \hat{\Delta}P_k, \hat{\Delta}R_H = \sum_{k=1}^{n+1} \hat{\Delta}R_{H,k}, \hat{\Delta}R_V = \sum_{k=1}^{n+1} \hat{\Delta}R_{V,k}.$$

Проектуючи (5.20) на вісь у глобальній системі координат, отримуємо

$$M\hat{\Delta}a = \hat{\Delta}F + \hat{\Delta}R_H. \quad (5.21)$$

На підставі методу лінійних прискорень маємо

$$\hat{\Delta}a = \frac{6}{(\hat{\Delta}t)^2} [\hat{\Delta}v - V\hat{\Delta}t - \frac{1}{2}a(\hat{\Delta}t)^2]. \quad (5.22)$$

Тут  $\hat{\Delta}t$  – приріст часу, причому відповідно до методу Вільсона  $\hat{\Delta}t = \theta\Delta t$  ( $\theta > 1$  – скалярний множник,  $\Delta t$  – часовий крок),  $\hat{\Delta}v$  – приріст переміщення точки  $M_0$ ,  $V$  і  $a$  – швидкість і прискорення її, визначені на попередньому кроці. Зауважимо, що прирости  $\hat{\Delta}v$ ,  $\hat{\Delta}a$ ,  $\hat{\Delta}F$  і  $\hat{\Delta}R_H$  відповідають проміжку часу  $\hat{\Delta}t$ .

Знайдемо залежність між приростом сумарної горизонтальної реакції колон  $\hat{\Delta}R_H$  і приростом зміщення  $\hat{\Delta}v$  точки  $M_0$ . Для цього використовуючи алгоритм, викладений в п. 5.1, визначаємо приріст  $Y$  переміщення точки  $M_0$ , викликаний одиничним квазістатичним приростом горизонтальної сили (квазістатичним приростом будемо називати таку зміну сили, яке породжує квазістатичне переміщення рами). Очевидно, для довільного квазістатичного прироста  $\hat{\Delta}F_{stat}$  сумарної горизонтальної сили матимемо

$$\hat{\Delta}v = Y \hat{\Delta}F_{stat} \quad (5.23)$$

а отже,

$$\hat{\Delta}v = -Y \hat{\Delta}R_H. \quad (5.24)$$

Підставляючи (5.24) в (5.22), а потім (5.22) в (5.21), отримуємо

$$\hat{\Delta}R = -\left[1 + \frac{6}{(\hat{\Delta}t)^2} MY\right]^{-1} \left\{ \frac{6}{(\hat{\Delta}t)^2} M[V\hat{\Delta}t + a \frac{(\hat{\Delta}t)^2}{2}] + \hat{\Delta}F \right\}. \quad (5.25)$$

Визначивши з (5.25)  $\hat{\Delta}R$ , знаходимо з (5.24) і (5.22)  $\hat{\Delta}v$  і  $\hat{\Delta}a$ , а потім з формул

$$\Delta a = \frac{1}{\theta} \hat{\Delta}a, \Delta V = (a + \frac{1}{2} \Delta a) \Delta t, \Delta v = V \Delta t + \frac{1}{2} (a + \frac{1}{3} \Delta a) (\Delta t)^2 \quad (5.26)$$

визначаємо прирости прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок, що відповідають проміжку часу  $\Delta t$ . Завершується крок обчисленням нових значень прискорень, швидкостей і переміщень:

$$a_{нов} = a + \Delta a, V_{нов} = V + \Delta V, v_{нов} = v + \Delta v. \quad (5.27)$$

**Приклад 5.2.** Досліджуємо рух трьохпрольотної залізобетонної рами (рис. 5.9), викликаний імпульсним впливом. Геометричні параметри, клас бетону і армування такі ж як і в прикладі в п. 5.1.

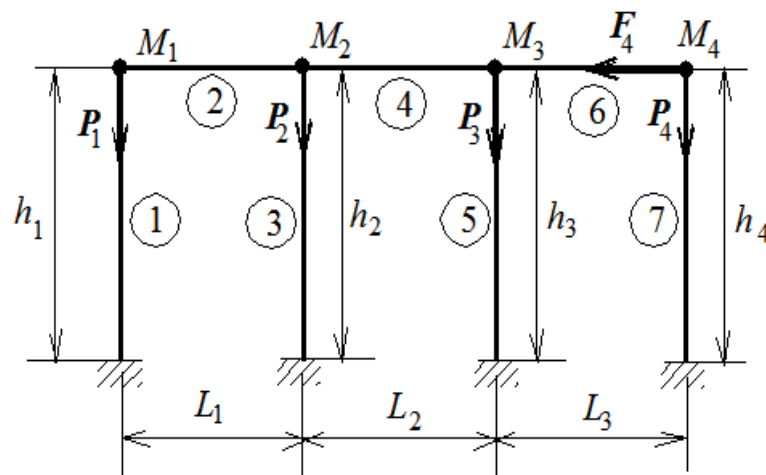


Рис. 5.9 Розрахункова схема рами

На першому етапі відбувається збільшення маси вантажів від нуля до заданого значення. Потім при  $t = 0$  починається другий етап: на зосереджену



масу  $M_4$  впливає імпульс (рис.5.10,  $F_4$  в кН,  $t$  в сек). Після закінчення дії імпульса, тривалість якого дорівнює 2 с, рама з вантажами здійснює вільні коливання.

Переміщення вантажів визначаються за допомогою покрокового методу лінійних прискорень з використанням методу граничних елементів для визначення реакцій колон по відношенню до вантажів. Графік руху вантажів представлений на рис. 5.11.

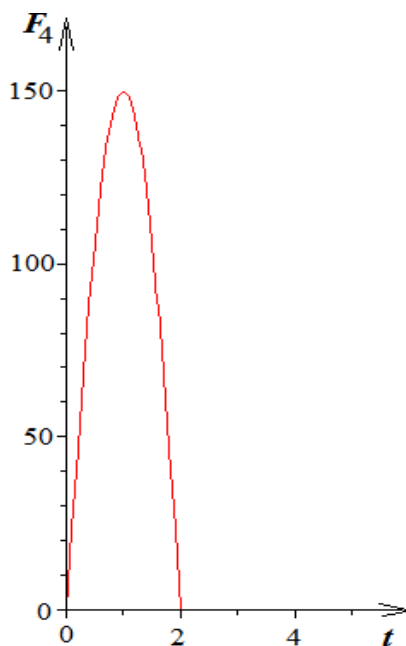


Рис. 5.10 Графік імпульсу

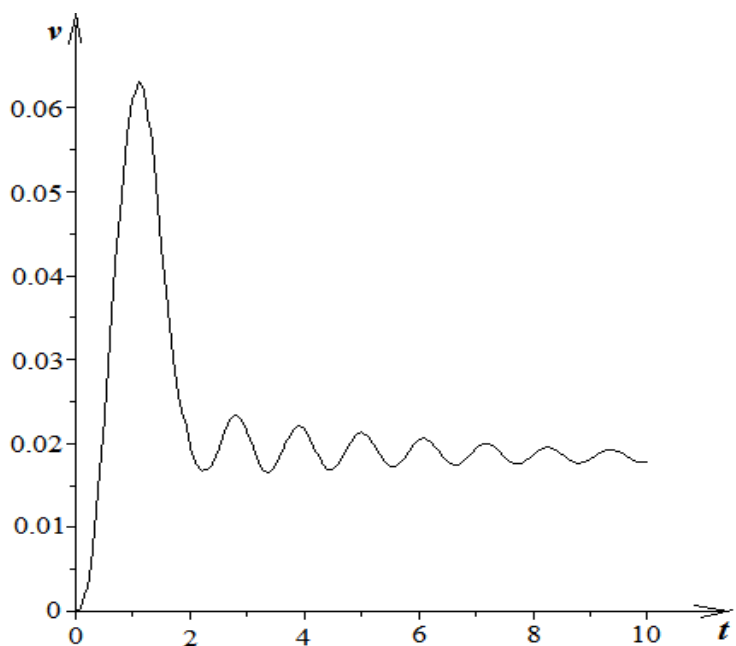


Рис. 5.11 Графік руху ригеля

Помітно загасання коливань. Також помітно поява залишкових деформацій, в результаті чого при загасанні коливань осі колон не прагнуть до своєї первісної прямолінійної форми, а залишаються зігнутими.

В цьому параграфі проведено побудову методу дослідження динаміки двовимірних моделей многорольотних залізобетонних каркасних споруд з урахуванням нелінійних деформаційних властивостей і пластичності матеріалів, заснованого на методі граничних елементів.

## 5.2 Прямий динамічний розрахунок причалу №19 Ізмаїльського морського торгового порту на сейсмічний вплив у вигляді акселерограми землетрусу

Передбачається, що фронт сейсмічної хвилі в ґрунті паралельний поздовжньої осі причалу. Тому деформації всіх опор причалу однакові і досить досліджувати коливання однієї з них.

Схематичний поперечний розріз причалу наведено на рис. 5.12. Поперечний переріз паль наведено на рис. 5.13, а поперечний переріз плити на рис. 5.14. Дотримуючись загальноприйнятої методики, при побудові розрахункової схеми робимо так: кожен з паль вважаємо жорстко затисненою колоною, причому місце защемлення визначається так – від середньої лінії між поверхнею кам'яної відсыпки і поверхнею ґрунту відраховується вниз

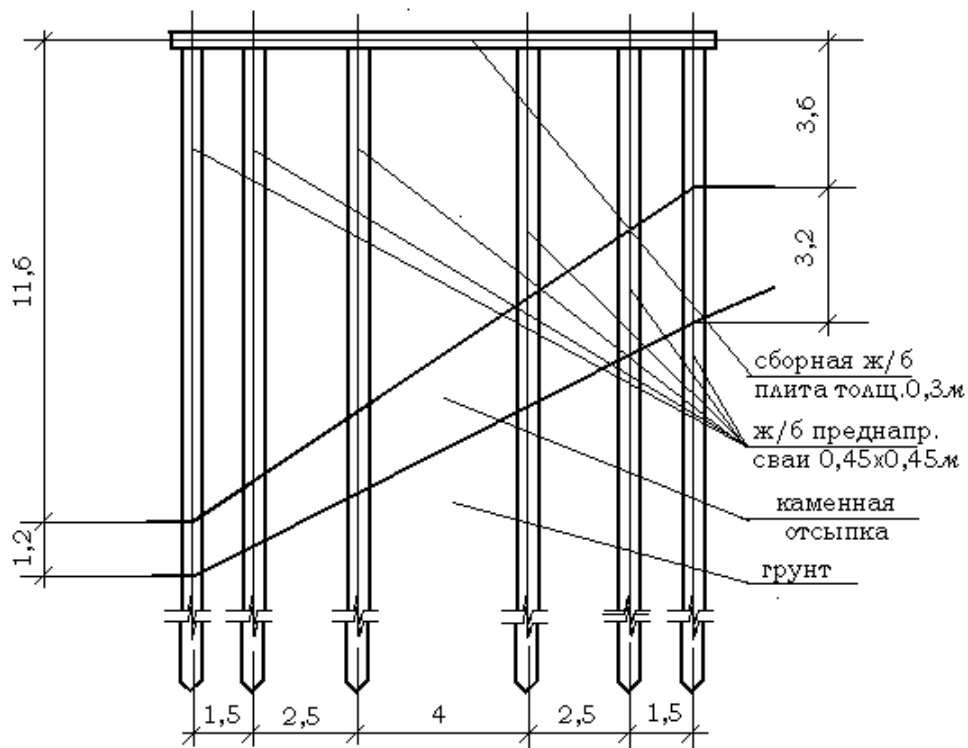


Рис. 5.12 Схематичний поперечний розріз причалу

три - п'ять поперечних розмірів палі. Ширина ригеля приймається рівною

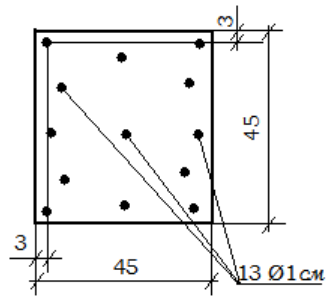


Рис. 5.13 Поперечний переріз палі

довжині кроку колон в поздовжньому напрямку причалу - 3м, що в два рази менше ширини плит, що утворюють ростверк, і, отже, містить вдвічі меншу кількість арматури.

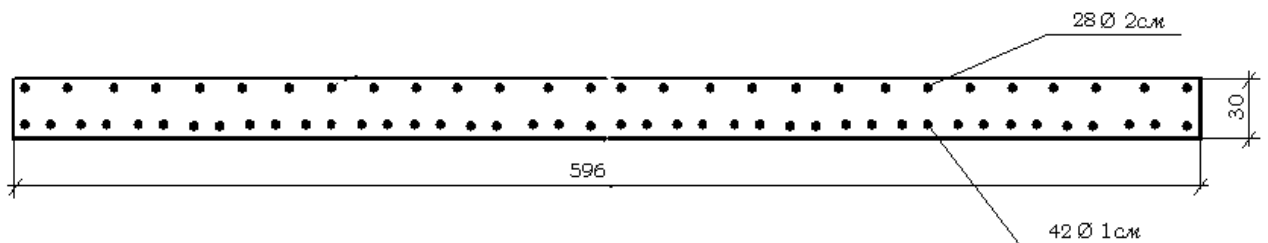


Рис. 5.14 Поперечний переріз плити

Отримана в результаті рама приведена на рис. 5.15.

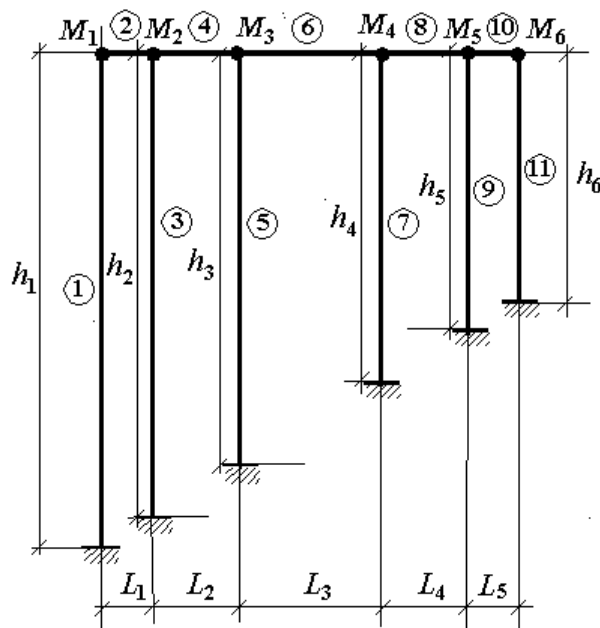


Рис. 5.15 Розрахункова схема поперечного перерізу причалу

На цьому рисунку  $h_1 = 14 \text{ м}$ ,  $h_2 = 13,125 \text{ м}$ ,  $h_3 = 11,67 \text{ м}$ ,  $h_4 = 9,33 \text{ м}$ ,  $h_5 = 7,875 \text{ м}$ ,  $h_6 = 7 \text{ м}$ ,  $L_1 = 1,5 \text{ м}$ ,  $L_2 = 2,5 \text{ м}$ ,  $L_3 = 4 \text{ м}$ ,  $L_4 = 2,5 \text{ м}$ ,  $L_5 = 1,5 \text{ м}$ ,  $M_1 = 5,77 \text{ Т}$ ,  $M_2 = 9,28 \text{ Т}$ ,  $M_3 = 12,64 \text{ Т}$ ,  $M_4 = 12,05 \text{ Т}$ ,  $M_5 = 7,95 \text{ Т}$ ,  $M_6 = 4,01 \text{ Т}$ .

Поперечний переріз колон збігається з поперечним перерізом паль (рис. 5.13), а поперечний переріз ригеля показано на рис. 5.16.

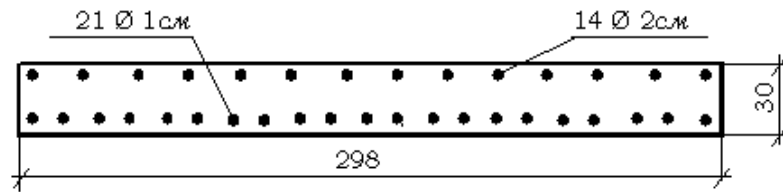


Рис. 5.16 Поперечний переріз ригеля рами

Консольна модель рами представлена на рис. 5.17. Консоль має нагорі додатковий зв'язок, який перешкоджає повороту поперечного перерізу. Така схема прийнята тому, що згинальна жорсткість ригеля рами значно більше, ніж згинальна жорсткість вертикальних стержнів. В цьому випадку прогин на кінці консолі при розрахунках в припущенні лінійно пружної роботи матеріалу визначається за формулою

$$v_k = \frac{Fl_k^3}{12H_k} \quad (5.28)$$

( $H_k$  - згинальна жорсткість вертикального стержня).

Згинальну жорсткість стержня можна знайти з (5.28)

$$c_k = \frac{12H_k}{l_k^3}$$

Звідси знаходимо

$$l_k = \sqrt[3]{\frac{12H_k}{c_k}} \quad (5.29)$$

Ця формула пов'язує дві невідомі характеристики консолі - її довжину  $l_k$  і згинальну жорсткість  $H_k$ . Задавши начення за однієї з них, наприклад,  $H_k$ , можна визначити іншу, тобто  $l_k$ . Значення ж  $c_k$  можна визначити з рівності

$$c_k = Mk_0^2,$$

де  $M$  - маса вантажу,  $k_0$  — кругова частота вільних коливань рами, визначена без допущення про абсолютну твердість ригеля. Для рами, зображеної на рис. 5.15,  $M = 51,7 \text{ T}$ ,  $k_0 = 13,23 \text{ c}^{-1}$ ,  $c_k = 9043,2 \text{ кН/м}$ .

Виберемо поперечний переріз консолі так, як показано на рис. 5.18.

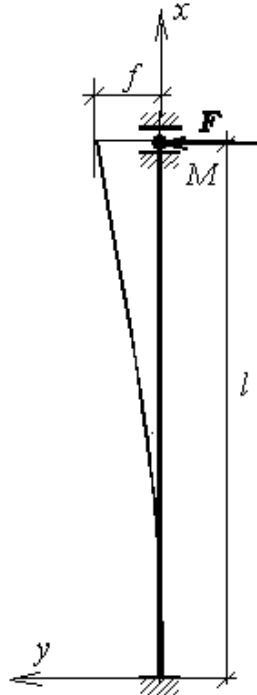


Рис. 5.17

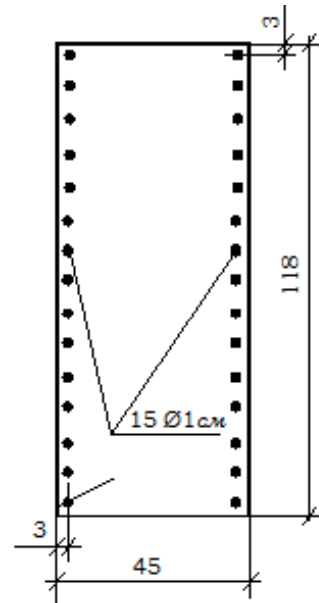


Рис. 5.18

Консольна модель рами      Поперечний переріз консолі (варіант I)

Знайдемо згинальну жорсткість консолі:

$$H_k = E_b b h^3 / 12 + 2E_a S_a h_1^2. \quad (5.30)$$

Тут  $E_b = 2,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $b = 1,18 \text{ м}$ ,  $h = 0,45 \text{ м}$ ,  $E_a = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $S_a = 15\pi \cdot 0,02^2 = 0,0057 \text{ м}^2$ ,  $h_1 = 0,195 \text{ м}$ . Тоді  $H_k = 354878 \text{ кНм}^2$  і з (2) знаходимо  $l_k = 7,78 \text{ м}$ .

Останні роки під егідою Української асоціації сейсмостійкого будівництва в Одеській області ведуться роботи з сейсмічного мікрорайонування майданчиків з урахуванням реальних ґрунтових умов. Створено базу даних акселерограм для різних майданчиків. Тут використовується одна з них (рис. 5.19).

Додамо основі консолі горизонтальні зміщення, прискорення яких змінюються з плином часу відповідно до цієї акселерограми. Спектр Фур'є

акселерограми представлений на рис. 5.20.

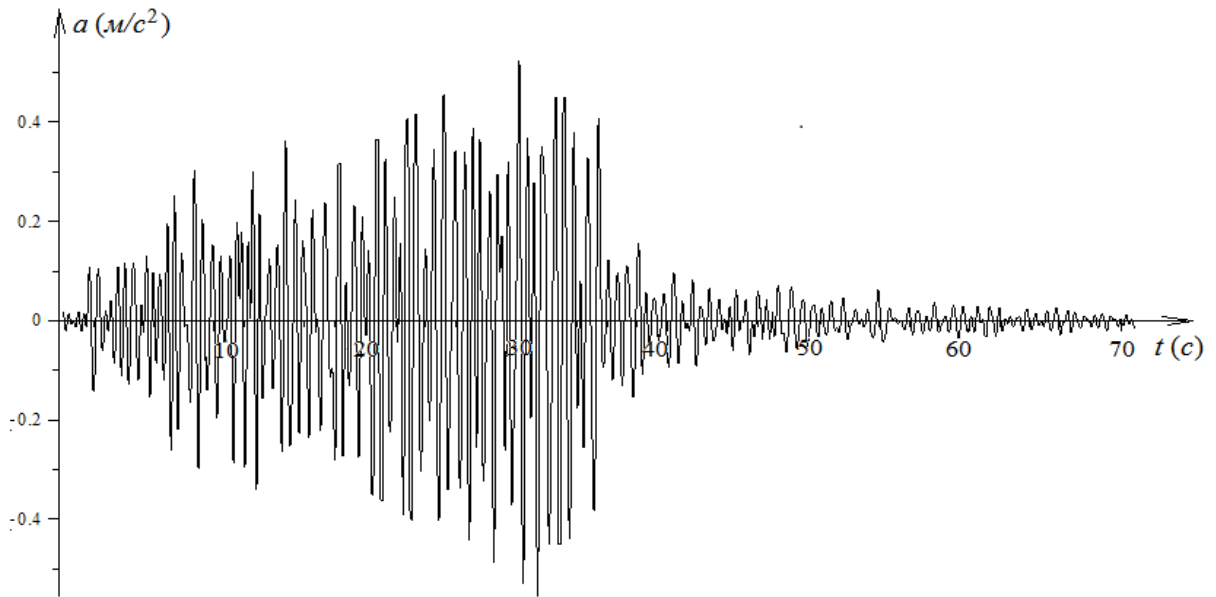


Рис. 5.19 Розрахункова акселерограма

Зауважимо, що пік, тобто максимальне значення абсолютної величини трансформанти Фур'є  $|A(k)|$  акселерограми спостерігається при  $k = k_{np} = 11,26\text{c}^{-1}$ . Його частота називається переважної круговою частотою землетрусу. Досліджуємо рух вантажу на консолі без урахування нелінійності і пластичності бетону (для цього необхідно покласти  $d[\varepsilon] = 0$ ).

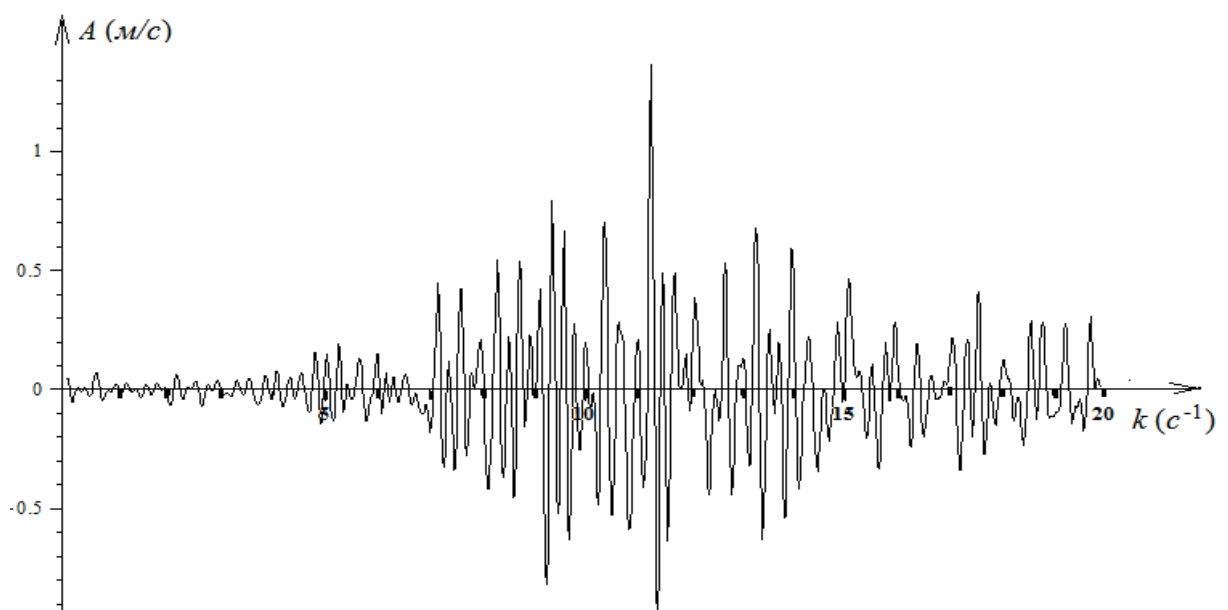


Рис. 5.20 Спектр Фур'є розрахункової акселерограми

Графік руху наведено на рис. 5.21. Так  $k_0 \neq k_{np}$ , то розглянутий випадок буде називати нерезонансним, таким чином графік, зображений на рис. 5.21, являє собою графік нерезонансних коливань. Прийmemo масу корисного навантаження  $m_{нав} = 0,46$  м. Неважко переконатися, що в цьому випадку кругова частота вільних коливань  $k_0$  стане рівною переважній круговій частоті землетрусу, акселерограма якого наведена на рис. 5.22. Як видно з графіка на рис. 5.22, переміщення вантажу більш ніж в два рази більше тих, які наведені на рис.5.21.

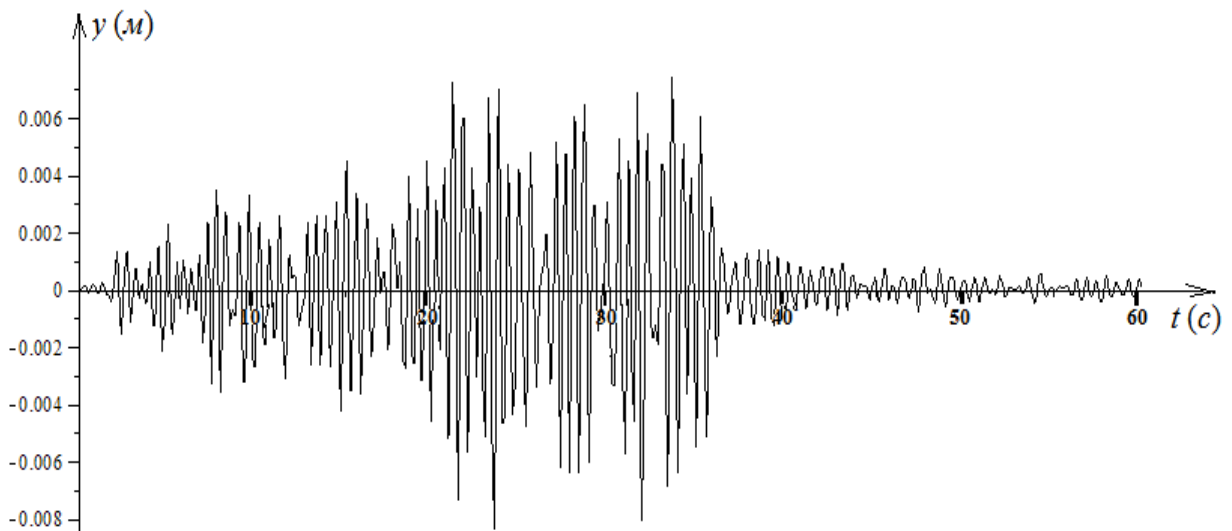


Рис. 5.21 Рух вантажу на пружній консолі (варіант I, нерезонансний випадок)

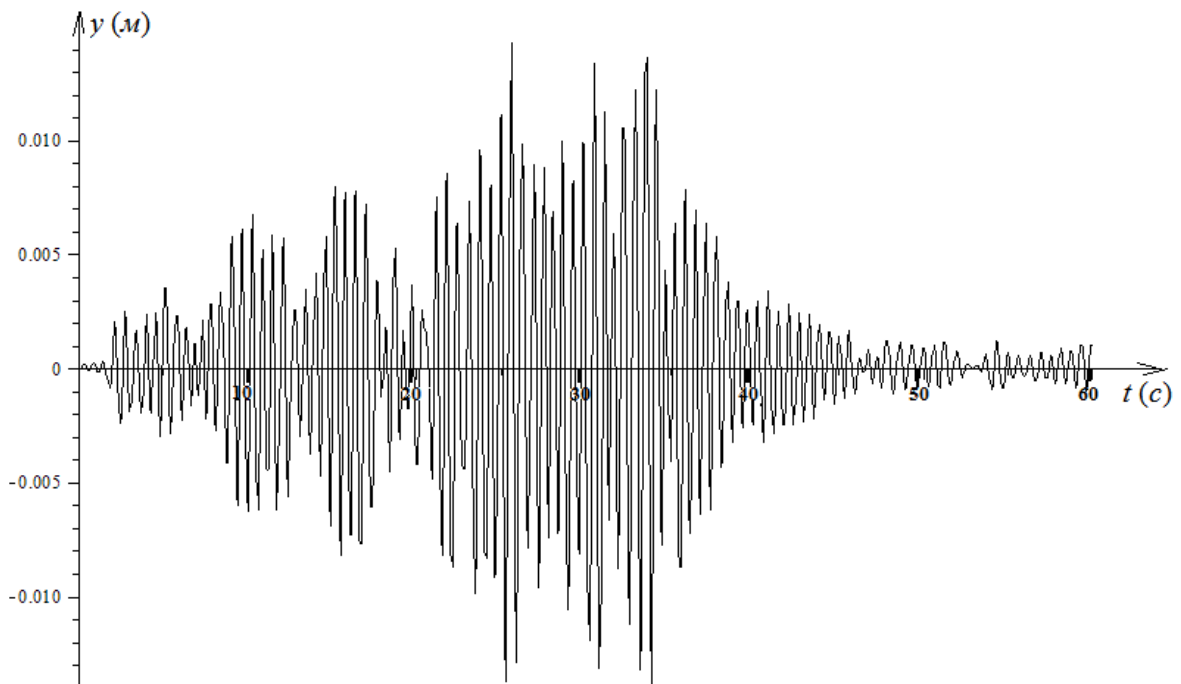


Рис. 5.22 Рух вантажу на лінійно пружної консолі (варіант 2, резонанс)

Врахуємо тепер нелінійність і пластичність бетону. Використовуючи алгоритм, запропонований вище з урахуванням пластичних деформацій (тобто при  $d[\varepsilon]_p \neq 0$ ), визначимо частоту вільних коливань. Для цього квазістатично прикладаємо горизонтальну одиничну силу до вантажу і визначаємо його зміщення  $\delta_{k,пл}$ . Воно виявилось рівним  $\delta_{k,пл} = 1,129 \cdot 10^{-4} \text{ м} / \text{кН}$ . Коефіцієнт жорсткості дорівнює  $c_{k,пл} = 1 / \delta_{k,пл} = 8854,64 \text{ кН} / \text{м}$ , а кругова частота  $k_{0,пл} = 13,087 \text{ с}^{-1}$ . Рух вантажу  $M$  представлено на рис. 5.23.

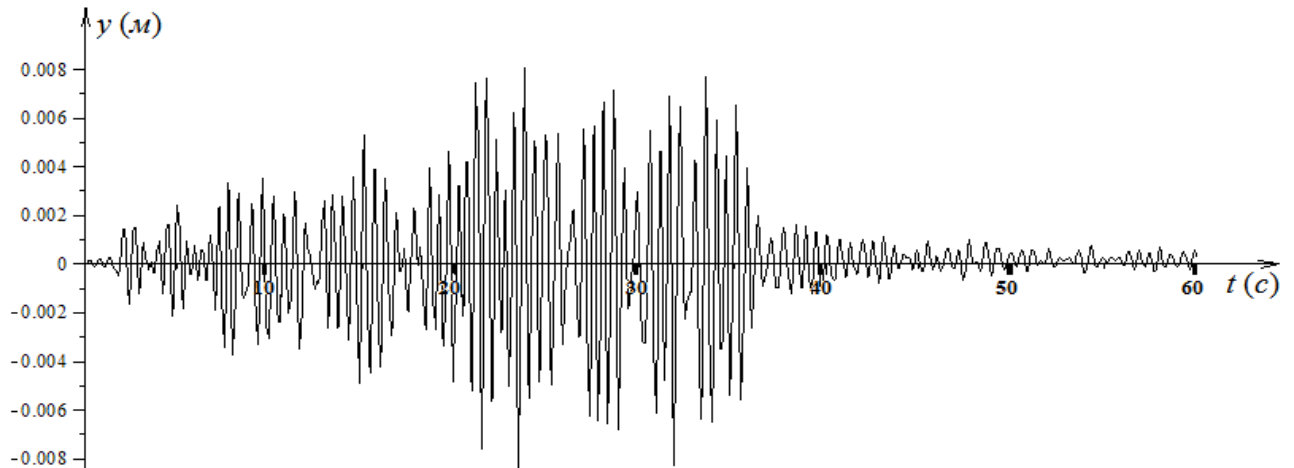


Рис. 5.23 Рух вантажу з урахуванням нелінійності бетону (нерезонанс)

Як можна помітити, відмінності від рис. 5.21 незначні. Для того щоб  $k_{0,пл}$  прийняло значення, рівне  $k_{пр} = 11,26 \text{ с}^{-1}$ , слід  $m_{нав}$  прийняти рівним 0,35 м. Графік руху — на рис. 5.24.

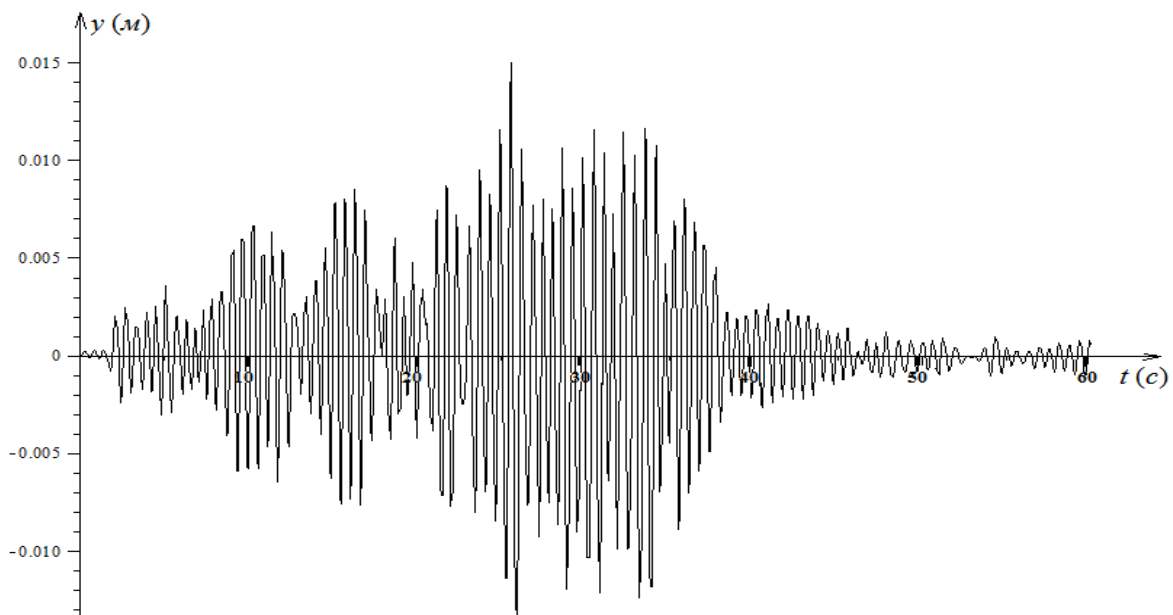


Рис. 5.24 Рух вантажу на консолі з урахуванням нелінійності бетону (варіант I, резонанс)



Прогини консолі більше, ніж при резонансі без урахування нелінійності і пластичності бетону.

Розглянемо тепер інший варіант консолі. приймемо поперечний переріз її таким, як він зображений на рис. 5.25. В цьому випадку  $H_k = 2497817 \text{ кНм}^2$  і з (4.198) знаходимо  $l_k = 14,82 \text{ м}$ . Якщо не враховувати нелінійність і пластичність, то рух вантажу описується графіками на рис. 5.21 і 5.22, тобто нічим не відрізняється від руху вантажу як в нерезонансному, так і в резонансному випадках попереднього варіанту консолі. Врахуємо тепер нелінійні і пластичні властивості бетону. Як і в попередньому варіанті, використовуючи алгоритм, запропонований в попередніх пунктах, визначимо частоту вільних коливань з урахуванням пластичних властивостей бетону. В цьому випадку вона приймає таке значення:

$$k_{0,пл} = 13,272 \text{ с}^{-1}.$$

Рух вантажу в цьому (нерезонансному) випадку представлено на рис. 5.26.

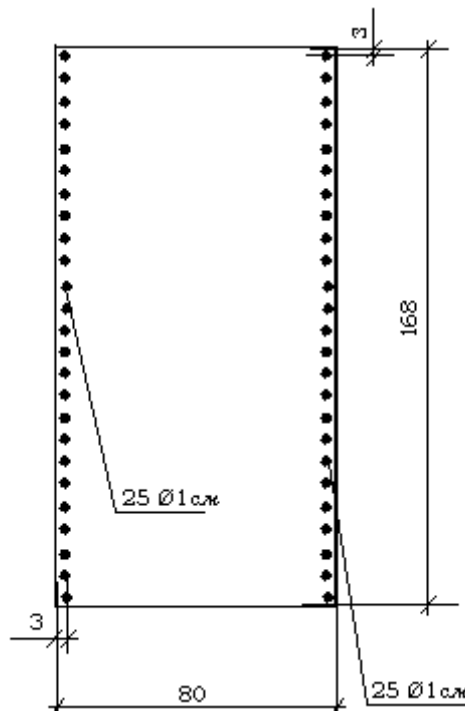


Рис. 5.25 Поперечний переріз консолі (варіант II)

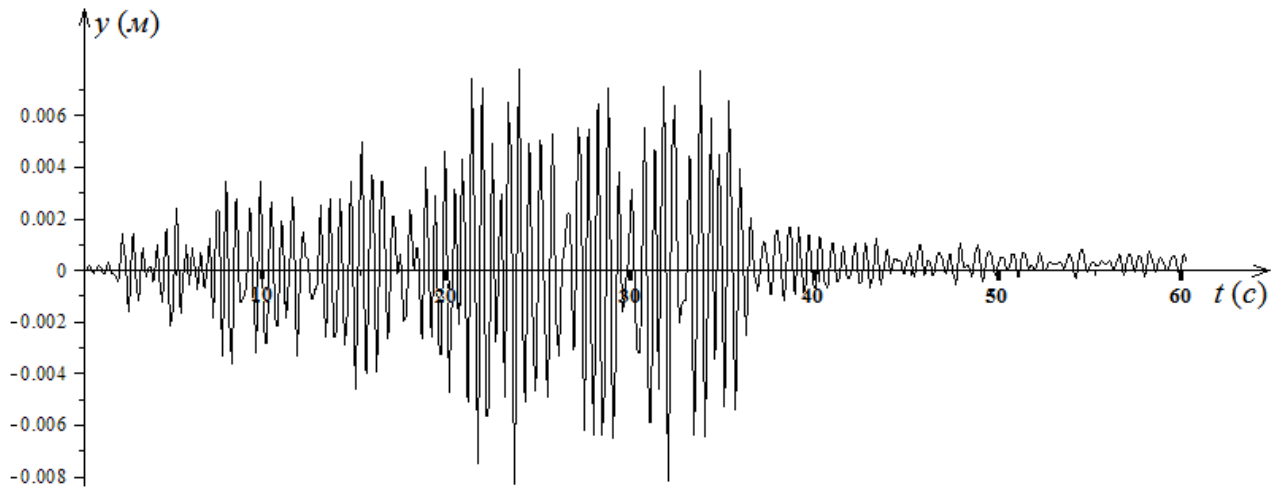


Рис.5.26 Рух вантажу на консолі з урахуванням нелінійності та пластичності бетону (варіант II, нерезонансний випадок)

Порівняємо його з рис. 5.23. Вони практично збігаються. Розглянемо тепер резонансний випадок. Для досягнення резонансу в цьому випадку слід покласти  $m_{нав} = 0.39M$ . Графік руху вантажу наведено на рис. 5.27. При порівнянні його з рис. 5.24 помітні деякі несуттєві відмінності.

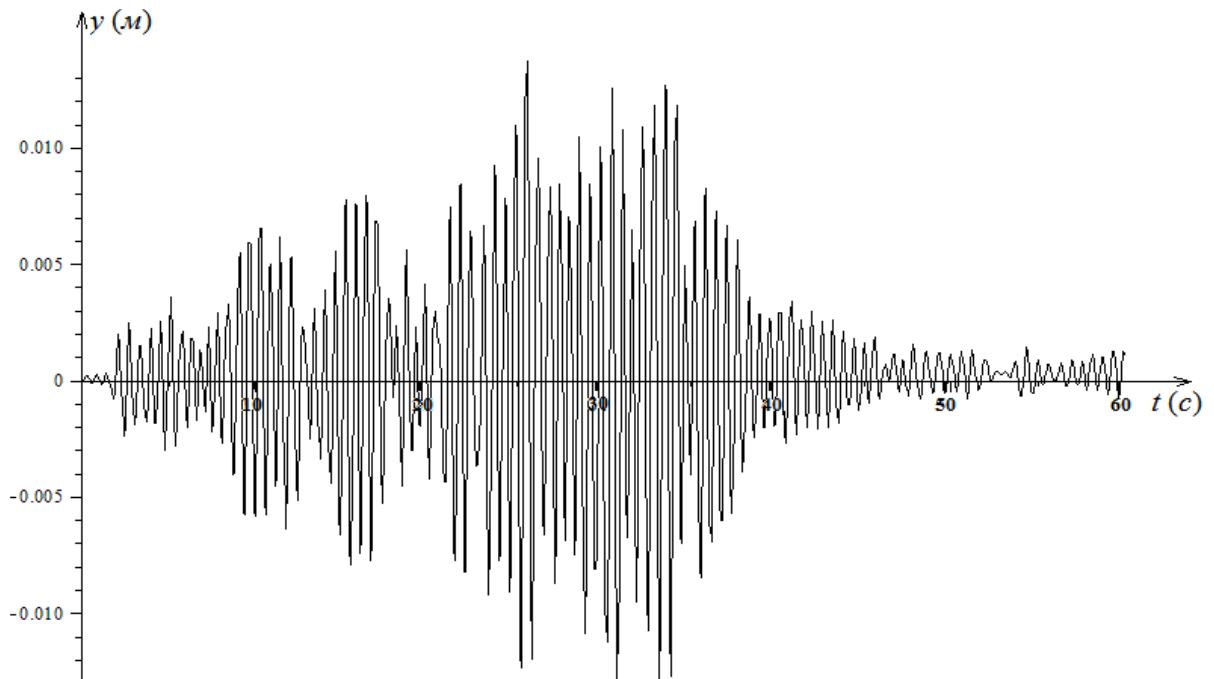


Рис. 5.27 Рух вантажу на консолі з урахуванням нелінійності та пластичності бетону варіант II, резонанс)

Розглянемо тепер рух рами (рис. 5.15) при землетрусі з заданої на рис.

5.19 акселерограмою. Якщо знехтувати поздовжніми деформаціями стержнів, то виявиться, що рама поводитья як система з одним ступенем свободи, причому в якості узагальненої координати можна вибрати переміщення зосереджених мас уздовж осі ригеля. Очевидно, що якщо не враховувати нелінійні і пластичні властивості бетону і арматури, то графік руху мас збігається або з зображенням на рис. 5.21 в нерезонансному випадку, або з зображенням на рис. 5.22 в резонансному. Використовуємо тепер алгоритм для дослідження руху рами при урахуванні нелінійності і пластичності бетону. В результаті для нерезонансного випадку отримуємо графік руху, наведений на рис. 5.28.

Він нагадує графік на рис. 5.26, однак є суттєва відмінність - на рис. 5.28 помітно поява і накопичення залишкових деформацій. Різниця в поведінці конструкцій пов'язано з тим, що розподіли напружень в консолі і в елементах рами різні, що впливає на згинальну жорсткість конструкцій в цілому.

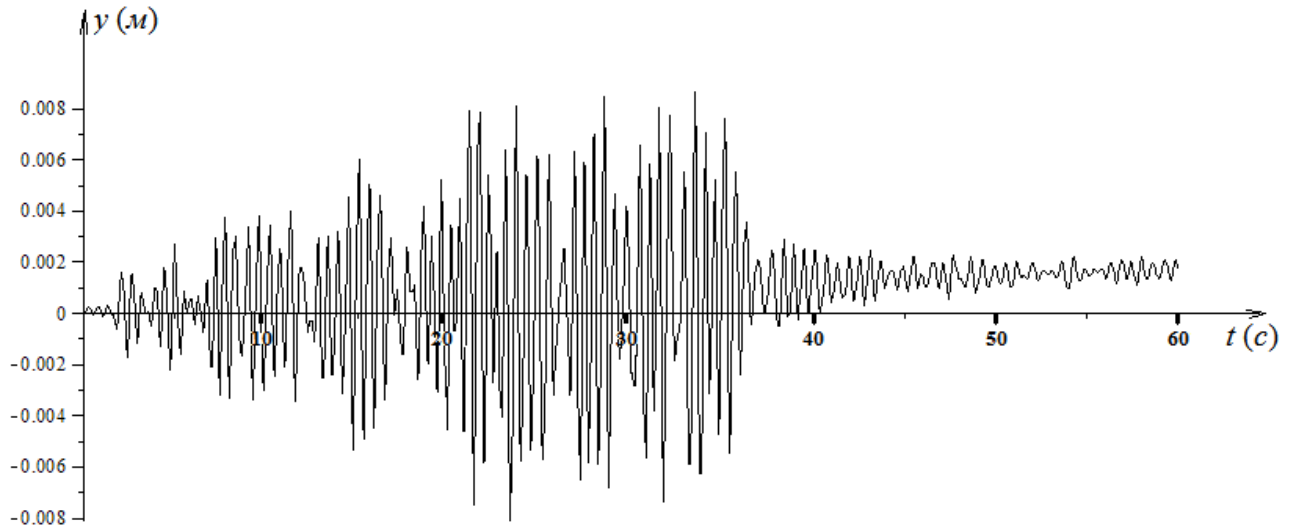


Рис. 5.28 Горизонтальний рух ригеля рами (нерезонансний випадок)

На рис. 5.29 наведено графік руху зосереджених мас рами в резонансному випадку. На відрізку часу до 26 с він нагадує графік на рис. 5.27, однак при  $t = 26$  с він переривається. Це викликано тим, що в цей момент в поперечних перерізах на ділянці одного з вертикальних стержнів

виникли розтягуючі напруження, що перевищують межу міцності бетону на розтяг, тобто почався процес руйнування, чого не спостерігалось при використанні консольної моделі.

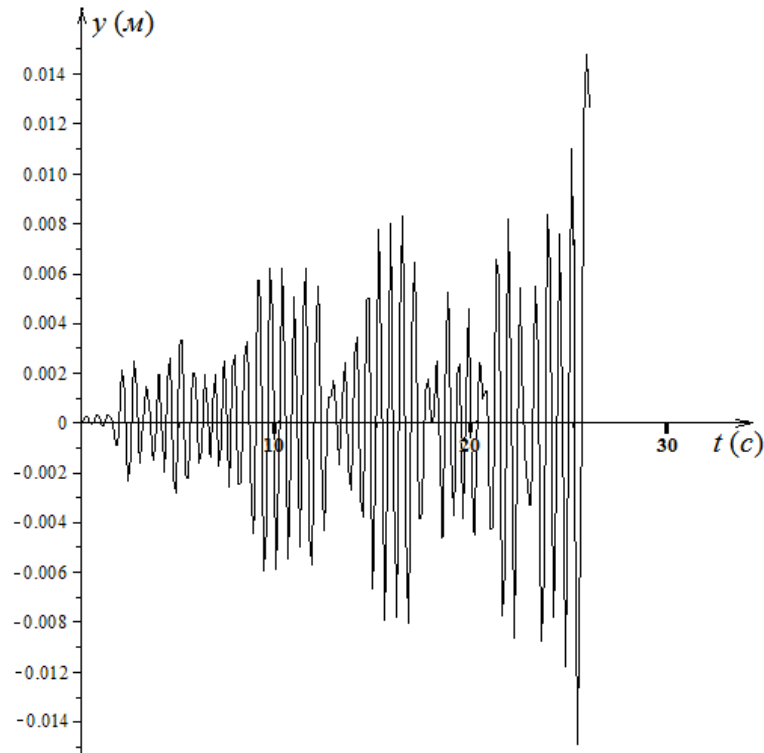


Рис. 5.29 Горизонтальний рух ригеля рами (резонанс)

Отже, в цьому параграфі проведено дослідження динаміки причалу №19 Ізмаїльського морського торгового порту на сейсмічну дію у вигляді акселерограми землетрусу.

### **5.3 Дослідження динаміки багатоповерхової багатопрольотної залізобетонної каркасної споруди при дії плоскої системи змінних сил методом граничних елементів**

Відповідно до визначення п. 1.4 двовимірною моделлю багатоповерхової багатопрольотної залізобетонної каркасної споруди є плоска багатопрольотна багатоповерхова залізобетонна рама.

Приступимо до дослідження руху плоскої багатоповерхової багатопрольотної залізобетонної рами в своїй площині, викликаного системою горизонтальних і вертикальних сил, прикладених до вузлів рами (рис. 5.30).

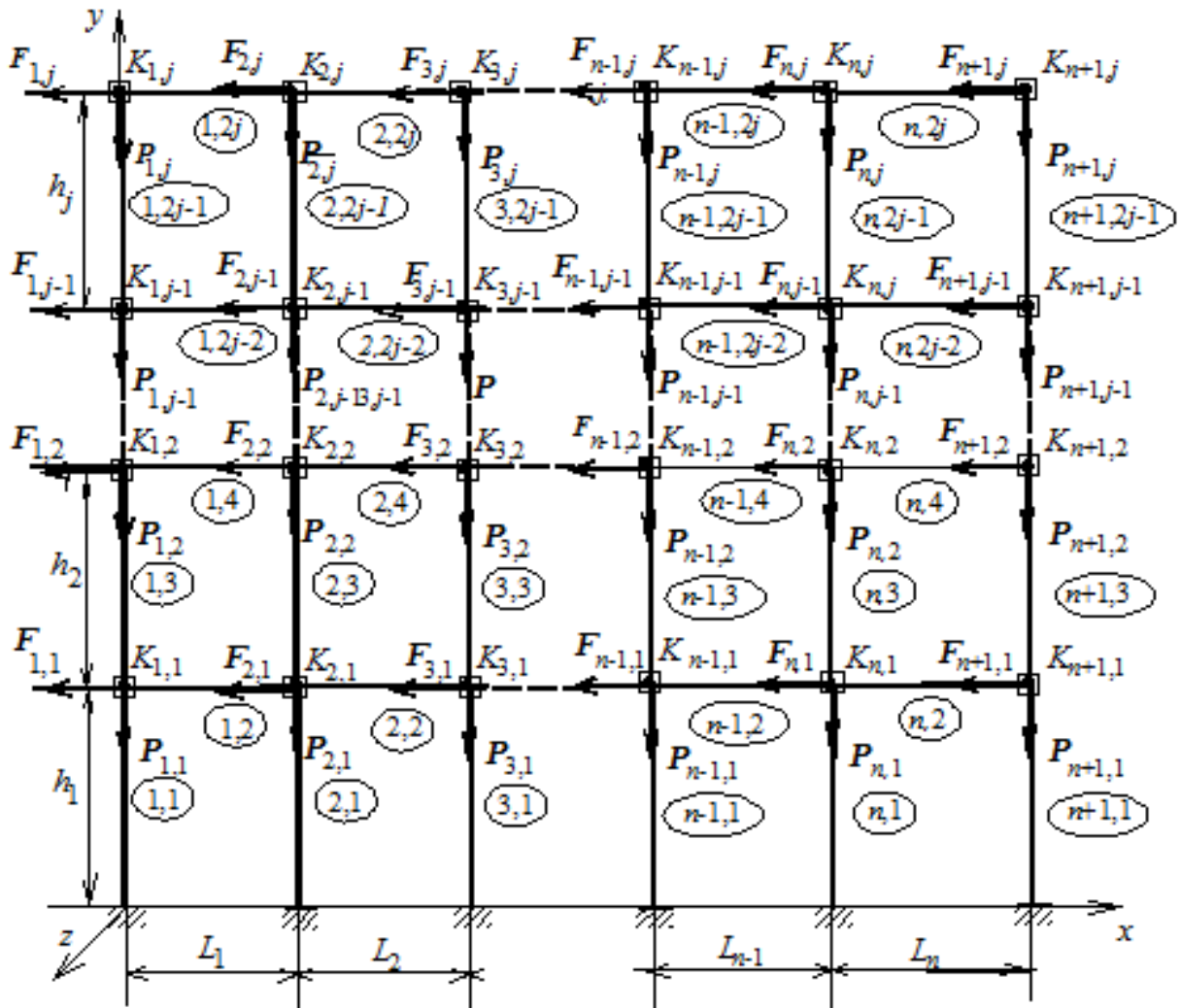


Рис. 5.30 Розрахункова схема рами

Спочатку розглянемо квазістатичну задачу, тобто припустимо, що зміна сил, що діють на раму, з плином часу досить повільна для того, щоб можна було знехтувати виникаючим при цьому інерційними ефектами.

Передбачається, що маса рами зосереджена в системі матеріальних точок, розташованих у вузлах рами. Для вузлів рами вводиться номер, що складається з двох чисел - перше відповідає номеру прогону, а друге - номеру поверху. Тому у горизонтальних  $F$  і вертикальних сил  $P$  є подвійний

індекс:  $M_{k,i}$ ,  $F_{k,i}$ ,  $P_{k,i}$  ( $k = 1, 2, \dots, n + 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, j$ ) ( $n$  – число прольотів рами,  $j$  – число поверхів).

Рішення задачі передбачається вести покроковим методом. На кожному кроці навантаження на раму отримує прирости  $\Delta F^{(k,i)}$  і  $\Delta P^{(k,i)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n + 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, j$ ).

Будемо розглядати раму як систему, що складається з ряду більш простих рам (їх прийнято називати суперелементами). Один з суперелементів представлений на рис. 5.31.

Кількість таких суперелементів дорівнює числу прогонів, номер суперелементів збігається з номером прогону. Крім того, є ще один суперелемент - крайня права колона рами. Його номер дорівнює  $n + 1$ . Стержні рами також отримують подвійний номер  $(k, m)$ ,  $k$  - номер суперелементу ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) (рис. 5.31),  $m$  - порядковий номер стержня в межах суперелементів ( $m = 1, 2, \dots, 2j$ ). На рисунках номери стержнів представлені в овалах.

Введемо на кожному зі стержнів суперелементів локальну систему координат, при цьому вісь  $x_{k,m}$  направимо уздовж стержня ( $k, m$  - номер стержня). Користуючись методологією методу граничних елементів, для кожного зі стержнів можна записати наступну рівність:

$$\widehat{X}^{(k,m)}(x_{k,m}) = S^{(k,m)}(x_{k,m}) \widehat{X}^{(k,m)}(0) \quad (m = 1, 2, 3, \dots, 2j). \quad (5.31)$$

Тут

$$S^{(k,m)}(x_{k,m}) = \widehat{A}^{(k,m)}(x_{k,m}) + \widehat{B}_Q^{(k,m)}(x_{k,m}) + \widehat{B}_N^{(k,m)}(x_{k,m}),$$

$$\widehat{X}^{(k,m)}(x_{k,m}) = \begin{bmatrix} \Delta v_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta v'_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta v''_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta Q^{(k,m)} \\ \Delta N^{(k,m)} \end{bmatrix}$$

( $\Delta v_{k,m}$  – приріст прогину стержня,  $\Delta Q^{(k,m)}$  і  $\Delta N^{(k,m)}$  – прирости поперечної і поздовжньої сил, штрих означає похідну по  $x_{k,m}$ ).

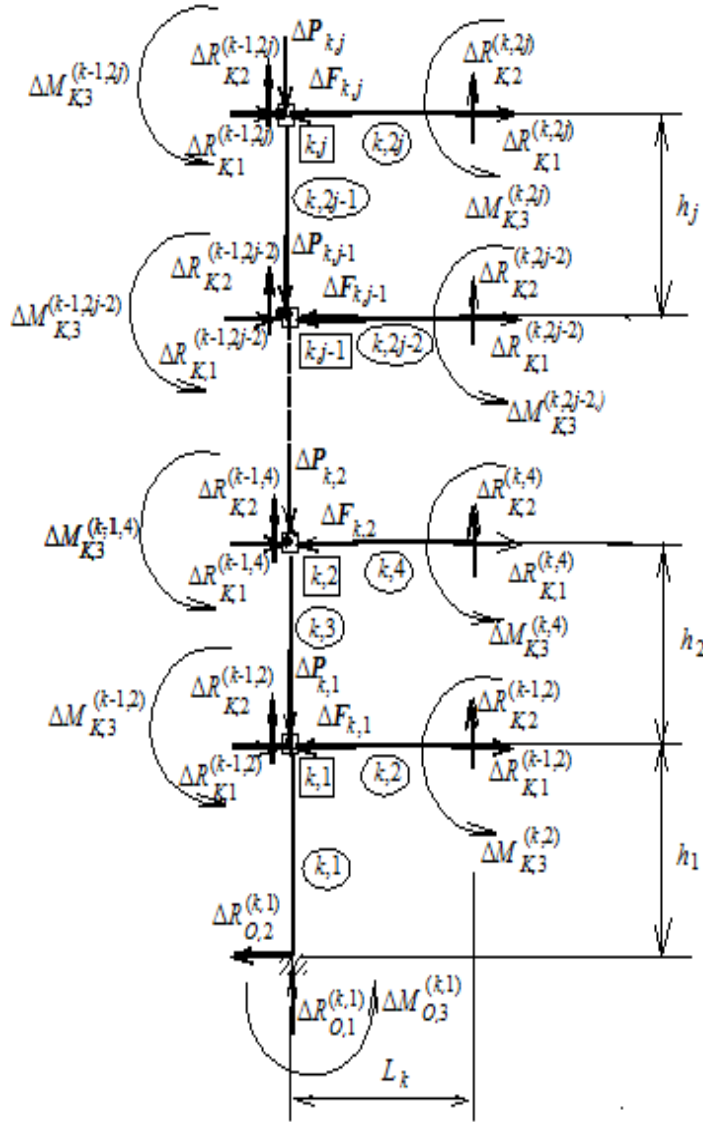


Рис. 5.31 Рядовий суперелемент

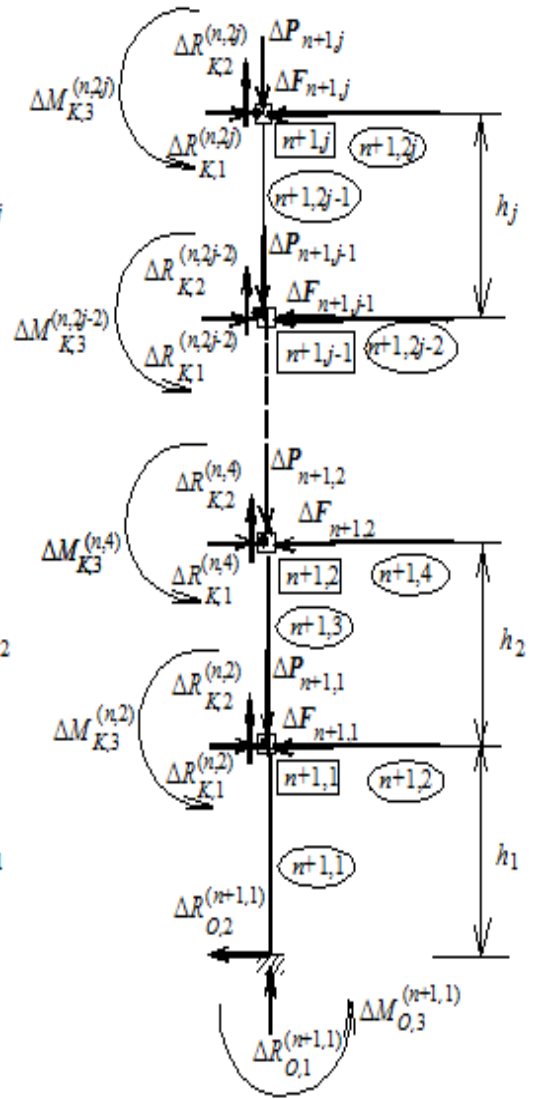


Рис. 5.32 Крайній суперелемент

Видозмінимо алгоритм, запропонований в п. 4.4. Введемо матрицю-стовпець  $\mathbf{X}^{*(k,m)}(x_{k,m})$  за допомогою формули:

$$\mathbf{X}^{*(k,m)}(x_{k,m}) = \begin{bmatrix} \Delta v_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta v'_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta M^{(k,m)}(x_{k,m}) \\ \Delta Q^{(k,m)} \\ \Delta N^{(k,m)} \end{bmatrix}.$$

Тут  $\Delta M^{(k,m)}(x_{k,m})$  – приріст згинального моменту в стержні з номером  $k, m$ .

З формули (4.50)

$$\Delta M^{(k,m)}(x_{k,m}) = Y_1^{(k,m)}(x_{k,m})\Delta v_{k,m} + Y_2^{(k,m)}(x_{k,m})\Delta v'_{k,m} - \\ - Y_3^{(k,m)}(x_{k,m})\Delta N^{(k,m)} / H_0^{(k,m)} + Y_4^{(k,m)}(x_{k,m})\Delta Q^{(k,m)} / H_0^{(k,m)}$$

$(Y_i^{(k,m)}(x_{k,m})) (i=1,2,3,4)$  - функції, визначені на попередньому кроці алгоритму,  $H_0^{(k,m)}$  – початкова жорсткість поперечного перерізу стержня) впливає, що  $X^{*(k,m)}(x_{k,m})$  може бути представлене так:

$$X^{*(k,m)}(x_{k,m}) = C^{(k,m)} \hat{X}^{(k,m)}(x_{k,m}), \quad (5.32)$$

де

$$C^{(k,m)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{(k,m)}(l_{k,m}) & Y_1^{(k,m)}(l_{k,m}) & \frac{Y_4^{(k,m)}(l_{k,m})}{H_0^{(k,m)}} & -\frac{Y_3^{(k,m)}(l_{k,m})}{H_0^{(k,m)}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

З формул (5.31) і (5.32) виходить, що

$$X^{*(k,m)}(x_{k,m}) = S^{*(k,m)}(x_{k,m}) X^{*(k,m)}(0). \quad (5.33)$$

Тут  $S^{*(k,m)}(x_{k,m}) = C^{(k,m)}(x_{k,m}) S^{(k,m)}(x_{k,m}) [C^{(k,m)}(0)]^{-1}$ .

Змінимо тепер стовпець  $X^{*(k,m)}(x_{k,m})$  наступним чином:

$$X^{**(k,m)}(x_{k,m}) = \begin{bmatrix} \Delta u_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta v_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta v'_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta M^{(k,m)}(x_{k,m}) \\ \Delta Q^{(k,m)} \\ \Delta N^{(k,m)} \end{bmatrix},$$



тобто додамо ще один елемент  $\Delta u_{k,m}(x_{k,m})$  – приріст поздовжнього зсуву поперечного перерізу стержня з номером  $k, m$ . Тоді формула (5.33) буде виглядати так:

$$X^{**(k,m)}(x_{k,m}) = S^{**(k,m)}(x_{k,m})X^{**(k,m)}(0). \quad (5.34)$$

Зневажимо поздовжньою деформацією стержнів, тоді для  $S^{**(k,m)}(x_{k,m})$  матимемо таке представлення:

$$S^{**(k,m)}(x_{k,m}) = \begin{bmatrix} 1 & \dots\dots\dots \\ \dots & S^{*(k,m)} \end{bmatrix}$$

(пропущені елементи матриці дорівнюють нулю).

Розглянемо рівновагу граничного елемента, розташованого між двома вертикальними стержнями. На рис. 5.33 показані силові фактори, що діють на цей елемент. Вони дорівнюють відповідним внутрішнім зусиллям в кінцевих

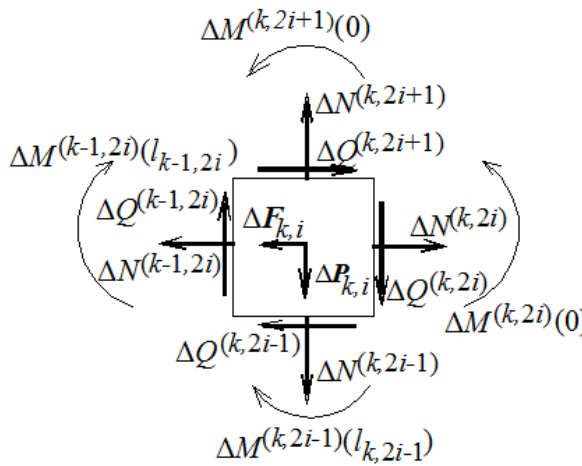


Рис. 5.33 Проміжний елемент

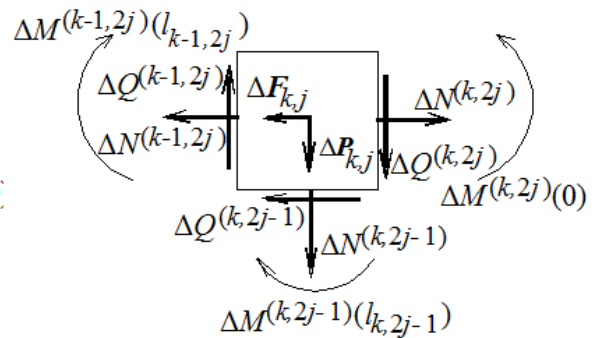


Рис. 5.34 Верхній елемент

перерізах стержнів, що примикають до цього елемента, але мають протилежні по відношенню до внутрішніх зусилль напрямки.

З умов рівноваги елемента і жорсткого з'єднання стержнів в вузлах знаходимо

$$\begin{aligned}
\Delta N^{(k,2i)} &= \Delta N^{(k-1,2i)} + \Delta Q^{(k,2i-1)} - \Delta Q^{(k,2i+1)} + \Delta F_{k,i}, \\
\Delta Q^{(k,2i)} &= \Delta Q^{(k-1,2i)} - \Delta N^{(k,2i-1)} + \Delta N^{(k,2i+1)} - \Delta P_{k,i}, \\
\Delta M^{(k,2i)}(0) &= \Delta M^{(k-1,2i)}(l_{k-1,2i}) + \Delta M^{(k,2i-1)}(l_{k,2i-1}) - \Delta M^{(k,2i+1)}(0), \\
\Delta u_{k,2i}(0) &= \Delta u_{k-1,2i}(l_{k-1,2i}), \quad \Delta v_{k,2i}(0) = 0, \quad \Delta v'_{k,2i}(0) = \Delta v'_{k-1,2i}(l_{k-1,2i}) \\
&(i = 1, 2, \dots, j-1).
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Розглянемо рівновагу граничного елемента, що знаходиться на самому верху суперелементів (рис. 5.19). З рівнянь рівноваги і умов (5.35) отримуємо

$$\begin{aligned}
\Delta N^{(k,2j)} &= \Delta N^{(k-1,2j)} + \Delta Q^{(k,2j-1)} + \Delta F_{k,j}, \\
\Delta Q^{(k,2j)} &= \Delta Q^{(k-1,2j)} - \Delta N^{(k,2j-1)} - \Delta P_{k,j}, \\
\Delta M^{(k,2j)}(0) &= \Delta M^{(k-1,2j)}(l_{k-1,2j}) + \Delta M^{(k,2j-1)}(l_{k,2j-1}), \\
\Delta u_{k,2j}(0) &= \Delta u_{k-1,2j}(l_{k-1,2j}), \quad \Delta v_{k,2j}(0) = 0, \\
\Delta v'_{k,2j}(0) &= \Delta v'_{k-1,2j}(l_{k-1,2j}) \quad (k := 1, 2, \dots, n).
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Рівності (5.35)–(5.36) можуть бути записані у вигляді матричних співвідношень

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{**(k,2i)} &= \mathbf{IY}^{**(k-1,2i)} + \mathbf{DY}^{**(k,2i-1)} + \\
&+ \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{X}^{**(k,2i+1)} + \mathbf{U}^{(k,i)} \quad (i = 1, 2, \dots, j),
\end{aligned} \tag{5.37}$$

( $I_{1,1} = I_{3,3} = I_{4,4} = I_{5,5} = I_{6,6} = 1$ ;  $E_{4,4}^{(i)} = E_{6,5}^{(i)} = -1$ ,  $E_{5,6}^{(i)} = 1$  при  $i < j$ ;  $D_{5,6} = -1$ ,  $D_{4,4} = D_{6,5} = 1$ ;  $U_5^{(k,i)} = -\Delta P^{(k,i)}$ ,  $U_6^{(k,i)} = \Delta F^{(k,i)}$ ; інші елементи матриць  $I$ ,  $E^{(i)}$ ,  $D$  і стовпця  $U^{(k,i)}$  дорівнюють нулю,  $E^{(j)}$  – нульова матриця). Для стислості запису прийняті позначення:  $\mathbf{X}^{**(k,m)} = \mathbf{X}^{**(k,m)}(0)$ ,  $\mathbf{Y}^{**(k,m)} = \mathbf{X}^{**(k,m)}(l_{k,m})$ .

З умов жорсткого з'єднання у вузлах впливає

$$\mathbf{Y}_2^{**(k,2i-1)} = \mathbf{Y}_1^{**(k-1,2i)}, \quad \mathbf{Y}_3^{**(k,2i-1)} = \mathbf{Y}_3^{**(k-1,2i)} \quad (i = 1, 2, \dots, j). \tag{5.38}$$

Крім того, введемо умови

$$\mathbf{Y}_2^{**(k,2i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j). \tag{5.39}$$

Вони пов'язані з тим, що правий кінець горизонтального стержня суперелементу з'єднується з вузлом, розташованим на вертикальному стержні наступного суперелементу.

На нижньому кінці першого стержня колони виконуються умови:

$$\mathbf{X}_p^{**(k,1)} = 0 \quad (p = 1,2,3), \quad (5.40)$$

на нижніх кінцях наступних стержнів колони –

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^{**(k,2i-1)} &= 0, \quad \mathbf{X}_2^{**(k,2i-1)} = -\mathbf{Y}_1^{**(k-1,2i-2)}, \\ \mathbf{X}_3^{**(k,2i-1)} &= \mathbf{Y}_3^{**(k-1,2i-2)} \quad (i = 2, \dots, j). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Рівності (5.40)–(5.41) можна розглядати як систему  $3j$  лінійних рівнянь щодо решти невизначених елементів стовпців  $\mathbf{X}_p^{**(k,2i-1)}$  ( $p = 4,5,6; i = 1,2, \dots, j$ ) і висловити їх через елементи стовпців  $\mathbf{Y}^{**(k-1,2i)}$  ( $i = 1,2, \dots, j$ ). Представимо стовпці  $\mathbf{X}^{**(k,2i-1)}$  так:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{**(k,2i-1)} &= \overline{\mathbf{X}}^{**(k,2i-1)} + \overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**(k,2i-1)}, \\ \overline{\mathbf{X}}^{**(k,2i-1)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{**(k,2i-1)} \\ \mathbf{X}_2^{**(k,2i-1)} \\ \mathbf{X}_3^{**(k,2i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**(k,2i-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{X}_4^{**(k,2i-1)} \\ \mathbf{X}_5^{**(k,2i-1)} \\ \mathbf{X}_6^{**(k,2i-1)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

і висловити їх через елементи стовпців  $\overline{\mathbf{X}}^{**(k,2i-1)}$  в наступному вигляді:

$$\overline{\mathbf{X}}^{**(k,2i-1)} = \hat{\mathbf{I}}^{(i-1)} \mathbf{Y}^{**(k-1,2i-2)} \quad (5.43)$$

( $\hat{\mathbf{I}}_{2,1}^{(i-1)} = -1, \hat{\mathbf{I}}_{3,3}^{(i-1)} = 1$ , інші елементи матриці  $\hat{\mathbf{I}}^{(i-1)}$  дорівнюють нулю при  $i > 1$ ,  $\hat{\mathbf{I}}^{(0)}$  – нульова матриця).

Використовуючи представлення (5.42) і (5.43), а також формули (5.34) і (5.36), можна надати рівнянням (5.38)–(5.39) наступну форму:

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}^{**(k,2i-1)} \overline{\mathbf{X}}^{**(k,2i-1)}]_2 &= \mathbf{Y}_1^{**(k-1,2i)} - [\mathbf{S}^{**(k,2i-1)} \hat{\mathbf{I}}^{(i)} \mathbf{Y}^{**(k-1,2i)}]_2, \\ [\mathbf{S}^{**(k,2i-1)} \overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**(k,2i-1)}]_3 &= \mathbf{Y}_3^{**(k-1,2i)} - [\mathbf{S}^{**(k,2i-1)} \hat{\mathbf{I}}^{(i)} \mathbf{Y}^{**(k-1,2i)}]_3, \\ [\mathbf{S}^{**(k,2i)} \mathbf{DS}^{**(k,2i-1)} \overline{\mathbf{X}}^{**(k,2i-1)}]_2 &+ [\mathbf{S}^{**(k,2i)} \mathbf{E}^{(i)} \overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**(k,2i+1)}]_2 = \\ &= -[\mathbf{S}^{**(k,2i)} \mathbf{IY}^{**(k-1,2i)}]_2 - [\mathbf{S}^{**(k,2i)} \mathbf{DS}^{**(k,2i-1)} \hat{\mathbf{I}}^{(i-1)} \mathbf{Y}^{**(k-1,2i-2)}]_2 - \\ &- [\mathbf{S}^{**(k,2i)} \mathbf{E}^{(i)} \hat{\mathbf{I}}^{(i)} \mathbf{Y}^{**(k-1,2i)}]_2 - [\mathbf{S}^{**(k,2i)} \mathbf{U}^{(k,i)}]_2 \quad (i = 1,2, \dots, j). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Тут  $S^{**(k,m)} = S^{**(k,m)}(l_{k,m})$ .

Введемо позначення

$$\begin{aligned} w_{m+3(i-1)}^{(k)} &= \overline{\overline{X}}_{m+3}^{**(k,2i-1)} \quad (m = 1,2,3; i = 1,2,\dots, j), \\ z_{m+3(i-1)}^{(k-1)} &= Y_m^{**(k-1,2i)} \quad (m = 1,2,\dots,6; i = 1,2,\dots, j), \end{aligned} \quad (5.45)$$

тобто  $w_p^{(k)}$  ( $p = 1,2,\dots,3j$ ) і  $z_p^{(k-1)}$  ( $p = 1,2,\dots,6j$ ) являють собою виписані підряд елементи матриць-стовпців  $\overline{\overline{X}}_m^{**(k,2i-1)}$  ( $m = 4,5,6; i = 1,2,\dots,j$ ) и  $Y_m^{**(k-1,2i)}$  ( $m = 1,2,\dots,6; i = 1,2,\dots,j$ ) відповідно. Тоді система рівнянь (5.44) запишеться в наступному вигляді:

$$R^{(k)} W^{(k)} = T^{(k)} Z^{(k-1)} + V^{(k)}. \quad (5.46)$$

Тут  $W^{(k)}$  - матриця-стовпець з елементами  $w_m$  ( $m = 1,2,\dots,3j$ ),  $R^{(k)}$  - квадратна матриця розміру  $3j$ ,  $V^{(k)}$  - стовпець того ж розміру,  $T^{(k)}$  - прямокутна матриця  $3j \times 6j$ ,  $Z^{(k-1)}$  - стовпець розміру  $6j$ .

Дамо кожному рівнянню системи (5.44) порядковий номер  $q$  (наприклад,  $q = m + 3(i-1)$ ,  $m = 1,2,3; i = 1,2,\dots,j$ ). Тоді  $v_q^{(k)} = 0$  при  $m = 1,2$  и  $v_q^{(k)} = [S^{**(k,2i)} U^{(k,i)}]_2$  при  $m = 3$ . Для чисельного визначення елемента  $R_{q,r}^{(k)}$  матриці  $R^{(k)}$  вважаємо  $w_r^{(k)} = 1$  (тобто один з елементів  $\overline{\overline{X}}_{m+3}^{**(k,2i-1)}$  ( $m = 1,2,3; i = 1,2,\dots, j$ ), як зазначено у (5.45), прирівнюємо одиниці), а решта (тобто інші із зазначених вище елементів) вважаємо рівними нулю і обчислюємо значення лівої частини формули (5.44). Це значення і буде значенням коефіцієнта  $R_{q,r}$ . Аналогічно визначаються елементи матриці  $T$  за допомогою значень величин  $z_r^{(k-1)}$  ( $r = 1,2,\dots,6j$ ).

З (5.46) отримуємо

$$W^{(k)} = [R^{(k)}]^{-1} T^{(k)} Z^{(k-1)} + [R^{(k)}]^{-1} V^{(k)}. \quad (5.47)$$

З (5.37) і (5.43) випливають такі рівності

$$\begin{aligned} Y^{**(k,2i)} &= S^{**(k,2i)} (I Y^{**(k-1,2i)} + D S^{**(k,2i-1)} \hat{I}^{(i-1)} \overline{Y}^{**(k-1,2i-1)} + \\ &+ E^{(i)} \hat{I}^{(i)} \overline{Y}^{**(k-1,2i)} + D S^{**(k,2i-1)} \overline{\overline{X}}^{**(k,2i-1)} + E^{(i)} \overline{\overline{X}}^{**(k,2i+1)} + U^{(k,i)} ] \end{aligned}$$

( $i = 1,2,\dots, j$ ), які за допомогою (5.47) можуть бути записані так

$$\mathbf{Z}^{(k)} = \mathbf{G}^{(k)} \mathbf{Z}^{(k-1)} + \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{W}^{(k)} + \hat{\mathbf{V}}^{(k)}. \quad (5.48)$$

Елементи матриць  $\mathbf{G}^{(k)}$ ,  $\mathbf{H}^{(k)}$  і стовпця  $\hat{\mathbf{V}}^{(k)}$  обчислюються аналогічно визначенню елементів  $\mathbf{R}^{(k)}$ ,  $\mathbf{T}^{(k)}$  і  $\mathbf{V}^{(k)}$ . Рівність (5.48) можна записати так

$$\mathbf{Z}^{(k)} = \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{Z}^{(k-1)} + \mathbf{L}^{(k)}, \quad (5.49)$$

де  $\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{G}^{(k)} + \mathbf{H}^{(k)} [\mathbf{R}^{(k)}]^{-1} \mathbf{T}^{(k)}$ ,  $\mathbf{L}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} [\mathbf{R}^{(k)}]^{-1} \mathbf{V}^{(k)} + \hat{\mathbf{V}}^{(k)}$ .

Для першого суперелементу внаслідок відсутності попереднього маємо

$$\mathbf{Y}_m^{**(0,2i)} = 0 \quad (m = 4,5,6; i = 1,2,\dots, j),$$

тобто  $z_{m+3(i-1)}^{(0)} = 0 \quad (m = 4,5,6; i = 1,2,\dots, j)$ . Крім того, мають місце такі рівності

$\mathbf{Y}_2^{**(0,2i)} = 0$ , тобто  $z_{2+3(i-1)}^{(0)} = 0$ . Решта  $2j$  елементів стовпця  $\mathbf{Z}^{(0)}$  залишаються

невідомими. З формули (5.49) при  $k = 1$  отримуємо

$$\mathbf{Z}^{(1)} = \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{Z}^{(0)} + \mathbf{L}^{(1)}. \quad (5.50)$$

При  $k = 2$  будемо мати

$$\mathbf{Z}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{Z}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}.$$

Використовуючи (5.50) знаходимо

$$\mathbf{Z}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{Z}^{(0)} + \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}.$$

Продовжуючи таким же чином далі, на  $n$ -му кроці приходимо до наступного результату:

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \hat{\mathbf{K}}^{(n)} \mathbf{Z}^{(0)} + \hat{\mathbf{L}}^{(n)}, \quad (5.51)$$

де  $\hat{\mathbf{K}}^{(n)} = \prod_{p=0}^{n-1} \mathbf{K}^{(n-p)}$ ,  $\hat{\mathbf{L}}^{(n)} = \sum_{q=1}^{n-1} \prod_{p=0}^{q-1} \mathbf{K}^{(n-p)} \mathbf{L}^{(n-q)} + \mathbf{L}^{(n)}$ .

Переходимо до розгляду останнього,  $(n + 1)$ -го суперелементу (рис. 4.56). На цьому рисунку додані фіктивні стержні з номерами  $n + 1, 2i$  ( $i = 1,2,\dots,j$ ). Внаслідок фактичної відсутності цих стержнів мають місце такі рівності:  $\mathbf{X}_p^{**(n+1,2i)} = 0 \quad (p = 4,5,6; i = 1,2,\dots,j)$ .

Використовуючи (5.37) їх можна записати так

$$\begin{aligned}
& [DS^{**(n+1,2i-1)} \bar{X}^{**(n+1,2i-1)}]_p + [E^{(i)} S^{**(n+1,2i+1)} \bar{X}^{**(n+1,2i+1)}]_p + \\
& + [IY^{**(n,2i)}]_p + [DS^{**(n+1,2i-1)} \hat{I}Y^{**(n,2i)}]_p + \\
& + [E^{(i)} S^{**(n+1,2i+1)} \hat{I}Y^{**(n,2i+2)}]_p = -U_p^{(n+1,i)} \quad (p = 4,5,6; i = 1,2,\dots, j).
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Крім того, з умов жорсткого з'єднання у вузлах впливає

$$Y_2^{**(n+1,2i-1)} - Y_1^{**(n,2i)} = 0, Y_3^{**(n+1,2i-1)} - Y_3^{**(n,2i)} = 0 \quad (i = 1,2,\dots, j).$$

Представимо ці рівності так

$$\begin{aligned}
& [S^{(n+1,2i-1)} \bar{X}_2^{**(n+1,2i-1)}]_2 + [S^{(n+1,2i-1)} \hat{I}^{(i-1)} Y^{**(n,2i-2)}]_2 - Y_1^{**(n,2i)} = 0, \\
& [S^{(n+1,2i-1)} \bar{X}_2^{**(n+1,2i-1)}]_3 + [S^{(n+1,2i-1)} \hat{I}^{(i-1)} Y^{**(n,2i-2)}]_3 - Y_3^{**(n,2i)} = 0.
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Використовуючи (5.41) і (5.47), запишемо систему рівнянь (5.52) - (5.53) так:

$$R^{(n+1)} W^{(n+1)} + T^{(n+1)} \hat{K}^{(n)} Z^{(0)} = V^{(n+1)}. \tag{5.54}$$

Тут  $R^{(n+1)}$  – прямокутна матриця розмірності  $5j \times 3j$ ,  $T^{(n+1)}$  – розмірності  $5j \times 6j$ .

Нагадаємо, що стовпець  $Z^{(0)}$  містить  $2j$  невідомих величин. Таким чином, матрична рівність (4.205) представляє лінійну систему  $5j$  скалярних рівнянь щодо  $5j$  невідомих, вирішуючи яку знаходимо стовпці  $W^{(n+1)}$  и  $Z^{(0)}$ , а через них визначаємо  $Z^{(k)}$  ( $k = 1,2,\dots, n$ ), а, отже, і прирости переміщень точок і зусиль в стержнях рами.

**Приклад 5.3.** Досліджуємо рух залізобетонної двоповерхової двопрольотної рами (рис. 5.35), викликане горизонтальними гармонійними силами  $F_{1,1}$  з періодом  $T_{1,1} = 5c$  і амплітудою  $\hat{F}_{1,1} = 40 \text{ кН}$  и  $F_{1,2}$ , з періодом  $T_{1,2} = 7,5c$  і амплітудою  $\hat{F}_{1,2} = 20 \text{ кН}$ .

Маси матеріальних точок (вантажів)  $m_{i,k} = 35 T$  ( $i = 1,3; k = 1,2$ ). Вертикальні сили постійні і рівні вагам вантажів. геометричні параметри:  $L_1 = L_2 = h_1 = h_2 = 8 \text{ м}$ . Розміри поперечних перерізів: колон –  $b = 0.8 \text{ м}$ ,  $h = 0.28 \text{ м}$ , ригелей –  $b = 0.8 \text{ м}$ ,  $h = 0.5 \text{ м}$ . армування симетричне:  $S_1 = S_2 = 8,5 \text{ см}^2$ . Сталь марки А-III, характеристики бетону:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 19 \text{ МПа}$ ,  $R_p = 1,9 \text{ МПа}$ ,  $\Gamma_c = 0.583 \cdot 10^{-3}$ .

На першому етапі відбувається поступове збільшення маси вантажів. Потім протягом хвилини діють сили  $F_{1,1}$  і  $F_{1,2}$ , по закінченню якої їх дія припиняється. В даному випадку період вільних коливань  $T_0 = 1,86\text{с}$ , що набагато менше періоду прикладених сил. Тому можна знехтувати інерційними ефектами і вважати рух рами квазістатичним. Рух точок  $K_{1,1}$  (зображено суцільною лінією) і  $K_{1,2}$  (штрихова лінія), визначаючих рух ригелів першого і другого поверхів, наведено на рис. 5.36 (час в секундах, переміщення в метрах).

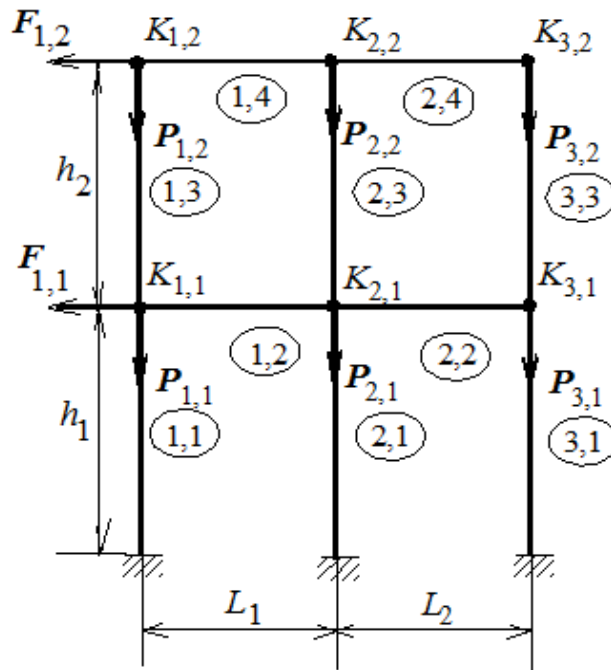


Рис. 5.35 Розрахункова схема рами

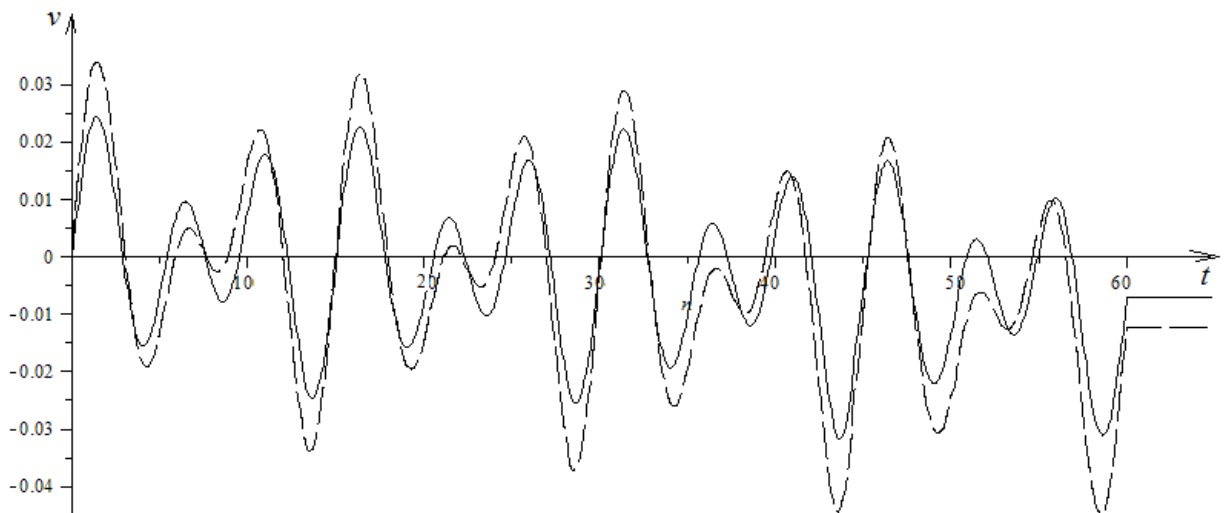


Рис. 5.36 Графіки руху ригелів першого і другого поверхів конструкції

Помітно накопичення пластичних деформацій. Розглянемо тепер динамічну задачу, тобто будемо досліджувати рух багатопрольотної багатоповерхової залізобетонної рами під дією системи зосереджених змінних сил (рис. 5.30). Як і в п. 5.3 передбачається, що маса рами зосереджена в системі матеріальних точок, а змінні сили –  $F_{k,i}, P_{k,i}$  ( $k = 1, 2, \dots, n + 1; i = 1, 2, \dots, j$ ) ( $n$  – число прогонів рами,  $j$  – число поверхів) прикладені до цих точок. Тепер не передбачається, що частоти змушуючих сил набагато менше найменшої частоти власних коливань конструкції. Тому необхідно врахувати виникаючі динамічні ефекти.

Як і вище будемо нехтувати поздовжніми деформаціями стержнів і зсувами точок стержнів уздовж їх початкових осей, викликаними викривленням цих осей. Тоді матеріальні точки, що знаходяться на одному ригелі, будуть рухатися синхронно по горизонталі як одна матеріальна точка (позначимо її  $K_{0,i}$ ) з сумарною масою  $M_i = \sum_{k=1}^{n+1} m_{k,i}$  ( $i$  – номер етажy,  $m_{k,i}$  – маса точки  $K_{k,i}$ ). Складаючи систему основних рівнянь динаміки для точок  $K_{0,i}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, j$ ), отримаємо

$$M_i \hat{\Delta} a_i = \hat{\Delta} F_i + \hat{\Delta} P_i + \hat{\Delta} R_{H,i} + \hat{\Delta} R_{V,i} \quad (i = 1, 2, \dots, j). \quad (5.55)$$

Тут

$$\hat{\Delta} F_i = \sum_{k=1}^{n+1} \hat{\Delta} F_{k,i}, \hat{\Delta} P_i = \sum_{k=1}^{n+1} \hat{\Delta} P_{k,i}, \hat{\Delta} R_{H,i} = \sum_{k=1}^{n+1} \hat{\Delta} R_{H,k,i}, \hat{\Delta} R_{V,i} = \sum_{k=1}^{n+1} \hat{\Delta} R_{V,k,i}$$

( $\hat{\Delta} R_{H,k,i}$  і  $\hat{\Delta} R_{V,k,i}$  – горизонтальна і вертикальна складові реакції рами, що діє на точку  $K_{k,i}$ ).

Проектуючи (5.55) на вісь  $x$  глобальної системи координат, отримаємо

$$M \hat{\Delta} a = \hat{\Delta} F + \hat{\Delta} R_H, \quad (5.56)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_j \end{bmatrix}, \hat{\Delta} a = \begin{bmatrix} \hat{\Delta} a_1 \\ \hat{\Delta} a_2 \\ \dots \\ \hat{\Delta} a_j \end{bmatrix}, \hat{\Delta} F = \begin{bmatrix} \hat{\Delta} F_1 \\ \hat{\Delta} F_2 \\ \dots \\ \hat{\Delta} F_j \end{bmatrix}, \hat{\Delta} R_H = \begin{bmatrix} \hat{\Delta} R_{H,1} \\ \hat{\Delta} R_{H,2} \\ \dots \\ \hat{\Delta} R_{H,j} \end{bmatrix}.$$



На підставі методу лінійних прискорень [93] маємо

$$\hat{\Delta a} = \frac{6}{(\hat{\Delta t})^2} [\hat{\Delta v} - V\hat{\Delta t} - \frac{1}{2}a(\hat{\Delta t})^2]. \quad (5.57)$$

Знайдемо залежність між  $\hat{\Delta R}_H$  і  $\hat{\Delta v}$ . Для цього, використовуючи алгоритм, викладений в п. 4.04, визначаємо матрицю  $Y$ , стовпцями якої є вектори-стовпці приростів переміщень точок  $K_{0,i}$  ( $i = 1,2,3,\dots,j$ ), викликані дією одиничного збільшення горизонтальної сили, прикладеного до точки  $K_{0,k}$  ( $k = 1,2,3,\dots,j$ ). Очевидно, для вектора-стовпця  $\hat{\Delta F}_{stat}$  довільних збільшень сумарних горизонтальних сил, що діють на  $K_{0,i}$  ( $i = 1,2,3,\dots,j$ ), матимемо

$$\hat{\Delta v} = Y \hat{\Delta F}_{stat}, \quad (5.58)$$

а отже,

$$\hat{\Delta v} = -Y \hat{\Delta R}_H. \quad (5.59)$$

Підставляючи (5.59) в (5.58), а потім (5.58) в (5.57), отримуємо

$$\hat{\Delta R} = -[I + \frac{6}{(\hat{\Delta t})^2} MY]^{-1} \{ \frac{6}{(\hat{\Delta t})^2} M[V\hat{\Delta t} + a\frac{(\hat{\Delta t})^2}{2}] + \hat{\Delta F} \}. \quad (5.60)$$

визначивши  $\hat{\Delta R}$ , знаходимо з (5.59) і (5.57)  $\hat{\Delta v}$  і  $\hat{\Delta a}$ , а потім з формул

$$\Delta a = \frac{1}{\theta} \hat{\Delta a}, \Delta V = (a + \frac{1}{2} \Delta a) \Delta t, \Delta v = V \Delta t + \frac{1}{2} (a + \frac{1}{3} \Delta a) (\Delta t)^2 \quad (5.61)$$

визначаємо прирости прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок, що відповідають даному проміжку часу. Завершується крок

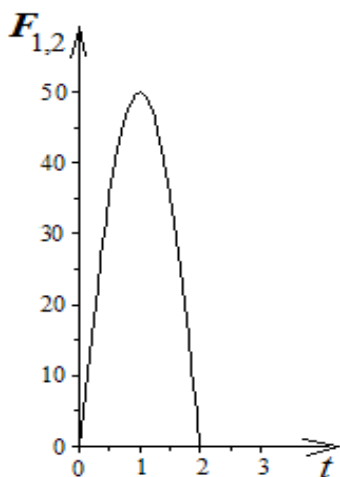


Рис 5.37 Графік впливу

обчисленням нових значень прискорень, швидкостей і переміщень

$$a_{нов} = a + \Delta a, V_{нов} = V + \Delta V, v_{нов} = v + \Delta v. \quad (5.62)$$

**Приклад 5.4.** Досліджуються коливання двоповерхової двопробльотної залізобетонної рами (рис. 5.35), викликане імпульсним (ударним) впливом. Геометричні параметри, клас бетону і армування такі ж як і в попередньому прикладі.

При  $t = 0$  на зосереджену масу  $K_{1,2}$  впливає ім-

пульс, графік якого наведено на рис. 5.37 ( $F_{1,2}$  в кН,  $t$  в сек). Після закінчення дії імпульса, тривалість якого дорівнює 2 с, рама з грузами здійснює вільні коливання.

Графіки руху вантажів  $K_{1,1}$  (суцільна лінія) і  $K_{1,2}$  (штрихова лінія) представлені на рис. 4.74. Помітно загасання коливань і поява залишкових деформацій, в результаті чого при загасання коливань осі колон залишаються зігнутими.

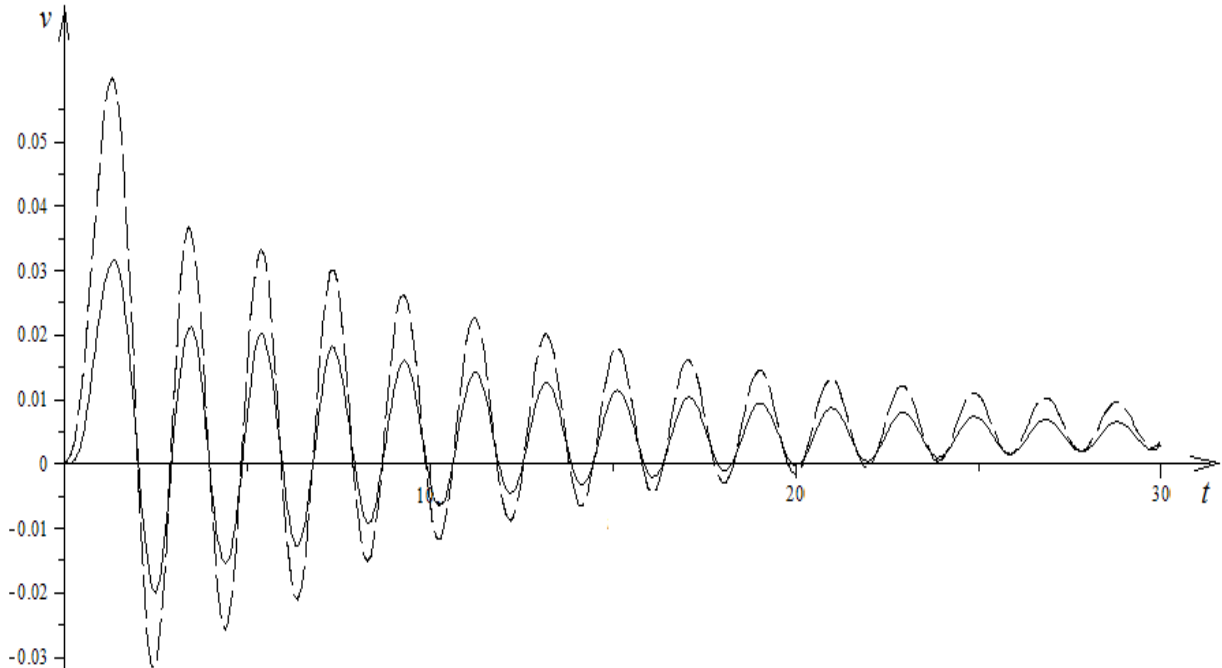


Рис. 5.38 Графіки руху ригелів першого і другого поверхів конструкції

Отже, у цьому параграфі проведено побудову алгоритму, заснованому на методі граничних елементів, для дослідження динаміки багатопверхових багатопрольотних каркасних споруд.

Зміст даного розділу опубліковано в роботах [237-244].

## 5.4 Висновки за розділом 5

1. На основі побудованих диференціальних рівнянь плоского згину залізобетонних балок при складному навантаженні побудований варіант методу граничних елементів для квазістатичних і динамічних розрахунків залізобетонних балок і рам з урахуванням фізичної нелінійності і

пластичності матеріалів. На основі побудованого методу проведено дослідження ряду квазістатичних і динамічних задач (включаючи дослідження динамічної стійкості) для одновимірної моделі багатоповерхової залізобетонної каркасної будівлі.

2. Побудовано варіант методу граничних елементів, для дослідження динаміки багатопрольотних каркасних споруд. За допомогою алгоритму цього методу вирішено ряд квазістатичних і динамічних задач для таких споруд при дії на них гармонійних сил, ударних і сейсмічних впливів. Проведено прямий динамічний розрахунок причалу №19 Ізмаїльського морського торгового порту на сейсмічну дію, заданої у вигляді акселерограми.

3. Побудовано варіант методу граничних елементів, для дослідження динаміки багатоповерхових багатопрольотних каркасних споруд. За допомогою алгоритму цього методу вирішено ряд квазістатичних і динамічних задач для таких споруд.

**РОЗДІЛ 6**  
**ПРОСТОРОВІ ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ**  
**КАРКАСНИХ БУДІВЕЛЬ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ**  
**НЕЛІНІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЇ І ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ І**  
**ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ**  
**(метод граничних елементів)**

**6.1 Побудова диференціальних рівнянь просторового згину залізобетонної балки**

Як уже зазначалося, прямий динамічний розрахунок просторових рамних залізобетонних конструкцій з урахуванням нелінійної роботи і пластичних властивостей матеріалів на динамічні (зокрема, сейсмічні) впливи є складним завданням. У багатьох країнах розроблені програмні комплекси з нелінійного динамічного розрахунку конструкцій. Всі ці комплекси засновані на методі скінченних елементів.

У ряді статей А.В. Гришина, С.Ф. Клованича [51-58, 94-96] досліджені статичні і динамічні задачі для масивних залізобетонних споруд з урахуванням нелінійно-пружних і пластичних властивостей бетону на основі МСЕ.

Порядок системи розрішуючих рівнянь методу скінченних елементів дуже високий, особливо у випадках обліку нелінійних і пластичних властивостей матеріалів, що вимагає розбиття елементів залізобетонних рам на велику кількість дрібних скінченних елементів в зв'язку з тим, що деформаційні властивості бетону різні в стиснутій і розтягнутої зонах, а також від того, чи знаходиться даний елементарний об'єм у стадії навантаження або розвантаження. Тому доводиться вдаватися до використання альтернативних методів, наприклад, методу граничних елементів, для застосування якого необхідна наявність диференціальних рівнянь згину.

Розглянемо рівновагу ділянки балки постійного прямокутного поперечного перерізу, підданій дії силових факторів, прикладених до поперечного перерізу на початку ділянки ( $F$  і  $M$  - їх головний вектор і головний момент). Виберемо в недеформованому стані балки систему координат так, як показано на рис.6.1, причому вісь  $x_1$  направимо вздовж осі балки (тобто через центри тяжкості поперечних перерізів), а осі  $x_2$  і  $x_3$  - уздовж головних центральних осей інерції поперечного перерізу. У поперечному перерізі  $\Pi_0$  побудуємо ортогональний базис  $e_k^0$  ( $k = 1,2,3$ ), вектора якого паралельні осям  $x_k$  ( $k = 1,2,3$ ). У деформованому стані вектора цього базису позначені як  $e_k$  ( $k = 1,2,3$ ), осі, з ними пов'язані, як  $y_k$  ( $k = 1,2,3$ ). Зауважимо, що точка  $K$  з координатами  $x_k$  ( $k = 1,2,3$ ) до деформації після деформації має координати  $y_1 = u_1$ ,  $y_2 = x_2 + u_2$ ,  $y_3 = x_3 + u_3$  ( $u_1, u_2, u_3$  - переміщення точки в системі координат  $y_k$ ,  $k = 1,2,3$ ).

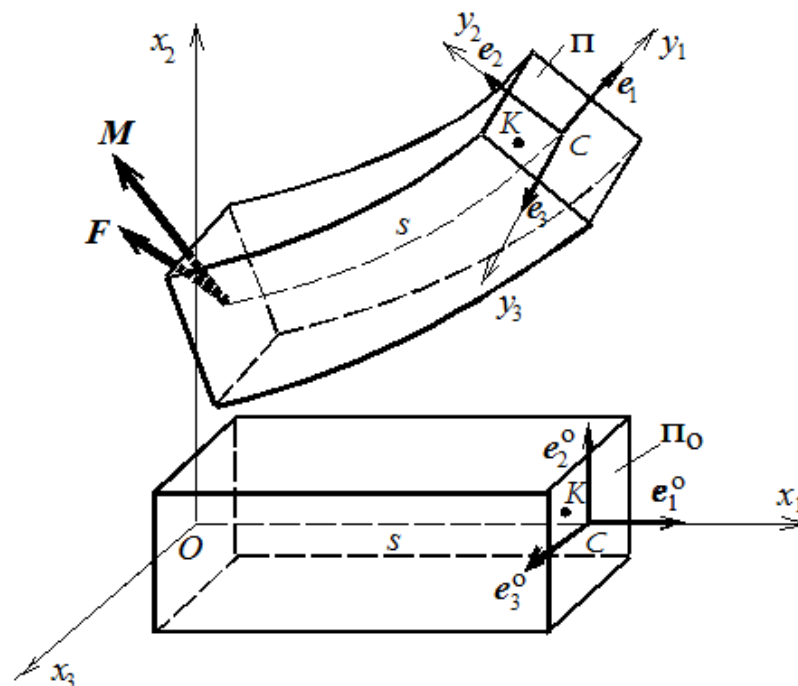


Рис. 6.1 Системи координат для дослідження просторового згину

В [82] наведені формули для компонентів тензора деформацій:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= (x_3 + u_3)\omega_2 - (x_2 + u_2)\omega_3 + u_{1,1}, \\
\varepsilon_{12} &= [u_1\omega_3 - (x_3 + u_3)\omega_1 + u_{1,2} + u_{2,1}]/2, \\
\varepsilon_{13} &= [(x_2 + u_2)\omega_1 - u_1\omega_2 + u_{1,3} + u_{3,1}]/2, \\
\varepsilon_{22} &= u_{2,2}, \varepsilon_{23} = (u_{2,3} + u_{3,2})/2, \varepsilon_{33} = u_{3,3}.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Тут  $\omega_i$  ( $i = 1,2,3$ ) – компоненти вектора кутової швидкості повороту базису  $e_i$  ( $i = 1,2,3$ ) при русі центру перерізу  $C$  уздовж зігнутої осі балки з

одиничною швидкістю,  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  ( $j = 2,3$ ),  $u_{i,1} = \frac{\partial u_i}{\partial s}$  ( $s$  – дугова

координата точки  $C$ . Для орієнтації базису  $e_i$  ( $i = 1,2,3$ ) відносно нерухомого

базису  $e_i^0$  ( $i = 1,2,3$ ) обрані кути Крилова. Розкладемо вектори  $e_i$  ( $i = 1,2,3$ )

по векторах базису  $e_j^0$  ( $j = 1,2,3$ ):

$$e_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} e_j^0 \quad (i = 1,2,3), \tag{6.2}$$

звідки випливає, що

$$e_i^0 = \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} e_j, \quad \beta_{ij} = \alpha_{ji} \quad (i, j = 1,2,3). \tag{6.3}$$

В [30] наведені вирази для параметрів  $\alpha_{ij}$  і  $\omega_i$  ( $i, j = 1,2,3$ ) через кути Крилова

$\phi, \psi$  і  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,1} &= \cos \phi \cos \psi, \quad \alpha_{1,2} = \sin \phi \cos \psi, \quad \alpha_{1,3} = -\sin \psi, \\
\alpha_{2,1} &= \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \sin \phi \cos \theta, \quad \alpha_{2,2} = \sin \phi \sin \psi \sin \theta + \cos \phi \cos \theta, \\
\alpha_{2,3} &= \cos \psi \sin \theta, \quad \alpha_{3,1} = \cos \phi \sin \psi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta, \\
\alpha_{3,2} &= \sin \phi \sin \psi \cos \theta - \cos \phi \sin \theta, \quad \alpha_{3,3} = \cos \psi \cos \theta, \\
\omega_1 &= \dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\psi} \sin \phi, \quad \omega_2 = \dot{\theta} \cos \psi \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi, \quad \omega_3 = \dot{\phi} - \dot{\theta} \sin \psi
\end{aligned} \tag{6.4}$$

(диференціювання за часом і за дуговою координатою  $s$  збігаються).

Відповідно до асоційованого закону пластичної течії [78,79,94-96] приріст пластичної деформації може бути представлено в наступному вигляді:

$$d[\varepsilon]_p = \mathfrak{g} \frac{\partial \Phi([\sigma], \chi)}{\partial [\sigma]},$$

де  $\Phi$  – функція навантаження:

$$\Phi([\sigma], \chi) = \Phi_l([\sigma]) + h(\chi),$$

$\Phi_l([\sigma])$  – функція, яка визначає граничну поверхню,  $h(\chi)$  і  $\chi$  – функція і параметр зміцнення,  $[\sigma]$  – вектор напружень, тобто вектор з елементами  $[\sigma]_1 = \sigma_{1,1}$ ,  $[\sigma]_2 = \sigma_{2,2}$ ,  $[\sigma]_3 = \sigma_{3,3}$ ,  $[\sigma]_4 = \sigma_{1,2}$ ,  $[\sigma]_5 = \sigma_{1,3}$ ,  $[\sigma]_6 = \sigma_{2,3}$ .

Представимо приріст можливої роботи напружень на пластичних деформаціях наступним чином:

$$\partial\chi = \sigma_0 \partial\varepsilon_{p,0} + \tau_0 \partial\gamma_{p,0}$$

( $\partial\varepsilon_{p,0}$  и  $\partial\gamma_{p,0}$  – прирости об'ємних пластичних деформацій і пластичних деформацій октаедричного зсуву). Прийнемо в якості функції зміцнення наступну функцію:

$$h(\chi) = -\Phi_l([\sigma(\chi)]).$$

Нехай гранична поверхня описується функцією [41]

$$\begin{aligned} \Phi_l([\sigma]) = & \sigma_{1,1}^2 + \sigma_{2,2}^2 + \sigma_{3,3}^2 - (\sigma_{1,1}\sigma_{2,2} + \sigma_{2,2}\sigma_{3,3} + \sigma_{3,3}\sigma_{1,1}) + \\ & + (R_c - R_p)(\sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3}) + 3(\sigma_{1,2}^2 + \sigma_{1,3}^2 + \sigma_{2,3}^2) - R_c R_p. \end{aligned}$$

Діючи далі аналогічно [78,96], приходимо до наступного співвідношення:

$$d[\sigma] = D_{ep} d[\varepsilon]. \quad (6.5)$$

Тут  $D_{ep} = D_e - D_e \frac{\partial\Phi}{\partial[\sigma]} \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial[\sigma]} \right]^T D_e \left\{ \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial[\sigma]} \right]^T D_e \frac{\partial\Phi}{\partial[\sigma]} - \frac{\partial\Phi}{\partial\chi} [\sigma]^T \frac{\partial\Phi}{\partial[\sigma]} \right\}^{-1}$ ,  $D_e$  –

матриця узагальненого закону Гука для лінійно пружного матеріалу,  $[\varepsilon]$  – вектор деформацій, тобто вектор з елементами  $[\varepsilon]_1 = \varepsilon_{1,1}$ ,  $[\varepsilon]_2 = \varepsilon_{2,2}$ ,  $[\varepsilon]_3 = \varepsilon_{3,3}$ ,  $[\varepsilon]_4 = \varepsilon_{1,2}$ ,  $[\varepsilon]_5 = \varepsilon_{1,3}$ ,  $[\varepsilon]_6 = \varepsilon_{2,3}$ .

Введемо позначення:

$$\xi_1 = \phi, \xi_2 = \psi, \xi_3 = \theta, \xi_4 = \phi', \xi_5 = \psi', \xi_6 = \theta',$$

$$f_r^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial \xi_r} \quad (r = 1, 2, \dots, 6) \quad (6.6)$$

для будь-якої функції  $f_r(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6)$ .

З (6.4) неважко отримати:

$$d\omega_i = \sum_{r=1}^6 (\omega_i)_r^{(1)} d\xi_r \quad (i=1,2,3). \quad (6.7)$$

Тут

$$\begin{aligned} (\omega_1)_1^{(1)} &= -\theta' \sin \phi \cos \psi - \psi' \cos \phi, (\omega_1)_2^{(1)} = -\theta' \cos \phi \sin \psi, (\omega_1)_5^{(1)} = -\sin \phi, \\ (\omega_1)_6^{(1)} &= \cos \phi \cos \psi, (\omega_2)_1^{(1)} = \theta' \cos \phi \cos \psi - \psi' \sin \phi, (\omega_2)_2^{(1)} = -\theta' \sin \phi \sin \psi, \\ (\omega_2)_5^{(1)} &= -\sin \phi, (\omega_2)_6^{(1)} = \sin \phi \cos \psi, (\omega_3)_2^{(1)} = -\theta' \cos \psi, (\omega_3)_4^{(1)} = 1, (\omega_3)_6^{(1)} = -\sin \psi \\ (\text{інші величини з множини} & \quad (\omega_i)_r^{(1)} \\ (i=1,2,3; r=1,2,\dots,6) & \text{дорівнюють нулю}). \end{aligned}$$

Представимо природи переміщень  $u_n$  ( $n=1,2,3$ ) в наступному вигляді:

$$u_n = \sum_{p=0}^2 a_{n,p,2-p} x_2^p x_3^{2-p}.$$

Дано кожному елементу  $a_{n,p,2-p}$  ( $n=1,2,3; p=0,1,2$ ) порядковий номер  $j = 3(n-1) + p + 1$  і введемо аналогічно (6.6) позначення

$$f_j^{(2)} = \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (j=1,2,\dots,9). \quad (6.8)$$

Тоді

$$du_n = \sum_{j=1}^9 (u_n)_j^{(2)} da_j, \quad du_{n,2} = \sum_{j=1}^9 (u_{n,2})_j^{(2)} da_j, \quad du_{n,3} = \sum_{j=1}^9 (u_{n,3})_j^{(2)} da_j,$$

де  $(u_n)_j^{(2)} = x_2^p x_3^q$ ,  $(u_{n,2})_j^{(2)} = p x_2^{p-1} x_3^q$ ,  $(u_{n,3})_j^{(2)} = x_2^p q x_3^{q-1}$ .

З (6.1) знаходимо:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= du_3 \omega_2 + (x_3 + u_3) d\omega_2 - du_2 \omega_3 - (x_2 + u_2) d\omega_3 + du_{1,1}, \\ d\varepsilon_{12} &= [du_1 \omega_3 + u_1 d\omega_3 - du_3 \omega_1 - (x_3 + u_3) d\omega_1 + du_{1,2} + du_{2,1}] / 2, \\ d\varepsilon_{13} &= [du_2 \omega_1 + (x_2 + u_2) d\omega_1 - du_1 \omega_2 - u_1 d\omega_2 + du_{1,3} + du_{3,1}] / 2, \\ d\varepsilon_{22} &= du_{2,2}, d\varepsilon_{23} = (du_{2,3} + du_{3,1}) / 2, d\varepsilon_{33} = du_{3,3}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

З використанням позначень (6.6) і (6.8) можна записати, що

$$d[\varepsilon]_m = \sum_{r=1}^6 ([\varepsilon]_m)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^9 ([\varepsilon]_m)_j^{(2)} da_j \quad (m=1,2,\dots,6). \quad (6.10)$$



Тут  $([\varepsilon]_m)_r^{(1)} = \frac{\partial[\varepsilon]_m}{\partial \xi_r}$  ( $r = 1, 2, \dots, 6$ ),  $([\varepsilon]_m)_j^{(2)} = \frac{\partial[\varepsilon]_m}{\partial a_j}$  ( $j = 1, 2, \dots, 9$ ).

Вырази для  $([\varepsilon]_m)_r^{(1)}$  і  $([\varepsilon]_m)_j^{(2)}$  ( $m, r = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 9$ ) через  $x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, \xi_r$  ( $r = 1, 2, \dots, 6$ ) можуть бути отримані з (6.1) :

$$\begin{aligned}
 ([\varepsilon]_1)_r^{(1)} &= (x_3 + u_3)(\omega_2)_r^{(1)} - (x_2 + u_2)(\omega_3)_r^{(1)}, \\
 ([\varepsilon]_4)_r^{(1)} &= [u_1(\omega_3)_r^{(1)} - (x_3 + u_3)(\omega_1)_r^{(1)}] / 2 \\
 ([\varepsilon]_5)_r^{(1)} &= [(x_2 + u_2)(\omega_1)_r^{(1)} - u_1(\omega_2)_r^{(1)}] / 2 \quad (r = 1, 2, \dots, 6), \\
 ([\varepsilon]_1)_j^{(2)} &= \omega_2(u_3)_j^{(2)} - \omega_3(u_2)_j^{(2)} + (u_{1,1})_j^{(2)}, \\
 ([\varepsilon]_2)_j^{(2)} &= (u_{2,2})_j^{(2)}, ([\varepsilon]_3)_j^{(2)} = (u_{3,3})_j^{(2)}, \\
 ([\varepsilon]_4)_j^{(2)} &= [\omega_3(u_1)_j^{(2)} - \omega_1(u_3)_j^{(2)} + (u_{2,1})_j^{(2)}] / 2, \\
 ([\varepsilon]_5)_j^{(2)} &= [\omega_1(u_2)_j^{(2)} - \omega_2(u_1)_j^{(2)} + (u_{3,1})_j^{(2)}] / 2, \\
 ([\varepsilon]_6)_j^{(2)} &= [(u_{2,3})_j^{(2)} + (u_{3,1})_j^{(2)}] / 2 \quad (j = 1, 2, \dots, 9)
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

З (6.5) отримуємо:

$$\begin{aligned}
 d[\sigma]_i &= \sum_{r=1}^6 ([\sigma]_i)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^9 ([\sigma]_i)_j^{(2)} da_j, ([\sigma]_i)_r^{(1)} = \sum_{k=1}^6 D_{ep,i,k} ([\varepsilon]_k)_r^{(1)}, \\
 ([\sigma]_i)_j^{(2)} &= \sum_{k=1}^6 D_{ep,i,k} ([\varepsilon]_k)_j^{(2)} \quad (i, r = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 9).
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Таким же чином можна отримати розклади і для проєкцій приростів поперечних сил  $dQ_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) і згинальних моментів  $dM_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned}
 dM_i &:= \sum_{r=1}^6 (M_i)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^9 (M_i)_j^{(2)} da_j, \\
 dQ_i &:= \sum_{r=1}^6 (Q_i)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^9 (Q_i)_j^{(2)} da_j \quad (i = 1, 2, 3),
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

де

$$\begin{aligned}
 (M_1)_r^{(1)} &= \int_{-h/2-b/2}^{h/2-b/2} \int [(\sigma_{1,3})_r^{(1)}(x_2, x_3)x_2 - (\sigma_{1,2})_r^{(1)}(x_2, x_3)x_3] dx_2 dx_3 + \\
 &+ G_a \sum_{k=1}^{n_a} [(\varepsilon_{1,3})_r^{(1)}(x_{2,k}, x_{3,k})x_{2,k} - (\varepsilon_{1,2})_r^{(1)}(x_{2,k}, x_{3,k})x_{3,k}] S_k,
 \end{aligned}$$

$$(M_2)_r^{(1)} = \int_{-h/2-b/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_{1,1})_r^{(1)}(x_2, x_3) x_3 dx_2 dx_3 + E_a \sum_{k=1}^{n_a} (\varepsilon_{1,1})_r^{(1)}(x_{2,k}, x_{3,k}) x_{3,k} S_k,$$

$$(M_3)_r^{(1)} = - \int_{-h/2-b/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_{1,1})_r^{(1)}(x_2, x_3) x_2 dx_2 dx_3 - E_a \sum_{k=1}^{n_a} (\varepsilon_{1,1})_r^{(1)}(x_{2,k}, x_{3,k}) x_{2,k} S_k,$$

$$(Q_1)_r^{(1)} = \int_{-h/2-b/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_{1,1})_r^{(1)}(x_2, x_3) dx_2 dx_3 + E_a \sum_{k=1}^{n_a} \sum_{r=1}^6 (\varepsilon_{1,1})_r^{(1)}(x_{2,k}, x_{3,k}) S_k,$$

$$(Q_i)_r^{(1)} = \int_{-h/2-b/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_{1,i})_r^{(1)}(x_2, x_3) dx_2 dx_3 + G_a \sum_{k=1}^{n_a} (\varepsilon_{1,i})_r^{(1)}(x_{2,k}, x_{3,k}) S_k \quad (i = 2, 3).$$

Аналогічні формули можуть бути записані і для  $(M_i)_j^{(2)}$  і  $(Q_i)_j^{(2)}$  ( $j = 1, 2, \dots, 9$ ).

Граничні умови на гранях балки:

$$d[\sigma]_m = 0 \text{ при } m = 2, 4, 6, x_2 = \pm h/2 \text{ і при } m = 3, 5, 6, x_3 = \pm b/2 \quad (6.14)$$

( $b$  і  $h$  – розміри поперечного перерізу балки).

Статичну гіпотезу Кирхгофа можна записати у вигляді наближених рівностей:

$$d[\sigma]_2 = d[\sigma]_3 = d[\sigma]_6 = 0. \quad (6.15)$$

З (6.13) і (6.14) випливає, що при застосуванні методу найменших квадратів необхідно знайти такі значення параметрів  $da_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 9$ ), при яких функція

$$\begin{aligned} d\Psi = & \int_{-b/2}^{b/2} \sum_{m=2,4,6} \{ [d[\sigma]_m(-\frac{h}{2}, x_3)]^2 + [d[\sigma]_m(\frac{h}{2}, x_3)]^2 \} dx_3 + \\ & + \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{m=3,5,6} \{ [d[\sigma]_m(x_2, -\frac{b}{2})]^2 + [d[\sigma]_m(x_2, \frac{b}{2})]^2 \} dx_2 + \\ & + \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sum_{m=2,3,6} [d[\sigma]_m(x_2, x_3)]^2 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

приймає найменше значення.

З умов рівноваги сегмента балки між лівим кінцем і поперечним перерізом, що розглядається, випливає, що  $dQ + dF = 0$ , а так як  $F$  передбачається заданим в системі координат  $x_1 x_2 x_3$ , тобто

$$dF = \sum_{i=1}^3 dF_i e_i^0,$$

то згідно (6.3) знаходимо, що

$$dQ_m = -\sum_{k=1}^3 \beta_{m,k} dF_k \quad (m = 1,2,3). \quad (6.16)$$

Використовуючи (6.13) ці рівності можна записати так:

$$d\Gamma_m = 0 \quad (m = 1,2,3), \quad (6.17)$$

де  $d\Gamma_m = \sum_{r=1}^6 (Q_m)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^9 (Q_m)_j^{(2)} da_j + \sum_{k=1}^3 \beta_{m,k} dF_k$ . Таким чином, необхідно

знайти мінімум функції при виконанні умов (6.15). Проблема умовного мінімуму функції зводиться до визначення мінімуму функції

$L = d\Psi + \sum_{m=1}^3 \delta_m d\Gamma_m$  по змінним  $da_j$  і  $\delta_m$  ( $j = 1,2,\dots,9$ ,  $m = 1,2,3$ ), звідки

випливає, що повинні виконуватися наступні рівності:

$$\frac{\partial(d\Psi)}{\partial(da_i)} - \sum_{m=1}^3 \delta_m \frac{\partial(d\Gamma_m)}{\partial(da_i)} = 0 \quad (i = 1,2,\dots,9), \quad d\Gamma_m = 0, \quad (m = 1,2,3). \quad (6.18)$$

Співвідношення (6.18) дозволяють виразити прирости  $da_j$  ( $j = 1,2,\dots,9$ )

через прирости  $d\xi_r$  ( $r = 1,2,\dots,6$ ):

$$[da] = \sum_{r=1}^6 [a^{(1)}]^{(r)} d\xi_r + \sum_{k=1}^3 [a^{(2)}]^{(k)} dF_k. \quad (6.19)$$

Елементи стовпців  $[a^{(1)}]^{(r)}$  і  $[a^{(2)}]^{(k)}$  можуть бути визначені за допомогою (6.9) – (6.12). Тоді (6.13) прийме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} dM_i &= \sum_{r=1}^6 (M_i)_r^{(3)} d\xi_r + \sum_{k=1}^3 (M_i)_k^{(4)} dF_k, \\ dQ_i &= \sum_{r=1}^6 (Q_i)_r^{(3)} d\xi_r + \sum_{k=1}^3 (Q_i)_k^{(4)} dF_k \quad (i = 1,2,3), \end{aligned} \quad (6.20)$$

де  $(M_i)_r^{(3)} = (M_i)_r^{(1)} + \sum_{j=1}^9 (M_i)_j^{(2)} [a]_j^{(r)}$ ,  $(M_i)_k^{(4)} = \sum_{j=1}^9 (M_i)_j^{(2)} [a^{(2)}]_j^{(k)}$ ,  $(Q_i)_r^{(3)} =$

$$= (Q_i)_r^{(1)} + \sum_{j=1}^9 (Q_i)_j^{(2)} [a]_j^{(r)}, \quad (Q_i)_k^{(4)} = \sum_{j=1}^9 (Q_i)_j^{(2)} [a^{(2)}]_j^{(k)}.$$

Зі співвідношення  $M' + e_1 \times Q = 0$  [82] випливає, що

$$\begin{aligned} dM'_1 + M_3 d\omega_2 + \omega_2 dM_3 - M_2 d\omega_3 - \omega_3 dM_2 &= 0, \\ dM'_2 + M_1 d\omega_3 + \omega_3 dM_1 - M_3 d\omega_1 - \omega_1 dM_3 - dQ_3 &= 0, \\ dM'_3 + M_2 d\omega_1 + \omega_1 dM_2 - M_1 d\omega_2 - \omega_2 dM_1 + dQ_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

З (6.20) знаходимо

$$dM'_i = \sum_{r=1}^6 [(M_i)_{r'}^{(3)}]' d\xi_r + \sum_{r=1}^6 (M_i)_{r'}^{(3)} d\xi'_r + \sum_{k=1}^3 [(M_i)_k^{(4)}]' dF_k \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.22)$$

Використовуючи (6.7), (6.20) і (6.22). рівності (6.21) можна записати так:

$$\sum_{r=1}^3 X_{i,r} d\xi_r'' + \sum_{r=1}^3 Y_{i,r} d\xi'_r + \sum_{r=1}^3 Z_{i,r} d\xi_r + U_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.23)$$

Тут

$$\begin{aligned} X_{i,r} &= (M_i^{(3)})_{r+3}, \\ Y_{1,r} &= (M_1^{(3)})_r + (M_1^{(3)})'_{r+3} + M_3 (\tilde{\omega}_2)_{r+3} + \omega_2 (M_3^{(3)})_{r+3} - M_2 (\tilde{\omega}_3)_{r+3} - \omega_3 (M_2^{(3)})_{r+3}, \\ Y_{2,r} &= (M_2^{(3)})_r + (M_2^{(3)})'_{r+3} + M_1 (\tilde{\omega}_3)_{r+3} + \omega_3 (M_1^{(3)})_{r+3} - M_3 (\tilde{\omega}_1)_{r+3} - \omega_1 (M_3^{(3)})_{r+3} - \\ &- (Q_3^{(3)})_{r+3}, \\ Y_{3,r} &= (M_3^{(3)})_r + (M_3^{(3)})'_{r+3} + M_2 (\tilde{\omega}_1)_{r+3} + \omega_1 (M_2^{(3)})_{r+3} - M_1 (\tilde{\omega}_2)_{r+3} - \omega_2 (M_1^{(3)})_{r+3} + \\ &+ (Q_2^{(3)})_r, \\ Z_{1,r} &= (M_1^{(3)})'_r + M_3 (\tilde{\omega}_2)_r + \omega_2 (M_3^{(3)})_r - M_2 (\tilde{\omega}_3)_r - \omega_3 (M_2^{(3)})_r, \\ Z_{2,r} &= (M_2^{(3)})'_r + M_1 (\tilde{\omega}_3)_r + \omega_3 (M_1^{(3)})_r - M_3 (\tilde{\omega}_1)_r - \omega_1 (M_3^{(3)})_r - (Q_3^{(3)})_r, \\ Z_{3,r} &= (M_3^{(3)})'_r + M_2 (\tilde{\omega}_1)_r + \omega_1 (M_2^{(3)})_r - M_1 (\tilde{\omega}_2)_r - \omega_2 (M_1^{(3)})_r + (Q_2^{(3)})_r, \\ U_1 &= \sum_{k=1}^3 \tilde{U}_{1,k} dF_k, \tilde{U}_{1,k} = [(M_1)_k^{(4)}]' + \omega_2 (M_3^{(4)})_k - \omega_3 (M_2^{(4)})_k, \\ U_2 &= \sum_{k=1}^3 \tilde{U}_{2,k} dF_k, \tilde{U}_{2,k} = [(M_2)_k^{(4)}]' + \omega_3 (M_1^{(4)})_k - \omega_1 (M_3^{(4)})_k - (Q_3^{(4)})_k, \\ U_3 &= \sum_{k=1}^3 \tilde{U}_{3,k} dF_k, \tilde{U}_{3,k} = [(M_3)_k^{(4)}]' + \omega_1 (M_2^{(4)})_k - \omega_2 (M_1^{(4)})_k + (Q_2^{(4)})_k. \end{aligned}$$

Систему диференціальних рівнянь (6.23) можна представити у вигляді одного матричного диференціального рівняння:

$$Xd\xi'' + Yd\xi' + Zd\xi + U = 0 \quad (6.23a)$$

де  $d\xi = [d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3]$ ,  $U = [U_1, U_2, U_3]$ , а  $X$ ,  $Y$  і  $Z$  – квадратні матриці розмірності  $3 \times 3$  з елементами  $X_{ij}$ ,  $Y_{ij}$  і  $Z_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) відповідно.

З умов рівноваги відрізка балки маємо

$$dM_i + M_i(dF) + dM_{o,i} = 0 \quad (i = 1,2,3).$$

Тут  $M_i(dF)$  – моменти приросту сили  $F$  відносно осей  $y_i$  ( $i = 1,2,3$ ),  $dM_{o,i}$  – проекції  $dM_o$  на ці осі.

При  $s = 0$  ці рівності будуть виглядати так:

$$\sum_{r=1}^3 V_{i,r+3} d\xi'_r(0) + \sum_{r=1}^3 V_{i,r} d\xi_r(0) + \sum_{k=1}^3 W_{i,k} dF_k + dM_{o,i} = 0 \quad (i = 1,2,3), \quad (6.24)$$

де  $V_{i,r} = (M_i)_r^{(3)}(0)$ ,  $W_{i,k} = (M_i)_k^{(4)}(0)$  ( $i, k = 1,2,3; r = 1,2,\dots,6$ ).

Ці рівності являють собою частину початкових умов для рівнянь (6.22). Решта початкових умов визначається з умов закріплення лівого кінця балки.

Рівність (6.23) являє собою систему диференціальних рівнянь для знаходження приростів кутів Крилова, що визначають зміну орієнтації репера  $e_1, e_2, e_3$  відносно осей  $x_1, x_2, x_3$ , викликаних приростами сили  $F$  і моменту  $M_o$ . В результаті рішення системи рівнянь (6.23) визначаються  $d\psi, d\phi$  і  $d\theta$  к функції  $s$ . Додаючи їх до знайденим значенням кутів Крилова на попередньому кроці, отримуємо нові значення цих кутів, а потім, проектуючи вектор  $e_1 = \tau = r'$  на осі  $x_i$  ( $i = 1,2,3$ ), отримуємо рівняння

$$x'_{C,i} = \alpha_{1,i} \quad (i = 1,2,3), \quad (6.25)$$

що визначають координати точок зігнутої осі балки.

**Приклад 6.1.** Розглянемо квазістатичний згин жорсткозащемленої залізобетонної колони прямокутного перерізу  $0,4 \text{ м} \times 0,6 \text{ м}$  (рис. 6.2) і довжиною  $10 \text{ м}$ , викликаний дією сил

$$F_2(t) = 4 \sin \frac{2\pi}{T_2} t \quad (\text{кН}), \quad F_3(t) = 3 \sin \frac{2\pi}{T_3} t \quad (\text{кН})$$

( $t$  в секундах,  $T_2 = 10 \text{ с}$ ,  $T_3 = 15 \text{ с}$ ), а також постійної поздовжньої стискаючої сили  $F_1 = 100 \text{ кН}$ . Армування — дванадцять стержнів діаметром  $10 \text{ мм}$  (рис. 6.3), матеріал — сталь марки А-III. Характеристики бетону:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 19 \text{ МПа}$ ,  $R_p = 1,9 \text{ МПа}$ . На рис. 6.4 представлені графіки зміни координат  $x_2$  і  $x_3$  центру верхнього перерізу колони з плином часу (1— для

координати  $x_2$ ,  $2 -$  для  $x_3$ , переміщення в метрах, час у секундах). Помітно накопичення залишкових деформацій.

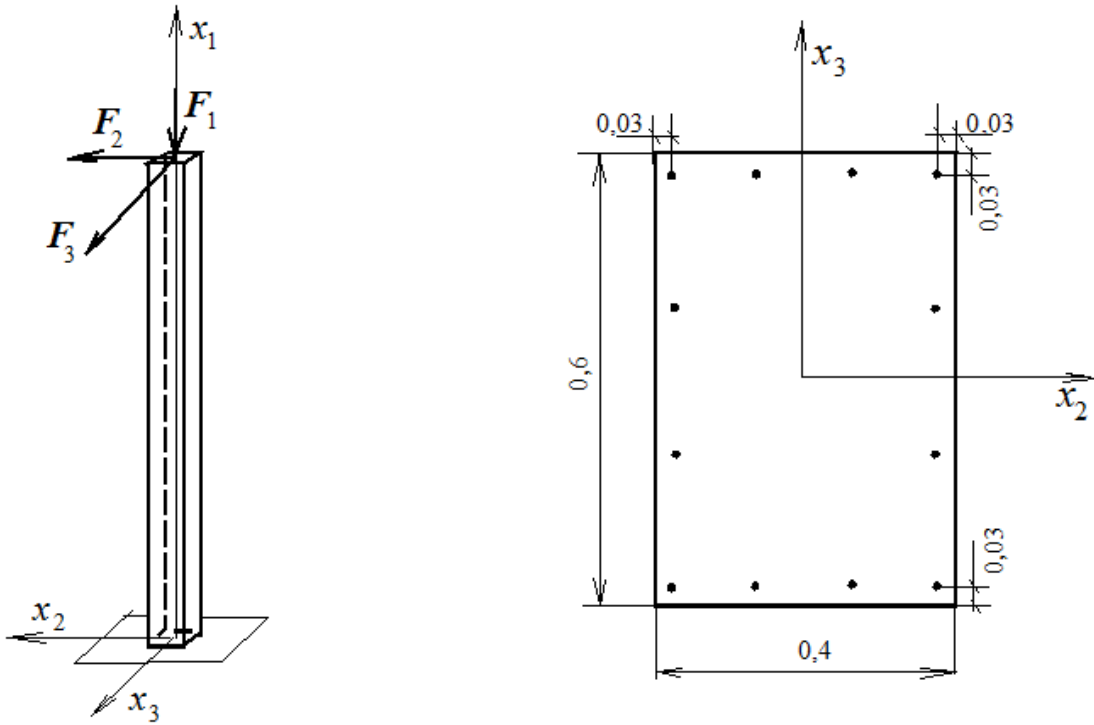


Рис. 6.2 Схема завантаження колони. Рис. 6.3 Поперечний переріз

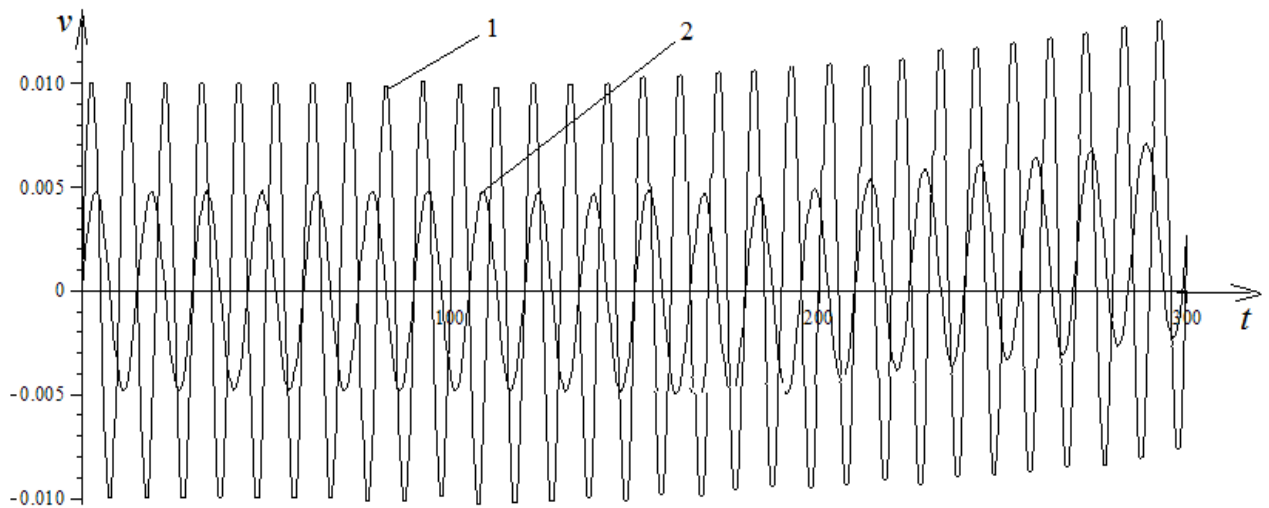


Рис. 6.4 Графіки зміни координат  $x_2$  (1) і  $x_3$  (2) центру верхнього перерізу колони

У цьому параграфі побудовано систему диференціальних рівнянь (6.23) просторового згину елементів залізобетонних каркасних споруд з

урахуванням нелінійних деформативних властивостей і пластичності матеріалів і геометричної нелінійності конструкції.

## 6.2 Побудова методу вирішення нелінійних пружнопластичних квазістатичних задач просторового згину моделей зазібетонних каркасних споруд на основі методу граничних елементів

Оскільки для залізобетонних балок кути  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ , а також  $\phi'$ ,  $\psi'$  і  $\theta'$  малі, то можна прийняти, що  $\cos \phi = \cos \psi = 1$ ,  $\sin \phi = \phi$ ,  $\sin \psi = \psi$ . Крім того, можна знехтувати добутками малих величин. Тоді формули (6.4) приймуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} = 1, \alpha_{1,2} = \phi, \alpha_{1,3} = -\psi, \alpha_{2,1} = -\phi, \alpha_{2,2} = 1, \\ \alpha_{2,3} = \theta, \alpha_{3,1} = \psi, \alpha_{3,2} = -\theta, \alpha_{3,3} = 1. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Тут  $\alpha_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – направляючі косинуси ортів осей  $y_1, y_2, y_3$  в системі координат  $x_1, x_2, x_3$ . З рівностей (6.25) і (6.26) випливає, що

$$dx'_{C,2} = d\phi, dx'_{C,3} = -d\psi. \quad (6.27)$$

Тоді рівняння (6.23) і граничні умови (6.24) можуть бути представлені так:

$$\begin{aligned} X_{i,1}(s)dx'''_{C,2} - X_{i,2}(s)dx'''_{C,3} + X_{i,3}(s)d\theta'' + Y_{i,1}(s)dx''_{C,2} - Y_{i,2}(s)dx''_{C,3} + \\ + Y_{i,3}(s)d\theta' + Z_{i,1}(s)dx'_{C,2} - Z_{i,2}(s)dx'_{C,3} + Z_{i,3}(s)d\theta = -\sum_{k=1}^3 \tilde{U}_{i,k}(s)dF_k \quad (6.28) \\ (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{i,1}dx'_{C,2}(0) - V_{i,2}dx'_{C,3}(0) + V_{i,3}d\theta(0) + V_{i,4}dx''_{C,2}(0) - V_{i,5}dx''_{C,3}(0) + \\ + V_{i,6}d\theta'(0) + \sum_{k=1}^3 W_{i,k}dF_k + dM_{0,i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} y_1 = dx_{C,2}(0), y_2 = dx'_{C,2}(0), y_3 = dx''_{C,2}(0), y_4 = dx_{C,3}(0), \\ y_5 = dx'_{C,3}(0), y_6 = dx''_{C,3}(0), y_7 = d\theta(0), y_8 = d\theta'(0). \end{aligned} \quad (6.30)$$

нехай  $z_{j,k}(s)$  ( $j = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, 8$ ) – фундаментальна система розв'язків задачі Коші для однорідної системи диференціальних рівнянь, що відповідає системі (6.28), тобто

$$z_{1,k}(s) = dx_{C,2}(s), z_{2,k}(s) = dx_{C,3}(s), z_{3,k}(s) = d\theta(s)$$

( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) при виконанні наступних умов:

$$y_j = \delta_{j,k} \quad (j = 1, 2, \dots, 8)$$

( $\delta_{j,k}$  – символ Кронекера). позначимо через  $z_{q,j,m}(s)$  ( $j, m = 1, 2, 3$ ) – множину частинних рішень  $dx_{q,C,2}(s), dx_{q,C,3}(s), \theta_q(s)$  системи (6.28) при нульових початкових умовах і при стовпці правих частин, що складається з елементів  $-\tilde{U}_{i,m}$  ( $m = 1, 2, 3$ ).

Для наближеної побудови цих рішень розіб'ємо балку на ряд сегментів, в межах кожного з яких коефіцієнти  $X_{i,j}(s), Y_{i,j}(s), Z_{i,j}(s)$  вважатимемо постійними і рівними  $X_{i,j}(s_m), Y_{i,j}(s_m), Z_{i,j}(s_m)$  ( $s_m$  – дугова координата початку сегмента,  $m$  – його номер) відповідно. Застосовуючи теорію лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, знаходимо рішення  $dx_{C,2}(s), dx_{C,3}(s), d\theta(s)$  на першому сегменті при відповідних початкових умовах. Потім знаходимо вирішення цієї системи на другому сегменті, використовуючи в якості початкових умов значення функцій  $dx_{C,2}(s), dx_{C,3}(s), d\theta(s)$  і їх похідних в кінці першого сегмента і т.д.

Вирішуючи систему алгебраїчних рівнянь (6.29) щодо  $d\theta'(0), dx''_{C,2}(0)$  і  $dx''_{C,3}(0)$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} dx''_{C,2}(0) &= \tilde{V}_{1,1} dx'_{C,2}(0) + \tilde{V}_{1,2} dx'_{C,3}(0) + \tilde{V}_{1,3} d\theta(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{1,m+3} dM_{0,m} + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{1,m+6} dF_m, \\ dx''_{C,3}(0) &= \tilde{V}_{2,1} dx'_{C,2}(0) + \tilde{V}_{2,2} dx'_{C,3}(0) + \tilde{V}_{2,3} d\theta(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{2,m+3} dM_{0,m}(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{2,m+6} dF_m, \\ d\theta'(0) &= \tilde{V}_{3,1} dx'_{C,2}(0) + \tilde{V}_{3,2} dx'_{C,3}(0) + \tilde{V}_{3,3} d\theta(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{3,m+3} dM_{0,m}(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{3,m+6} dF_m, \end{aligned} \quad (6.31)$$

Рішення однорідної системи, що відповідає системі (6.28) (в подальшому для стислості будемо називати її однорідною системою (6.28)), а



також їх похідні можуть бути виражені через фундаментальні рішення задачі Коші наступним чином:

$$\begin{aligned} dx_{C,2}(s) &= \sum_{j=1}^8 y_j z_{1,j}(s), dx'_{C,2}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z'_{1,j}(s), dx''_{C,2}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z''_{1,j}(s), \\ dx_{C,3}(s) &= \sum_{j=1}^8 y_j z_{2,j}(s), dx'_{C,3}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z'_{2,j}(s), dx''_{C,3}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z''_{2,j}(s), \\ d\theta(s) &= \sum_{j=1}^8 y_j z_{3,j}(s), d\theta'(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z'_{3,j}(s), \end{aligned} \quad (6.32)$$

Для знаходження  $dM_i(s)$  и  $dQ_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) використовуємо формули (6.20):

$$\begin{aligned} dM_i &= \sum_{r=1}^3 (M_i)_r^{(3)} d\xi_r + \sum_{r=1}^3 (M_i)_{r+3}^{(3)} d\xi'_r + \sum_{k=1}^3 (M_i)_k^{(4)} dF_k, \\ dQ_i &= \sum_{r=1}^3 (Q_i)_r^{(3)} d\xi_r + \sum_{r=1}^3 (Q_i)_{r+3}^{(3)} d\xi'_r + \sum_{k=1}^3 (Q_i)_k^{(4)} dF_k \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Використовуючи (6.27), формули (6.33) можна записати так:

$$\begin{aligned} dM_i(s) &= (M_i)_1^{(3)}(s) dx'_{C,2}(s) - (M_i)_2^{(3)}(s) dx'_{C,3}(s) + (M_i)_3^{(3)}(s) d\theta(s) + \\ &+ (M_i)_4^{(3)}(s) dx''_{C,2}(s) - (M_i)_5^{(3)}(s) dx''_{C,3}(s) + (M_i)_6^{(3)}(s) d\theta'(s) + \sum_{k=1}^3 (M_i)_k^{(4)} dF_k, \\ dQ_i(s) &= (Q_i)_1^{(3)}(s) dx'_{C,2}(s) - (Q_i)_2^{(3)}(s) dx'_{C,3}(s) + (Q_i)_3^{(3)}(s) d\theta(s) + \\ &+ (Q_i)_4^{(3)}(s) dx''_{C,2}(s) - (Q_i)_5^{(3)}(s) dx''_{C,3}(s) + (Q_i)_6^{(3)}(s) d\theta'(s) + \sum_{k=1}^3 (Q_i)_k^{(4)} dF_k \\ &(i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Для кожного зі стержнів рами має місце рівність:

$$dw(s) = dw_{одн}(s) + dw_u(s). \quad (6.35)$$

Тут  $dw_{одн}(s)$  – вектор з елементами

$$\begin{aligned} dw_{одн,1}(s) &= dx_{C,2}(s), dw_{одн,2}(s) = dx'_{C,2}(s), dw_{одн,3}(s) = dx''_{C,2}(s), \\ dw_{одн,4}(s) &= dx_{C,3}(s), dw_{одн,5}(s) = dx'_{C,3}(s), dw_{одн,6}(s) = dx''_{C,3}(s), \\ dw_{одн,7}(s) &= d\theta(s), dw_{одн,8}(s) = d\theta'(s), \end{aligned} \quad (6.36)$$

отриманими з рішення однорідної системи (6.28), а  $dw_u(s)$  – вектор з тими ж елементами, знайденими в результаті рішення неоднорідної системи (6.31)

при нульових початкових умовах. Зі структури правій частині системи випливає, що  $dw_u(s)$  може бути представлено таким чином:

$$dw_{u,j} = \sum_{m=1}^3 z_{u,j,m}(s) dF_m \quad (j = 1, 2, \dots, 8), \quad (6.37)$$

де  $z_{u,j,m}(s)$  – рішення системи (6.28) з правою частиною  $\tilde{U}_{j,m}(s)$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ;  $m = 1, 2, 3$ ).

Рівності (6.35) можна записати в матричному вигляді:

$$dw_{одн}(s) = A(s)dw(0), \quad (6.38)$$

де

$$\begin{aligned} A_{1,j} &= z_{1,j}(s), A_{2,j} = z'_{1,j}(s), A_{3,j} = z''_{1,j}(s), A_{4,j} = z_{2,j}(s), \\ A_{5,j} &= z'_{2,j}(s), A_{6,j} = z''_{2,j}(s), A_{7,j} = z_{3,j}(s), A_{8,j} = z'_{1,j}(s) \quad (j = 1, 2, \dots, 8). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Таким чином,  $dw(s)$  представляється в наступному вигляді:

$$dw(s) = A(s)dw(0) + dw_u(s). \quad (6.40)$$

Побудувавши матрицю  $A(s)$  і вектор  $dw_u(s)$  для кожного елемента рами і використовуючи далі загальну схему методу граничних елементів, можна отримати прирости лінійних і кутових переміщень довільного перерізу будь-якого елемента рами при статичних навантаженнях.

**Приклад 6.2. Квazистатична задача просторового згину моделі двоповерхової залізобетонної каркасної будівлі.** Двоступенева залізобетонна колона знаходиться під дією двох горизонтальних сил

$$F_3^{(1)}(t) = Af_3(t), F_2^{(2)}(t) = Af_2(t), \quad f_j(t) = 1 + \sin \frac{2\pi(t - T_j/4)}{T_j} \quad (j = 2, 3), \quad A = 9,25 \text{ кН},$$

$T_2 = 10 \text{ с}$ ,  $T_3 = 15 \text{ с}$  і сил тяжіння двох вантажів  $M_1$  і  $M_2$ , маси яких  $m_1 = m_2 = 60T$ . Довжини ділянок колони  $l_1 = l_2 = 5 \text{ м}$ . Поперечні перерізи ділянок колони представляють собою квадрати зі сторонами  $0,5 \text{ м}$  і  $0,4 \text{ м}$ . Армування — дванадцять стержнів діаметром  $10 \text{ мм}$ , розташованих симетрично як щодо осі  $x_2$ , так и щодо осі  $x_3$ , матеріал — сталь марки А-III. Характеристики бетону:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 19 \text{ МПа}$ ,  $R_p = 1,9 \text{ МПа}$ . Графік функції  $f_j(t)$  представлений на рис. 6.6.

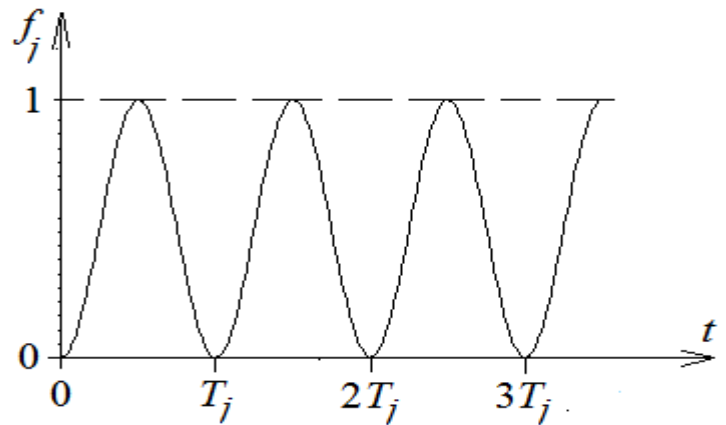
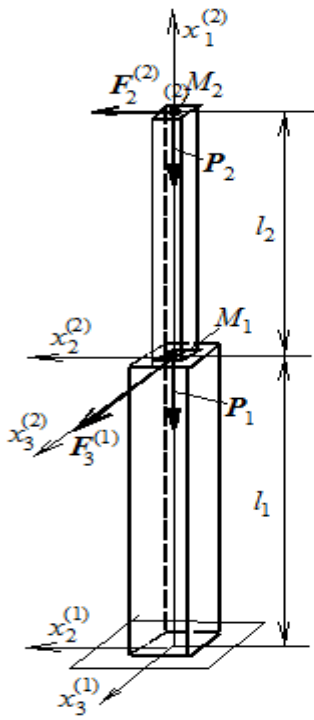
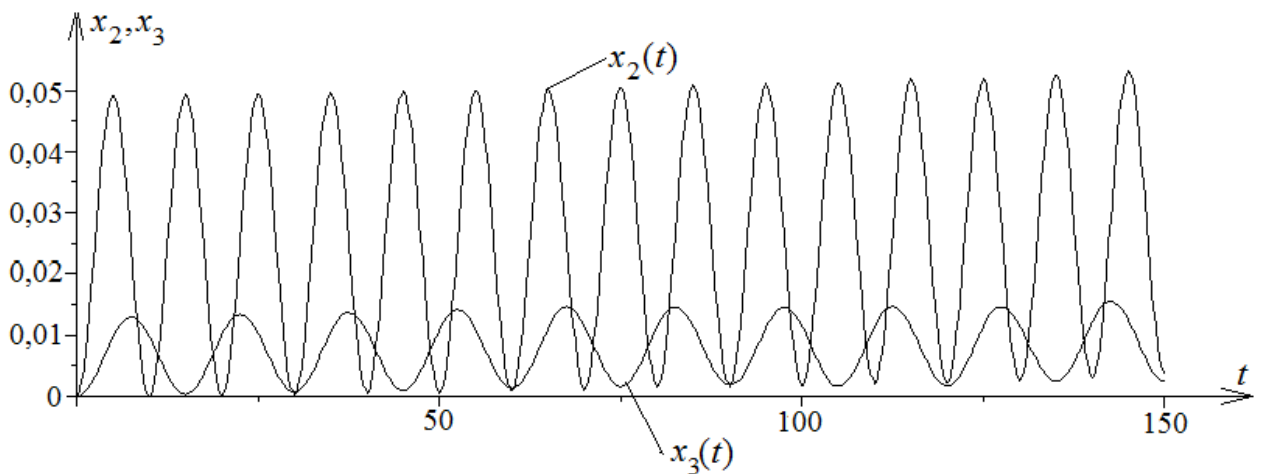


Рис. 6.5 Схема завантаження колони

Рис. 6.6 Графік функції  $f_j(t)$ 

Періоди функцій  $f_j(t)$  ( $j = 2,3$ ) досить великі для того, щоб знехтувати інерційними ефектами в конструкції і тому задача визначення деформацій відноситься до числа квазістатичних. Використовуючи алгоритм, викладений вище, для кожного з ділянок колони і з урахуванням умови їх сполучення, будуюмо графіки зміни координат  $x_2$  і  $x_3$  центру верхнього перерізу колони. Ці графіки наведені на рис. 6.7. Помітно накопичення залишкових деформацій.

Рис. 6.7 Графіки зміни координат  $x_2$  і  $x_3$  центру верхнього перерізу колони

Отже, у цьому параграфі проведено побудову алгоритму вирішення нелінійних квазістатичних задач просторового згину моделей зазібетонних каркасних споруд, заснованого на методі граничних елементів, з урахуванням пластичності матеріалів. Застосування методу продемонстровано на конкретному прикладі.

### **6.3. Побудова методу вирішення нелінійних просторових пружнопластичних динамічних задач для моделей зазібетонних каркасних споруд на основі методу граничних елементів**

При вирішенні динамічних задач використовується алгоритм методу лінійних прискорень Ньюмарка. Складається система основних рівнянь динаміки для зосереджених мас

$$M\hat{\Delta}a = \hat{\Delta}F + \hat{\Delta}R. \quad (6.41)$$

( $M$  — діагональна матриця мас точок,  $\hat{\Delta}a$  — вектор - стовпець приростів прискорень,  $\hat{\Delta}F$  і  $\hat{\Delta}R$  — вектори приростів змушуючих сил і реакцій конструкції). На підставі методу лінійних прискорень

$$\hat{\Delta}a = \frac{6}{(\hat{\Delta}t)^2} [\hat{\Delta}v - V\hat{\Delta}t - \frac{1}{2}a(\hat{\Delta}t)^2]. \quad (6.42)$$

Тут  $\hat{\Delta}t$  — приріст часу, причому відповідно до модифікації Вільсона  $\hat{\Delta}t = \theta\Delta t$  ( $\theta > 1$  — скалярний множник,  $\Delta t$  — часовий крок),  $\hat{\Delta}v$  — вектор приростів переміщень точок,  $V$  і  $a$  — вектори-стовпці їх швидкостей і прискорень, визначені на попередньому кроці.

Використовуючи алгоритм, викладений в п.6.2, будується матриця, стовпцями якої є вектори-стовпці приростів переміщень точок, викликані векторами приростів навантажень  $\Delta F_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $k$  — й елемент кожного з яких дорівнює одиниці, а інші нулю). Тоді

$$\hat{\Delta} \mathbf{v} = -\mathbf{Y} \hat{\Delta} \mathbf{R}. \quad (6.43)$$

Результатом підстановки (6.43) в (6.42), а потім (6.42) в (6.41), з'являється рівність

$$\hat{\Delta} \mathbf{R} = -[\mathbf{I} + \frac{6}{(\hat{\Delta} t)^2} \mathbf{M} \mathbf{Y}]^{-1} \left\{ \frac{6}{(\hat{\Delta} t)^2} \mathbf{M} [\mathbf{V} \hat{\Delta} t + \mathbf{a} \frac{(\hat{\Delta} t)^2}{2}] + \hat{\Delta} \mathbf{F} \right\}. \quad (6.44)$$

Далі з (6.43) і (6.42) визначаються  $\hat{\Delta} \mathbf{v}$  і  $\hat{\Delta} \mathbf{a}$ , а потім з формул

$$\Delta \mathbf{a} = \frac{1}{\theta} \hat{\Delta} \mathbf{a}, \Delta \mathbf{V} = (\mathbf{a} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{a}) \Delta t, \Delta \mathbf{v} = \mathbf{V} \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \frac{1}{3} \Delta \mathbf{a}) (\Delta t)^2 \quad (6.45)$$

визначаються вектори-стовпці приростів прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок, що відповідають проміжку часу  $\Delta t$ . Завершується крок обчисленням нових значень прискорень, швидкостей і переміщень вантажів:

$$\mathbf{a}_{нов} = \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}, \mathbf{V}_{нов} = \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}, \mathbf{v}_{нов} = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}. \quad (6.46)$$

### Приклад 6.3 Просторова нелінійна динамічна задача для одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі

На вершині жорсткозащемленої залізобетонної колони перерізу  $0,4 \text{ м} \times 0,4 \text{ м}$  (рис. 5.5) і довжиною  $8 \text{ м}$ , прикріплений вантаж масою  $m = 40T$ .

Визначити рух вантажу, викликаний дією сил  $F_2(t) = 10 \sin \frac{2\pi}{T_2} t$  (кН) і

$F_3(t) = 5 \sin \frac{2\pi}{T_3} t$  (кН) ( $t$  в секундах,  $T_2 = 1 \text{ с}$ ,  $T_3 = 1,5 \text{ с}$ ). Характеристики

бетону і арматури такі ж, як і в прикладі 6.2. На рис. 6.8 представлені графіки зміни координат  $x_2$  і  $x_3$  вантажу з течією часу (1 - для координати  $x_2$ , 2 - для  $x_3$ , переміщення в метрах, час у секундах). Розмах коливань уздовж осі  $x_3$  істотно більше, ніж уздовж осі  $x_2$ , так як  $T_3$  ближче до періоду вільних коливань  $T_0 = 2,1 \text{ с}$ . Помітно накопичення залишкових деформацій.

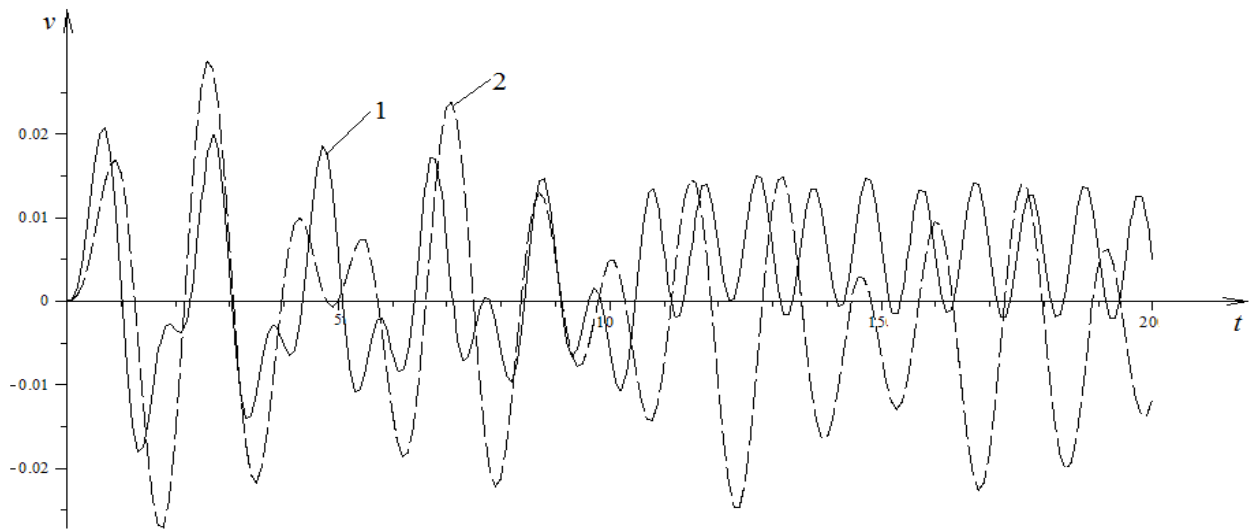


Рис. 6.8 Графіки коливань вантажу на залізобетонній колоні

У цьому параграфі проведена побудова алгоритму методу вирішення нелінійних просторових пружнопластичних динамічних задач для моделей залізобетонних каркасних споруд, заснованого на методі граничних елементів.

#### 6.4 Дослідження просторової нелінійної пружнопластичної квазістатичної задачі для залізобетонної рами

Рама складається з трьох залізобетонних стержнів 1, 2 і 3 (рис. 6.9, номери стержнів представлені в круглих дужках) постійного прямокутного перерізу, стержні 1 і 3 жорстко затиснені в точках  $A$  і  $B$ .

На кожному з стержнів обрана локальна система координат  $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}$  ( $i$  – номер стержня). На кресленні показана також глобальна система координат  $x_1, x_2, x_3$ . До вузлів 1 і 2 (номери вузлів показані в квадратних дужках) прикладені сили  $P^{[1]}$  і  $P^{[2]}$ . На кресленні представлені також складові опорних реакцій  $R_A$  і  $R_B$  в глобальній системі координат. Таким же чином спрямовані складові частини опорних моментів  $M_A$  і  $M_B$ . Довжини стержнів дорівнюють  $l_1, l_2$  і  $l_3$  (відповідно до номерами стержнів,  $l_1 = l_3$ ).

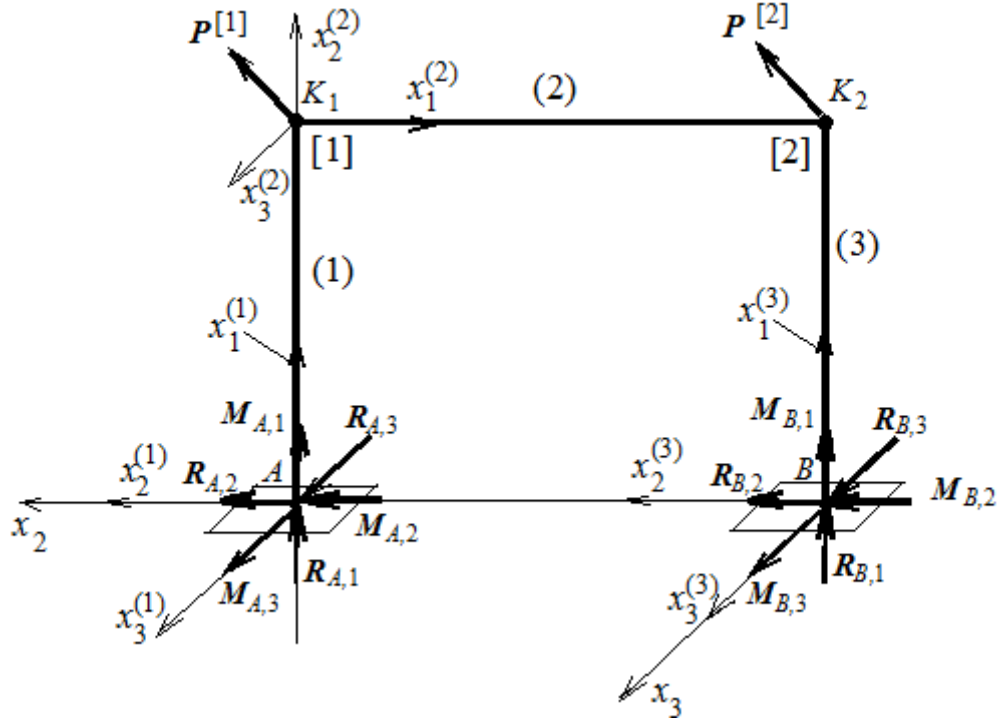


Рис. 6.9 Розрахункова схема конструкції

Система диференціальних рівнянь просторового згину залізобетонної балки в приростах локальних координат центру поперечного перерізу з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності бетону має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 & X_{i,1}(s)dx'''_{C,2} - X_{i,2}(s)dx'''_{C,3} + X_{i,3}(s)d\theta'' + Y_{i,1}(s)dx''_{C,2} - Y_{i,2}(s)dx''_{C,3} + \\
 & + Y_{i,3}(s)d\theta' + Z_{i,1}(s)dx'_{C,2} - Z_{i,2}(s)dx'_{C,3} + Z_{i,3}(s)d\theta + \sum_{k=1}^3 \tilde{U}_{i,k}(s)dF_k = 0 \quad (6.47) \\
 & (i = 1,2,3),
 \end{aligned}$$

а граничні умови - такий:

$$\begin{aligned}
 & V_{i,1}dx'_{C,2}(0) - V_{i,2}dx'_{C,3}(0) + V_{i,3}d\theta(0) + V_{i,4}dx''_{C,2}(0) - V_{i,5}dx''_{C,3}(0) + \\
 & + V_{i,6}d\theta'(0) + \sum_{k=1}^3 W_{i,k}dF_k + dM_{0,i} = 0 \quad (i = 1,2,3). \quad (6.48)
 \end{aligned}$$

(штрих означає похідну по дуговій координаті  $s$ ,  $dF_i$  і  $dM_{0,i}$  - складові приросту головного вектору  $dF$  и головного моменту  $dM_0$  зовнішніх сил, прикладених до лівого кінця балки). Запишемо (6.48) наступним чином:

$$\mathbf{B}d\eta + \mathbf{C}d\eta' = -\mathbf{W}d\mathbf{F} - d\mathbf{M}_o. \quad (6.49)$$

Тут

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} V_{1,1} & -V_{1,2} & V_{1,3} \\ V_{2,1} & -V_{2,2} & V_{2,3} \\ V_{3,1} & -V_{3,2} & V_{3,3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} V_{1,4} & -V_{1,5} & V_{1,6} \\ V_{2,4} & -V_{2,5} & V_{2,6} \\ V_{3,4} & -V_{3,5} & V_{3,6} \end{bmatrix}, \quad d\eta = \begin{bmatrix} dx'_{C,2}(0) \\ dx'_{C,3}(0) \\ d\theta(0) \end{bmatrix}.$$

З (6.49) отримуємо

$$d\eta' = \mathbf{D}d\eta + \mathbf{E}d\mathbf{M}_o + \mathbf{G}d\mathbf{F}, \quad (6.50)$$

де  $\mathbf{D} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E} = -\mathbf{C}^{-1}$ ,  $\mathbf{G} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{W}$ .

Введемо вектор  $d\mathbf{w}(s)$  з елементами

$$\begin{aligned} dw_1(s) &= dx_2(s), dw_2(s) = dx_3(s), dw_3(s) = dx'_2(s), \\ dw_4(s) &= dx'_3(s), dw_5(s) = d\theta(s), dw_6(s) = dx''_2(s), \\ dw_7(s) &= dx''_3(s), dw_8(s) = d\theta'(s), dw_9(s) = dx_1(s) \end{aligned} \quad (6.51)$$

Тоді (6.50) запишеться так:

$$d\mathbf{w}(0) = \tilde{\mathbf{D}}d\tilde{\mathbf{w}}(0) + \tilde{\mathbf{E}}d\mathbf{M}_o + \tilde{\mathbf{G}}d\mathbf{F}, \quad (6.52)$$

де  $d\tilde{\mathbf{w}}(0)$  – вектор  $d\mathbf{w}(0)$ , у якого  $dw_j(0) = 0, (j = 6, 7, 8, 9) = 0$ ,

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{3,1} & D_{3,2} & D_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ E_{1,1} & E_{1,2} & E_{1,3} \\ E_{2,1} & E_{2,2} & E_{2,3} \\ E_{3,1} & E_{3,2} & E_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ G_{1,1} & G_{1,2} & G_{1,3} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & G_{2,3} \\ G_{3,1} & G_{3,2} & G_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

Зауважимо, що для стержня 1  $d\mathbf{F} = d\mathbf{R}_A$ ,  $d\mathbf{M}_o = d\mathbf{M}_A$  і для нього рівність (6.52) виглядає так:

$$d\mathbf{w}(0) = \tilde{\mathbf{D}}d\tilde{\mathbf{w}}(0) + \tilde{\mathbf{E}}d\mathbf{M}_A + \tilde{\mathbf{G}}d\mathbf{R}_A. \quad (6.54)$$

На підставі алгоритму, запропонованого в п. 3, для кожного стержня може



бути побудована матриця  $A(s)$  і вектор  $d\mathbf{w}_q(s)$ , через які визначається вектор  $d\mathbf{w}(s)$ :

$$d\mathbf{w}(s) = A(s)d\mathbf{w}(0) + d\mathbf{w}_q(s), \quad (6.55)$$

де

$$\begin{aligned} A_{1,j} &= z_{1,j}(s), A_{2,j} = z'_{1,j}(s), A_{3,j} = z''_{1,j}(s), A_{4,j} = z_{2,j}(s), \\ A_{5,j} &= z'_{2,j}(s), A_{6,j} = z''_{2,j}(s), A_{7,j} = z_{3,j}(s), A_{8,j} = z'_{1,j}(s) \quad (j = 1, 2, \dots, 8). \end{aligned}$$

( $z_{k,j}(s)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – фундаментальні рішення задачі Коші для системи диференціальних рівнянь(1)),  $A_{9,9} = 1$ , інші елементи дев'ятого рядка і дев'ятого стовпця матриці  $A$  дорівнюють нулю, а  $d\mathbf{w}_q^{(1)}(s)$  визначається за формулою

$$d\mathbf{w}_q(s) = S(s)dF, \quad (6.56)$$

$S(s)$  – матриця з елементами  $z_{q,j,m}(s)$  ( $j = 1, 2, \dots, 8; m = 1, 2, 3$ ), інші елементи матриці  $S(s)$  дорівнюють нулю. Для стержня 1

$$d\mathbf{w}_q^{(1)}(s) = S^{(1)}(s)dR_A. \quad (6.57)$$

Враховуючи, що для стержня 1  $dx_1(0) = dx_2(0) = dx'_2(0) = dx_3(0) = dx'_3(0) = d\theta(0) = 0$  (тобто  $d\tilde{\mathbf{w}}^{(1)}(0) = 0$ ), з (6.54) знаходимо

$$d\mathbf{w}^{(1)}(0) = \mathbf{w}_M^{(1)}(0)dM_A + \mathbf{w}_R^{(1)}(0)dR_A, \quad (6.58)$$

де  $\mathbf{w}_M^{(1)}(0) = \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}$ ,  $\mathbf{w}_R^{(1)}(0) = \tilde{\mathbf{G}}^{(1)}$ .

З (6.55) - (6.58) випливає, що

$$d\mathbf{w}^{(1)}(s) = \mathbf{w}_M^{(1)}(s)dM_A + \mathbf{w}_R^{(1)}(s)dR_A. \quad (6.59)$$

Тут  $\mathbf{w}_M^{(1)}(s) = A^{(1)}(s)\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}$ ,  $\mathbf{w}_R^{(1)}(s) = A^{(1)}(s)\tilde{\mathbf{G}}^{(1)} + S^{(1)}(s)$ . При  $s = l_1$  відповідно до (6.51) отримуємо значення  $dx_2(l_1), dx'_2(l_1), dx''_2(l_1), dx_3(l_1), dx'_3(l_1), dx''_3(l_1), d\theta(l_1), d\theta'(l_1)$ . Для знаходження  $dM_i(s)$  і  $dQ_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) використовуємо формули (6.34)

$$\begin{aligned}
dM_i(s) &= (\tilde{M}_i)_1(s)dx'_2(s) - (\tilde{M}_i)_2(s)dx'_3(s) + (\tilde{M}_i)_3(s)d\theta(s) + \\
&+ (\tilde{M}_i)_4(s)dx''_2(s) - (\tilde{M}_i)_5(s)dx''_3(s) + (\tilde{M}_i)_6(s)d\theta'(s) + \sum_{m=1}^3 (\tilde{M}_i)_m(s)dF_m, \\
dQ_i(s) &= (\tilde{Q}_i)_1(s)dx'_2(s) - (\tilde{Q}_i)_2(s)dx'_3(s) + (\tilde{Q}_i)_3(s)d\theta(s) + \\
&+ (\tilde{Q}_i)_4(s)dx''_2(s) - (\tilde{Q}_i)_5(s)dx''_3(s) + (\tilde{Q}_i)_6(s)d\theta'(s) + \sum_{m=1}^3 (\tilde{Q}_i)_m(s)dF_m
\end{aligned} \tag{6.60}$$

( $i=1,2,3$ ), тут введені позначення  $(\tilde{M}_i)_r = (M_i)_r^{(3)}$ ,  $(\tilde{Q}_i)_r = (Q_i)_r^{(3)}$ ,  
 $(\tilde{\tilde{M}}_i)_r = (M_i)_r^{(4)}$ ,  $(\tilde{\tilde{Q}}_i)_r = (Q_i)_r^{(4)}$ .

Формули (6.60) можуть бути записані так:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{M}(s) &= \tilde{\mathbf{M}}(s)d\mathbf{w}(s) + \tilde{\tilde{\mathbf{M}}}(s)d\mathbf{F}, \\
d\mathbf{Q}(s) &= \tilde{\mathbf{Q}}(s)d\mathbf{w}(s) + \tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}(s)d\mathbf{F}.
\end{aligned} \tag{6.61}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{M}}(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\tilde{M}_1)_1(s) & -(\tilde{M}_1)_2(s) & (\tilde{M}_1)_3(s) & (\tilde{M}_1)_4(s) & -(\tilde{M}_1)_5(s) & (\tilde{M}_1)_6(s) \\ 0 & 0 & (\tilde{M}_2)_1(s) & -(\tilde{M}_2)_2(s) & (\tilde{M}_2)_3(s) & (\tilde{M}_2)_4(s) & -(\tilde{M}_2)_5(s) & (\tilde{M}_2)_6(s) \\ 0 & 0 & (\tilde{M}_3)_1(s) & -(\tilde{M}_3)_2(s) & (\tilde{M}_3)_3(s) & (\tilde{M}_3)_4(s) & -(\tilde{M}_3)_5(s) & (\tilde{M}_3)_6(s) \end{bmatrix}, \\
\tilde{\tilde{\mathbf{M}}}(s) &= \begin{bmatrix} (\tilde{\tilde{M}}_1)_1(s) & (\tilde{\tilde{M}}_1)_2(s) & (\tilde{\tilde{M}}_1)_3(s) \\ (\tilde{\tilde{M}}_2)_1(s) & (\tilde{\tilde{M}}_2)_2(s) & (\tilde{\tilde{M}}_2)_3(s) \\ (\tilde{\tilde{M}}_3)_1(s) & (\tilde{\tilde{M}}_3)_2(s) & (\tilde{\tilde{M}}_3)_3(s) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Аналогічний вигляд мають матриці  $\tilde{\mathbf{Q}}(s)$  і  $\tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}(s)$ . Для стержня 1 отримуємо

$$\begin{aligned}
d\mathbf{M}^{(1)}(s) &= \tilde{\mathbf{M}}^{(1)}(s)\mathbf{w}_M^{(1)}(s)d\mathbf{M}_A + [\tilde{\mathbf{M}}^{(1)}(s)\mathbf{w}_R^{(1)}(s) + \tilde{\tilde{\mathbf{M}}}(s)]d\mathbf{R}_A, \\
d\mathbf{Q}^{(1)}(s) &= \tilde{\mathbf{Q}}^{(1)}(s)\mathbf{w}_M^{(1)}(s)d\mathbf{M}_A + [\tilde{\mathbf{Q}}^{(1)}(s)\mathbf{w}_R^{(1)}(s) + \tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}(s)]d\mathbf{R}_A,
\end{aligned}$$

що можна записати так

$$\begin{aligned}
d\mathbf{M}^{(1)}(s) &= \mathbf{M}_M^{(1)}(s)d\mathbf{M}_A + \mathbf{M}_R^{(1)}(s)d\mathbf{R}_A, \\
d\mathbf{Q}^{(1)}(s) &= \mathbf{Q}_M^{(1)}(s)d\mathbf{M}_A + \mathbf{Q}_R^{(1)}(s)d\mathbf{R}_A,
\end{aligned} \tag{6.62}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_M^{(1)}(s) &= \tilde{\mathbf{M}}^{(1)}(s)\mathbf{w}_M^{(1)}(s), \mathbf{M}_R^{(1)}(s) = \tilde{\mathbf{M}}^{(1)}(s)\mathbf{w}_R^{(1)}(s) + \tilde{\tilde{\mathbf{M}}}(s), \\
\mathbf{Q}_M^{(1)}(s) &= \tilde{\mathbf{Q}}^{(1)}(s)\mathbf{w}_M^{(1)}(s), \mathbf{Q}_R^{(1)}(s) = \tilde{\mathbf{Q}}^{(1)}(s)\mathbf{w}_R^{(1)}(s) + \tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}(s).
\end{aligned}$$

Будемо вважати, що навантаження, що діють на раму, змінюються досить повільно для того, щоб можна було вважати процес руху рами квазістатичним. Розглянемо частину рами, що знаходиться лівіше лівого кінця стержня 2 (рис. 6.10).

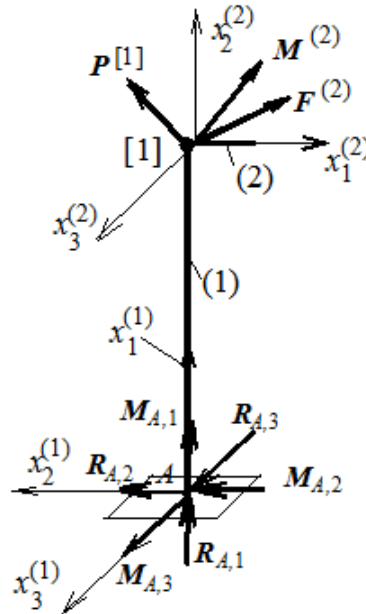


Рис. 6.10 Зусилля, що діють на стержень 1

Тут  $dF^{(2)}$  і  $dM_o^{(2)}$  – головний вектор і головний момент сил, показаних на кресленні. Визначимо проекції  $dF^{(2)}$  и  $dM_o^{(2)}$  на осі  $x_i^{(2)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} dF_1^{(2,2)} &= -dR_{A,2} - dP_2^{[1]}, dF_2^{(2,2)} = dR_{A,1} + dP_1^{[1]}, dF_3^{[1]} = dR_{A,3} + dP_3^{[1]}, \\ dM_{o,1}^{(2,2)} &= -dM_{A,2} - dR_{A,3}l_1, dM_{o,2}^{(2,2)} = dM_{A,1}, dM_{o,3}^{[1]} = dM_{A,3} - dR_{A,2}l_1. \end{aligned}$$

Ці рівності можна записати так:

$$\begin{aligned} dF^{(2)} &= K^{[1]}dR_A + K^{[1]}dP^{[1]}, \\ dM_o^{(2)} &= K^{[1]}dM_A + L^{[1]}dR_A, \end{aligned} \quad (6.63)$$

причому

$$K^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L^{[1]} = l_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для залізобетонних конструкцій кути Крилова дуже малі, тому можна вважати, що в локальній системі координат кут  $\theta$  є кутом повороту навколо

осі  $x_1$ ,  $\psi$  - навколо осі  $x_2$ ,  $\phi$  - навколо осі  $x_3$ . Зауважимо, що напрямки осей  $x_2^{(2)}$  і  $x_1^{(1)}$ , а також осей  $x_3^{(2)}$  і  $x_3^{(1)}$  збігаються, в той час як напрямки осей  $x_1^{(2)}$  і  $x_2^{(1)}$  прямо протилежні. Звідси слідує що

$$\begin{aligned} d\phi^{(2)}(0) &= d\phi^{(1)}(l_1), \quad d\psi^{(2)}(0) = d\theta^{(1)}(l_1), \\ d\theta^{(2)}(0) &= -d\psi^{(1)}(l_1). \end{aligned}$$

З цих співвідношень і з того, що  $dx'_{C,2} = d\phi$ ,  $dx'_{C,3} = -d\psi$ , отримуємо

$$\begin{aligned} dw_1^{(2)}(0) &= dx_2^{(2)}(0) = dx_1^{(1)}(l_1) = dw_9^{(1)}(l_1), \\ dw_2^{(2)}(0) &= dx_3^{(2)}(0) = dx_3^{(1)}(l_1) = dw_2^{(1)}(l_1), \\ dw_3^{(2)}(0) &= (dx_2^{(2)})'(0) = d\phi^{(2)}(0) = d\phi^{(1)}(l_1) = (dx_2^{(1)})'(l_1) = dw_3^{(1)}(l_1), \\ dw_4^{(2)}(0) &= (dx_3^{(2)})'(0) = -d\psi^{(2)}(0) = -d\theta^{(1)}(l_1) = -dw_5^{(1)}(l_1), \\ dw_5^{(2)}(0) &= d\theta^{(2)}(0) = -d\psi^{(1)}(l_1) = (dx_3^{(1)})'(l_1) = dw_4^{(1)}(l_1), \\ dw_9^{(2)}(0) &= dx_1^{(2)}(0) = -dx_2^{(1)}(l_1) = -dw_1^{(1)}(l_1). \end{aligned} \quad (6.64)$$

Величини  $dw_6^{(2)}(0)$ ,  $dw_7^{(2)}(0)$ ,  $dw_8^{(2)}(0)$  залишаються поки невизначеними.

Запишемо співвідношення (6.64) в матричному вигляді

$$d\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}(0) = \mathbf{T}^{[1]} d\mathbf{w}^{(1)}(l_1), \quad (6.65)$$

де

$$\mathbf{T}^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Скористаємося співвідношенням (6.52) для стержня 2

$$d\mathbf{w}^{(2)}(0) = \tilde{\mathbf{D}}(0)d\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}(0) + \tilde{\mathbf{E}}(0)d\mathbf{M}_o^{(2)} + \tilde{\mathbf{G}}(0)d\mathbf{F}^{(2)}.$$

Використовуючи (6.63), (6.65) і (6.59) при  $s = l_1$ , отримуємо

$$d\mathbf{w}^{(2)}(0) = \mathbf{w}_M^{(2)}(0)d\mathbf{M}_A + \mathbf{w}_R^{(2)}(0)d\mathbf{R}_A + \mathbf{w}_P^{(2)}(0)d\mathbf{P}^{[1]}. \quad (6.66)$$

Тут

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_M^{(2)}(0) &= \tilde{\mathbf{D}}(0)\mathbf{T}^{[1]}\mathbf{w}_M^{(1)}(l_1) + \tilde{\mathbf{E}}(0)\mathbf{K}^{[1]}, \\ \mathbf{w}_R^{(2)}(0) &= \tilde{\mathbf{D}}(0)\mathbf{T}^{[1]}\mathbf{w}_R^{(1)}(l_1) + \tilde{\mathbf{E}}(0)\mathbf{L}^{[1]} + \tilde{\mathbf{G}}(0)\mathbf{K}^{[1]}, \\ \mathbf{w}_P^{(2)}(0) &= \tilde{\mathbf{G}}(0)\mathbf{K}^{[1]}. \end{aligned}$$

З (6.55) і (6.56) знаходимо

$$d\mathbf{w}^{(2)}(s) = \mathbf{A}^{(2)}(s)d\mathbf{w}^{(2)}(0) + \mathbf{S}^{(2)}(s)d\mathbf{F}^{(2)}.$$

З урахуванням (6.66) і (6.63) приводимо цю рівність до наступного вигляду:

$$d\mathbf{w}^{(2)}(s) = \mathbf{w}_M^{(2)}(s)d\mathbf{M}_A + \mathbf{w}_R^{(2)}(s)d\mathbf{R}_A + \mathbf{w}_P^{(2)}(s)d\mathbf{P}^{[1]}, \quad (6.67)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_M^{(2)}(s) &= \mathbf{A}^{(2)}(s)\mathbf{w}_M^{(2)}(0), \\ \mathbf{w}_R^{(2)}(s) &= \mathbf{A}^{(2)}(s)\mathbf{w}_R^{(2)}(0) + \mathbf{S}^{(2)}(s)\mathbf{K}^{[1]}, \\ \mathbf{w}_P^{(2)}(s) &= \mathbf{A}^{(2)}(s)\mathbf{w}_P^{(2)}(0) + \mathbf{S}^{(2)}(s)\mathbf{K}^{[1]}. \end{aligned}$$

З формул (6.51) для стержня 2 випливає

$$d\mathbf{M}^{(2)}(s) = \mathbf{M}_M^{(2)}(s)d\mathbf{M}_A + \mathbf{M}_R^{(2)}(s)d\mathbf{R}_A + \mathbf{M}_P^{(2)}(s)d\mathbf{P}^{[1]}. \quad (6.68)$$

В формулі (6.68):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_M^{(2)}(s) &= \tilde{\mathbf{M}}^{(2)}(s)\mathbf{w}_M^{(2)}(s), \\ \mathbf{M}_R^{(2)}(s) &= \tilde{\mathbf{M}}^{(2)}(s)\mathbf{w}_R^{(2)}(s) + \tilde{\tilde{\mathbf{M}}}^{(2)}(s)\mathbf{K}^{[1]}, \\ \mathbf{M}_P^{(2)}(s) &= \tilde{\mathbf{M}}^{(2)}(s)\mathbf{w}_P^{(2)}(s) + \tilde{\tilde{\mathbf{M}}}^{(2)}(s)\mathbf{K}^{[1]}. \end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо

$$d\mathbf{Q}^{(2)}(s) = \mathbf{Q}_M^{(2)}(s)d\mathbf{M}_A + \mathbf{Q}_R^{(2)}(s)d\mathbf{R}_A + \mathbf{Q}_P^{(2)}(s)d\mathbf{P}^{[1]}, \quad (6.69)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_M^{(2)}(s) &= \tilde{\mathbf{Q}}^{(2)}(s)\mathbf{w}_M^{(2)}(s) + \tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}^{(2)}(s)\mathbf{K}^{[1]}, \\ \mathbf{Q}_R^{(2)}(s) &= \tilde{\mathbf{Q}}^{(2)}(s)\mathbf{w}_R^{(2)}(s) + \tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}^{(2)}(s)\mathbf{K}^{[1]}, \\ \mathbf{Q}_P^{(2)}(s) &= \tilde{\mathbf{Q}}^{(2)}(s)\mathbf{w}_P^{(2)}(s) + \tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}^{(2)}(s)\mathbf{K}^{[1]}. \end{aligned}$$

Для стержня 3 проводимо викладки, аналогічні таким для стержня 1. В результаті матимемо

$$\begin{aligned}
d\mathbf{w}^{(3)}(s) &= \mathbf{w}_M^{(3)}(s)d\mathbf{M}_B + \mathbf{w}_R^{(3)}(s)d\mathbf{R}_B, \\
d\mathbf{M}^{(3)}(s) &= \mathbf{M}_M^{(3)}(s)d\mathbf{M}_B + \mathbf{M}_R^{(3)}(s)d\mathbf{R}_B, \\
d\mathbf{Q}^{(3)}(s) &= \mathbf{Q}_M^{(3)}(s)d\mathbf{M}_B + \mathbf{Q}_R^{(3)}(s)d\mathbf{R}_B,
\end{aligned} \tag{6.70}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_M^{(3)}(s) &= \mathbf{A}^{(3)}(s)\tilde{\mathbf{E}}^{(3)}(0), \quad \mathbf{w}_R^{(3)}(s) = \mathbf{A}^{(3)}(s)\tilde{\mathbf{G}}^{(3)}(0) + \mathbf{S}^{(3)}(s), \\
\mathbf{M}_M^{(3)}(s) &= \tilde{\mathbf{M}}^{(3)}(s)\mathbf{w}_M^{(3)}(s), \quad \mathbf{M}_R^{(3)}(s) = \tilde{\mathbf{M}}^{(3)}(s)\mathbf{w}_R^{(3)}(s) + \tilde{\mathbf{M}}^{(3)}(s), \\
\mathbf{Q}_M^{(3)}(s) &= \tilde{\mathbf{Q}}^{(3)}(s)\mathbf{w}_M^{(3)}(s), \quad \mathbf{Q}_R^{(3)}(s) = \tilde{\mathbf{Q}}^{(3)}(s)\mathbf{w}_R^{(3)}(s) + \tilde{\mathbf{Q}}^{(3)}(s).
\end{aligned}$$

Запишемо рівняння рівноваги рами в глобальній системі координат

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B + d\mathbf{P}^{[1]} + d\mathbf{P}^{[2]} &= \mathbf{0}, \\
R_{A,3}l_2 + M_{A,1} + M_{B,1} + l_2dP_3^{[1]} &= 0, \\
M_{A,2} + M_{B,2} - dP_3^{[1]}l_1 - l_3dP_3^{[2]} &= 0, \\
-R_{A,1}l_2 + M_{A,3} + M_{B,3} - l_2dP_1^{[1]} - l_1dP_2^{[1]} - l_3dP_2^{[2]} &= 0.
\end{aligned}$$

Ці рівняння можна записати так:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^{(1,1)}d\mathbf{R}_A + \mathbf{H}^{(1,2)}d\mathbf{M}_A + \mathbf{H}^{(1,3)}d\mathbf{R}_B + \mathbf{H}^{(1,4)}d\mathbf{M}_B &= d\mathbf{J}^{(1)}, \\
\mathbf{H}^{(2,1)}d\mathbf{R}_A + \mathbf{H}^{(2,2)}d\mathbf{M}_A + \mathbf{H}^{(2,3)}d\mathbf{R}_B + \mathbf{H}^{(2,4)}d\mathbf{M}_B &= d\mathbf{J}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Тут

$$\mathbf{H}^{(1,1)} = \mathbf{I}, \mathbf{H}^{(1,2)} = \mathbf{0}, \mathbf{H}^{(1,3)} = \mathbf{I}, \mathbf{H}^{(1,4)} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{H}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}^{(2,2)} = \mathbf{I}, \mathbf{H}^{(2,3)} = \mathbf{0}, \mathbf{H}^{(2,4)} = \mathbf{I},$$

$$d\mathbf{J}^{(1)} = -d\mathbf{P}^{[1]} - d\mathbf{P}^{[2]}, d\mathbf{J}^{(2)} = \begin{bmatrix} -l_2dP_3^{[1]} \\ l_1dP_3^{[1]} + l_3dP_3^{[2]} \\ l_2dP_1^{[1]} + l_1dP_2^{[1]} + l_3dP_2^{[2]} \end{bmatrix}.$$

( $\mathbf{I}$  і  $\mathbf{0}$  – одинична і нульова матриці третього порядку).

Враховуючи напрямки осей  $x_j^{(2)}$  і  $x_j^{(3)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ), можна записати такі рівності:

$$\begin{aligned}
dw_1^{(2)}(l_2) &= dx_2^{(2)}(l_2) = dx_1^{(3)}(l_3) = dw_9^{(3)}(l_3), \\
dw_2^{(2)}(l_2) &= dx_3^{(2)}(l_2) = dx_3^{(3)}(l_3) = dw_2^{(3)}(l_3), \\
dw_3^{(2)}(l_2) &= (dx_2^{(2)})'(l_2) = d\phi^{(2)}(l_2) = d\phi^{(3)}(l_3) = (dx_2^{(3)})'(l_3) = dw_3^{(3)}(l_3), \\
dw_4^{(2)}(l_2) &= (dx_3^{(2)})'(l_2) = -d\psi^{(2)}(l_2) = -d\theta^{(3)}(l_3) = -dw_5^{(3)}(l_3), \\
dw_5^{(2)}(l_2) &= d\theta^{(2)}(l_2) = -d\psi^{(3)}(l_3) = (dx_3^{(1)})'(l_3) = dw_4^{(1)}(l_3), \\
dw_9^{(2)}(l_2) &= dx_1^{(2)}(l_2) = -dx_2^{(3)}(l_3) = -dw_1^{(3)}(l_3).
\end{aligned}$$

Ці рівності можна представити в наступному вигляді:

$$Ndw^{(2)}(l_2) = T^{[2]}dw^{(3)}(l_3). \quad (6.72)$$

Тут

$$T^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Скористаємося співвідношеннями (6.67) при  $s = l_2$  і (6.70) при  $s = l_3$

$$\begin{aligned}
dw^{(2)}(l_2) &= w_M^{(2)}(l_2)dM_A + w_R^{(2)}(l_2)dR_A + w_P^{(2)}(l_2)dP^{[1]}, \\
dw^{(3)}(l_3) &= w_M^{(3)}(l_3)dM_B + w_R^{(3)}(l_3)dR_B.
\end{aligned}$$

Тоді (6.72) запишеться так:

$$H^{(3,1)}dR_A + H^{(3,2)}dM_A + H^{(3,3)}dR_B + H^{(3,4)}dM_B = dJ^{(3)}, \quad (6.73)$$

де

$$\begin{aligned}
H^{(3,1)} &= Nw_R^{(2)}(l_2), \quad H^{(3,2)} = Nw_M^{(2)}(l_2), \quad H^{(3,3)} = -T^{[2]}w_R^{(3)}(l_3), \\
H^{(3,4)} &= -T^{[2]}w_M^{(3)}(l_3), \quad dJ^{(3)} = -Nw_P^{(2)}(l_2)dP^{[1]}.
\end{aligned}$$

Системи матричних рівнянь (6.71) і (6.73) можна записати у вигляді єдиного матричного рівняння

$$HdR = dJ, \quad (6.74)$$

якщо ввести матрицю  $H$  і вектори  $dR$  і  $dJ$  дванадцятого порядку наступним чином:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(1,1)} & \mathbf{H}^{(1,2)} & \mathbf{H}^{(1,3)} & \mathbf{H}^{(1,4)} \\ \mathbf{H}^{(2,1)} & \mathbf{H}^{(2,2)} & \mathbf{H}^{(2,3)} & \mathbf{H}^{(2,4)} \\ \mathbf{H}^{(3,1)} & \mathbf{H}^{(3,2)} & \mathbf{H}^{(3,3)} & \mathbf{H}^{(3,4)} \end{bmatrix}, d\mathbf{R} = \begin{bmatrix} d\mathbf{R}_A \\ d\mathbf{M}_A \\ d\mathbf{R}_B \\ d\mathbf{M}_B \end{bmatrix}, d\mathbf{J} = \begin{bmatrix} d\mathbf{J}^{(1)} \\ d\mathbf{J}^{(2)} \\ d\mathbf{J}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Вирішуючи рівняння (6.74), знаходимо вектор  $d\mathbf{R} = \mathbf{H}^{-1}d\mathbf{J}$ , тобто визначаємо прирости опорних реакцій  $d\mathbf{R}_A, d\mathbf{M}_A, d\mathbf{R}_B, d\mathbf{M}_B$ , що дозволяє за допомогою формул (6.59), (6.67) і (6.70) визначити прирости переміщень точок зігнутої осі стержнів рами на даному етапі розрахунку.

#### Приклад 6.4.

П-образна залізобетонна рама (рис. 6.11) знаходиться під дією двох постійних сил  $\mathbf{P}_1^{[1]}$  і  $\mathbf{P}_1^{[2]}$  (сили тяжіння двох вантажів  $M_1$  і  $M_2$ , розташованих у вузлах рами) і трьох змінних сил  $\mathbf{P}_2^{[1]}$ ,  $\mathbf{P}_3^{[1]}$  і  $\mathbf{P}_3^{[2]}$ , величини яких змінюються з течією часу в такий спосіб:

$$P_2^{[1]} = P_2^{[2]} = 10 \left( 1 + \sin 2\pi \frac{t - T_2/4}{T_2} \right) \kappa H, P_3^{[2]} = 10 \left( 1 + \sin 2\pi \frac{t - T_3/4}{T_3} \right) \kappa H$$

( $T_2 = 6c$ ,  $T_3 = 4c$ ). Маса вантажів  $m_1 = m_2 = 40 T$ . Довжини стержнів  $l_1 = l_3 = 12 м$ ,  $l_2 = 10 м$ , розміри поперечного перерізу  $h = 0,4 м$ ,  $b = 0,5 м$ . Характеристики бетону і армування стержнів такі ж, як і попередньому прикладі. Необхідно визначити рух вантажів.

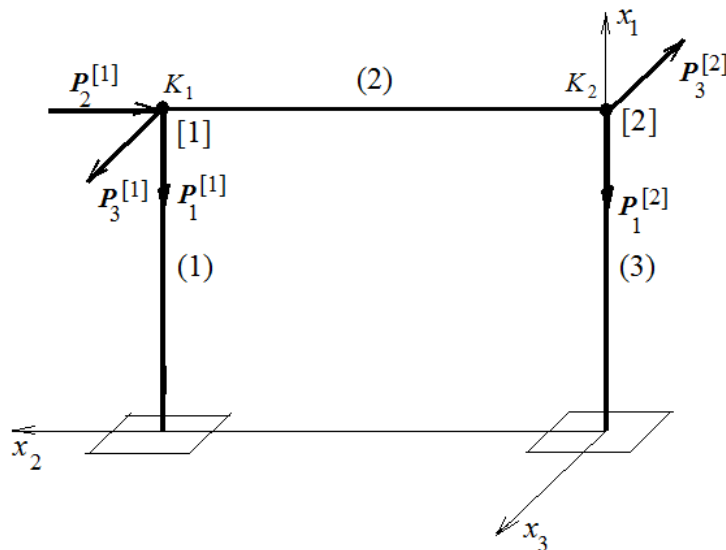


Рис. 6.11 Схема навантажень, що діють на конструкцію



Оскільки періоди зміни сил досить великі, рух рами можна вважати квазістатичним. В результаті використання алгоритму, наведеного вище, рівняння руху вантажів були визначені. На рис. 6.12 і 6.13 представлені графіки зміни координат  $x_2$  і  $x_3$  вантажів з течією часу (1 - для координати  $x_2$ , 2 - для  $x_3$ , переміщення в метрах, час в секундах).

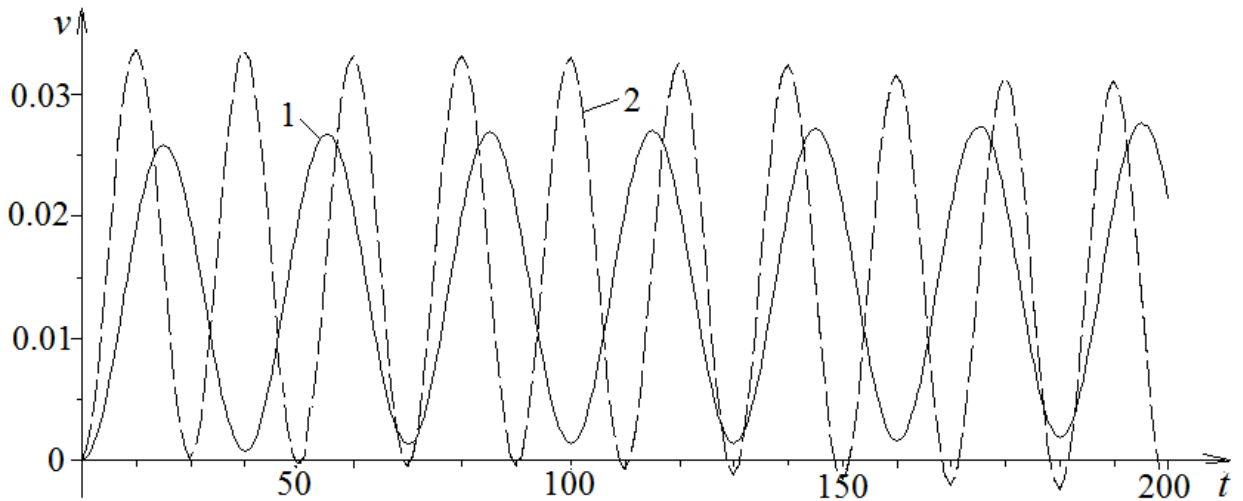


Рис. 6.12 Графіки, що визначають рух вантажу  $K_1$

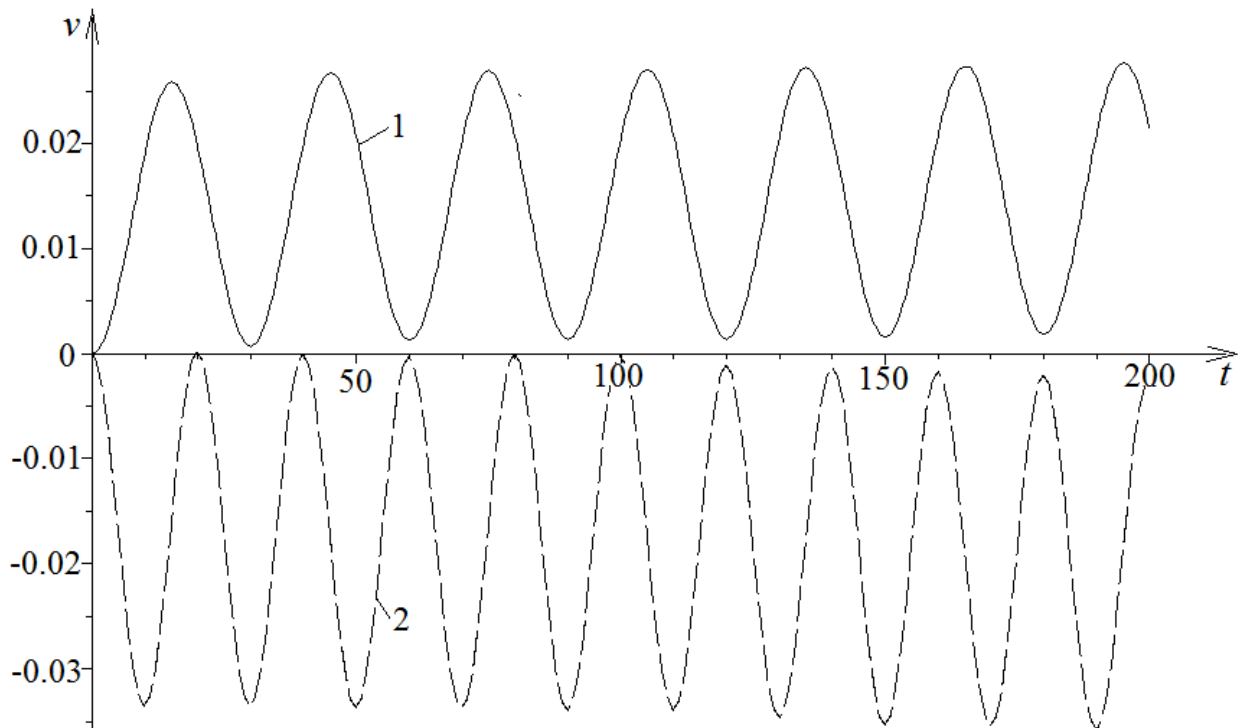


Рис. 6.13 Графіки, що визначають рух вантажу  $K_2$

У цьому параграфі проведено побудову алгоритму вирішення просторової нелінійної пружнопластичної квазістатичної задачі, заснованого на методі граничних елементів, для залізобетонної рами. Розглянуто конкретний приклад.

### 6.5 Дослідження просторової нелінійної пружнопластичної динамічної задачі для залізобетонної рами

На основі алгоритму, викладеного в п. 6.3, проводиться рішення наступної динамічної задачі для рами, зображеної на рис. 6.9. В деякий момент часу на вантаж  $K_1$  впливає горизонтальний ударний синусоїдальний імпульс  $I$  (рис. 6.14), складові якого  $I_2$  і  $I_3$ , кі паралельні осям  $x_2$  і  $x_3$ ,

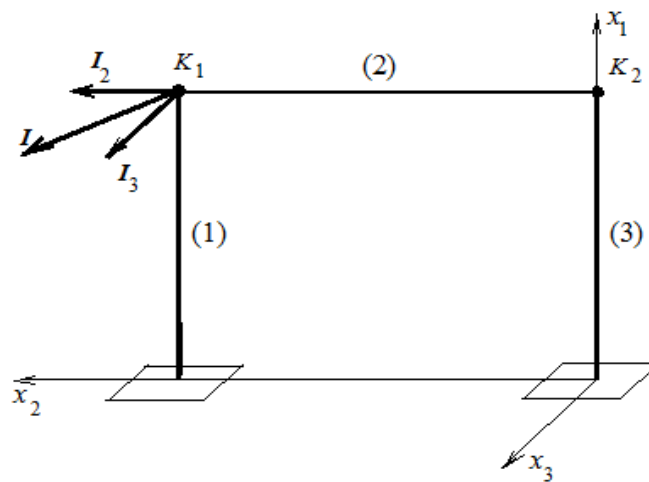


Рис. 6.14 Вплив ударного імпульсу

представлені на рис. 6.15 (величина впливу в кілоньютонах, час — в секундах). Необхідно визначити коливання рами.

Використовуючи алгоритм, викладений в п. 6.2, на кожному кроці при покроковому методі рішення будується матриця,  $j$ -м стовпцем якої є сукупність приростів переміщень уздовж осей  $x_2$  і  $x_3$  точок  $K_1$  і  $K_2$ , викликаних навантаженням рами з номером  $j$ , що складається з приростів навантажень  $\Delta F_k^{(j)}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) ( $\Delta F_1^{(j)}$  прикладено до точки  $K_1$  і

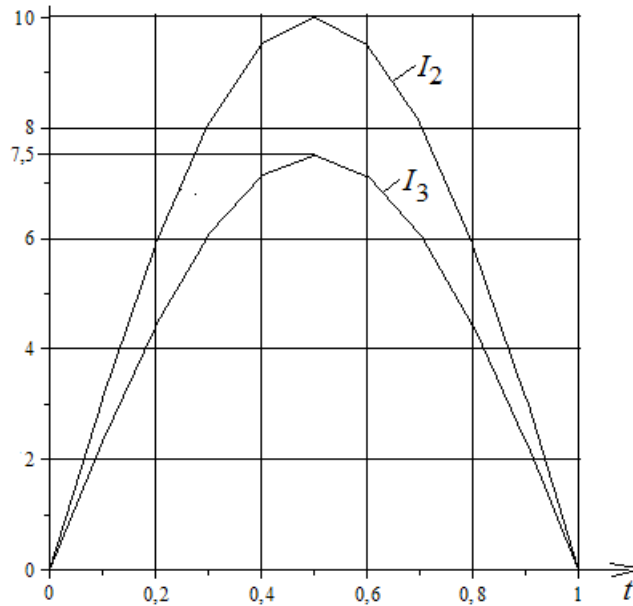


Рис. 6.15 Графіки складових мпульса

направлено вздовж осі  $x_2$ ,  $\Delta F_2^{(j)}$  прикладено до точки  $K_1$  і направлено вздовж осі  $x_3$ ,  $\Delta F_3^{(j)}$  прикладено до точки  $K_2$  і направлено вздовж осі  $x_2$ , а  $\Delta F_4^{(j)}$  також прикладено до точки  $K_2$  і направлено вздовж осі  $x_3$ ). При цьому  $\Delta F_j^{(j)} = 1$ , а  $\Delta F_k^{(j)} = 0$  при  $k \neq j$ .

Таким чином проводиться побудова матриці коефіцієнтів впливу. Для цього використовується алгоритм, докладно описаний в п. 6.5.

З формул (6.44), (6.43) і (6.42) визначаються прирости переміщень  $\hat{\Delta v}$  і  $\hat{\Delta a}$  точок  $K_1$  і  $K_2$  на розширеному часовому кроці, а потім з формул (6.45) визначаються прирости прискорень  $\Delta a$ , швидкостей  $\Delta V$  і переміщень  $\Delta v$  цих точок на реальному кроці. Завершується крок обчисленням нових значень прискорень, швидкостей і переміщень вантажів:

$$a_{\text{нов}} = a + \Delta a, V_{\text{нов}} = V + \Delta V, v_{\text{нов}} = v + \Delta v .$$

Для визначення приростів напружень і деформацій в елементах конструкцій використовується алгоритм параграфу 6.2 при заміні приростів нагрівки  $\Delta F_k$  ( $k = 1,2,3,4$ ), прикладеної до вантажів, на  $\Delta F_k^{(j)} - m\Delta a_k$  ( $k = 1,2,3,4$ ), тобто з урахуванням сил інерції вантажів, що виникають в процесі коливань.

На рис. 6.16 і 6.17 представлена зміна координат  $x_2$  і  $x_3$  вантажів  $K_1$  і  $K_2$  при коливаннях, викликаних імпульсним впливом на вантаж  $K_1$  (1 — координати  $x_2$ , 2 — координати  $x_3$ ). Параметри конструкції і матеріалів ті ж, що і в прикладі 6.4. Помітна наявність пластичних деформацій.

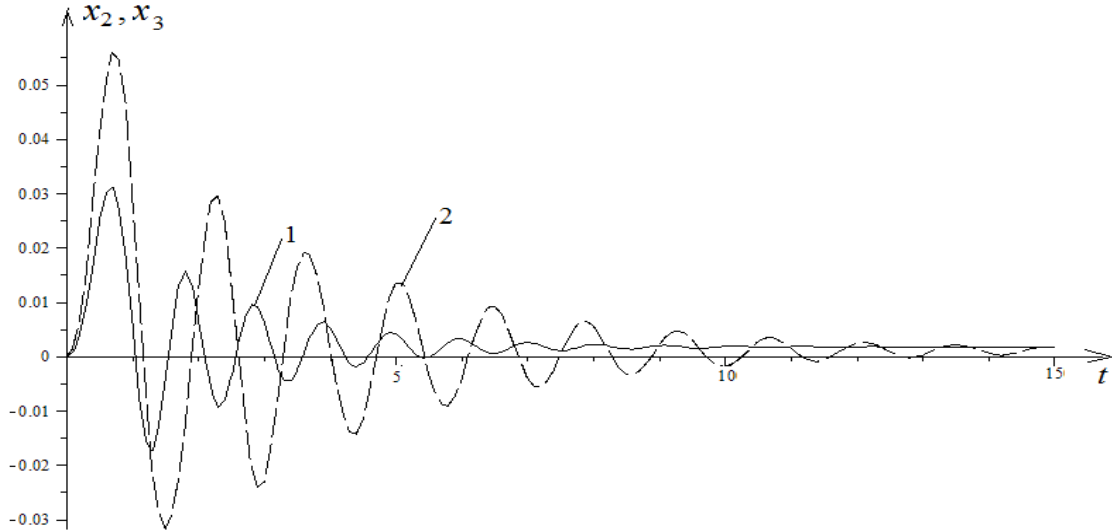


Рис. 6.16 Зміна координат вантажу  $K_1$  при імпульсному впливі

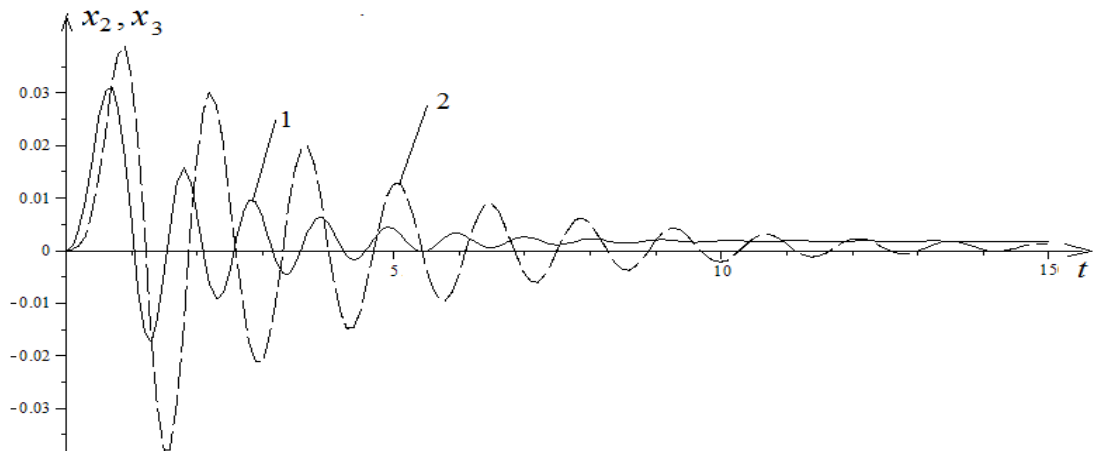


Рис. 6.17 Зміна координат вантажу  $K_2$  при імпульсному впливі

Отже, у цьому параграфі виложена побудова алгоритму вирішення просторової нелінійної пружнопластичної динамічної задачі, заснованого на методі граничних елементів, для залізобетонної рами, що являється моделлю каркасної споруди.

Зміст даного розділу опубліковано в роботах [245-253,289,290].

## 6.6 Висновки за розділом 6

1. Запропоновано метод побудови системи диференціальних рівнянь нелінійного пружнопластичного просторового згину залізобетонної балки при складному навантаженні на основі асоційованого закону пластичної течії.

2. На основі диференціальних рівнянь просторового згину побудований варіант методу граничних елементів для вирішення просторових нелінійних пружнопластичних квазістатичних і динамічних задач для залізобетонних каркасних будівель.

3. Досліджено квазістатичний просторовий згин одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей бетону при дії декількох змінних сил, що мають різні напрямки в просторі.

4. Досліджена нелінійна просторова пружнопластична динамічна задача для одновимірної моделі залізобетонної каркасної будівлі.

5. Проведено дослідження просторової динамічної задачі для залізобетонної рами з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей бетону, що знаходиться під дією системи сил, що мають різні напрямки в просторі.

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В роботі вирішена науково-прикладна проблема розробки прямих динамічних методів розрахунку залізобетонних каркасних будинків і споруд, що враховують нелінійні і пластичні властивості матеріалів без використання методу скінчених елементів.

На основі виконаних досліджень сформульовано такі висновки:

1. Розроблено метод розв'язання квазістатичних і динамічних задач плоского вигину одновимірних моделей залізобетонних каркасних споруд на основі методу малого параметра при діапазоні навантажень, що забезпечує малу нелінійність залежності між напруженнями і деформаціями.

2. Метод був модифікований для вирішення динамічних задач з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей бетону для випадків вказаної великої нелінійності шляхом розбиття процесу згину на ряд етапів, в межах кожного з яких ця нелінійність виявляється малою. Побудовано диференціальні рівняння першого та другого наближень для кожного з етапів згину. На основі запропонованого методу розв'язано динамічна задача для одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при сейсмічній дії. Проведено дослідження вільних коливань одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при великих початкових прогинах. Досліджено динаміку одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди при сейсмічних впливах великої амплітуди.

3. Побуловано диференціальне рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням її геометричної нелінійності та фізичної нелінійності і пластичності матеріалів при складному навантаженні, виходячи з асоційованого закону пластичної течії для покрокового розв'язку задач динаміки залізобетонних балок і рам.

4. На основі диференціального рівняння розроблено варіант методу граничних елементів для вирішення нелінійних квазістатичних і динамічних розрахунків залізобетонних балок і рам. Виявлено явище динамічної нестійкості і параметричного резонансу (розгойдування поперечних коливань при певних

частотах зміни поздовжніх сил). Показано, що параметричний резонанс є більш небезпечним явищем, ніж звичайний резонанс.

5. Побудовано варіант методу граничних елементів для дослідження нелінійної динаміки плоских моделей багатопрольотних багатоповерхових каркасних будівель. За допомогою цього алгоритму вирішено ряд динамічних задач для таких споруд при дії на них гармонійних сил, ударних і сейсмічних впливів.

6. Побудовані диференціальні рівняння нелінійного пружнопластичного просторового згину залізобетонної балки при складному навантаженні на основі асоційованого закону пластичної течії.

7. Розроблено варіант методу граничних елементів для розв'язку просторових нелінійних квазістатичних і динамічних задач для залізобетонних каркасних будівель. Досліджено коливання одновимірної моделі залізобетонної каркасної споруди з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей матеріалів при дії декількох змінних сил, що мають різні напрямки в просторі. Проведено дослідження просторової динамічної задачі для залізобетонної рами з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей матеріалів, що знаходиться під дією просторової системи змінних сил.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Айзенберг Я.М. Сейсмические и сейсмозрывные воздействия на сооружения с изменяющимися в результате повреждений динамическими характеристиками/ Я.М. Айзенберг // Сейсмостойкость зданий и сооружений. М.:, 1967. – С. 109-119.
2. Айзенберг Я.М. Некоторые уроки землетрясения в Армении 7 декабря 1988 г. / Я.М. Айзенберг // Строительство и архитектура. Сер. Сейсмостойкое строительство. Экспресс информация. – М.: 1992. - Вып. 2. - С. 2-7.
3. Айзенберг Я. М. Два разрушительных землетрясения в Турции за три месяца 1999 года / Я. М. Айзенберг // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений – М.: 2000. - № 1. - С. 54-57.
4. Айзенберг Я. М. Некоторые актуальные проблемы сейсмической безопасности в России и СНГ // Будівельні конструкції, вип.60. Міжвідом. наук.-техн. збірник. Будівництво в сейсмічних районах України. Зб. наук. праць / Я.М. Айзенберг – Київ : 2004. - С. 28-33.
5. Айзенберг Я.М. Строительная наука против сейсмических катастроф. – В кн.: Российская архитектурно-строительная энциклопедия, том X: Безопасность строительства, надежность зданий и сооружений / Я.М. Айзенберг – М. : ФГУП «ВНИИТПИ», 2005, С. 108-114.
6. Айзенберг Я.М. Уроки последних разрушительных землетрясений. Совершенствование антисейсмического проектирования и строительства / Я.М. Айзенберг – М. : ВНИИТПИ. - 2000 - 110 с.
7. Айзенберг Я.М. Сооружения с выключающими связями для сейсмических районов / Я.М. Айзенберг - М.: Стройиздат, 1976. - 229 с.
8. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления / Л.Д. Акуленко – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.–368 с.
9. Андрианов И.В. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин/ И.В. Андрианов, В.В. Данишевский, А.О. Иванков – Дніпропетровськ: ПДАБА, 2010. – 216 с.



10. Андрианов И.В. Асимптотические методы и физические теории / И.В. Андрианов, Л.И. Маневич. – М.: Знание, 1989. – 64 с.
11. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин – М.: Физматгиз, 1959.
12. Арнольд К. Архитектурное проектирование сейсмостойких зданий / К. Арнольд, Р. Рейтерман – М.: Стройиздат, 1987. – 192 с.
13. Бабич В.М. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В.М. Бабич, В.С. Булдырев.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972.– 456 с.
14. Баженов В.А. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов / В.А. Баженов, В.Ф. Оробей, А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец – Одесса: Астропринт, 2001. – 285 с.
15. Бамбура А.Н. К построению деформационной теории железобетона стержневых систем на экспериментальной основе / А. Н. Бамбура, А. Б. Гурковский // Буд. конструкції. Міжвідомчий науково-технічний збірник. - 2003. - Вип. 59. – С. 121-130.
16. Бамбура А.М. Экспериментальні основи прикладної деформаційної теорії залізобетону: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. техн. наук: спец. 05.23.01 / А.М. Бамбура. – Х., 2006. – 39 с.
17. Барштейн М.Ф. Динамический расчет высоких сооружений на действие ветра / М.Ф. Барштейн // Справочник про динамике сооружений. — М.: Стройиздат, 1972. — С. 286-321.
18. Барштейн М.Ф. Крановые нагрузки / М. Ф. Барштейн, А.Н. Зубков // Расчет сооружений на специальные воздействия. Справочник проектировщика. — М.: Стройиздат, 1981. — С. 102-106.
19. Бенерджи П.К. Метод граничных элементов в прикладных науках / П.К. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
20. Бенин А.В. О приближенном учете нелинейного деформирования материала при использовании спектрального метода оценки

сейсмостойкости / А.В. Бенин, О. Д. Тананайко // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. - 2003. - №1. - С. 31-33.

21. Бирбраер А.Н. Экстремальные воздействия на сооружения / А. Н. Бирбраер, А.Ю. Роледер — Спб.: Изд-во Политехн. ун-та. — 2009. — 594 с.

22. Бирбраер А.Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость / А. Н. Бирбраер. - СПб. : Наука, 1998. - 255 с.

23. Блехман И.И. Прикладная математика: предмет логика, особенности подходов/ И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко – Киев: Наукова думка, 1976. – 270 с.

24. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский - М.: Наука, - 1981.-918 с.

25. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / В.В. Болотин — М.: Гостехтеориздат. — 1956. — 600 с.

26. Болотин В.В. Исследование поведения зданий и сооружений со снижением жесткости при сейсмических воздействиях / В. В. Болотин, В. П. Радин, В.П. Чирков // Изв. вузов. Строительство. - 2003. - №7. - С. 6-10.

27. Большаков В.И. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры/ В.И. Большаков, И.В. Андрианов, В.В. Данишевский – Днепропетровск: «Пороги», 2008. – 196 с.

28. Бондаренко В.М. Инженерные методы нелинейной теории лзобтон/ В.М. Бондаренко, С.В. Бондаренко – М.: Стройиздат, 1982. – 135 с.

29. Борджерс Дж. Проектирование железобетонных конструкций для сейсмических районов / Дж. Борджерс, А. Равара – М. : Стройиздат, 1978. – 135 с.

30. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский – М.: Наука, 1973. – 320 с.

31. Бреббиа К. Метод граничных элементов / К. Бреббиа, Д. Телес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

32. Бреббиа К. Применение метода граничных элементов в технике / К. Бреббиа, С. Уокер. – М.: Мир, 1982. – 248 с.

33. Бушуев С.В. Нелинейный статический метод анализа сейсмостойкости зданий и сооружений / С.В. Бушуев, Г.А. Джинчвелашвили, А.В. Колесников // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2016. №5.
34. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1967.– 311 с.
35. Ватуля Г.Л. Работа сталебетонных перекрытий разного очертания при силовом воздействии / Г.Л. Ватуля, А.А. Шевченко// Модернизация и научные исследования в транспортном комплексе, – Вип. 3. – С.79-86.
36. Газлийское землетрясение 1976 г.: Инженерный анализ последствий / Отв. редакторы: С.В. Поляков, А. И. Мартемьянов, Л. Ш. Килимник, А.М. Жаров – М. : Наука, 1982. – 196 с.
37. Газлийское землетрясение 1984 г.: Анализ поведения зданий и инженерных сооружений / Отв. редакторы: А. И. Мартемьянов, Д. А. Алексеенков, Л. Ш. Килимник. – М. : Наука, 1988. – 118 с.
38. Гвоздев А.А. К расчету конструкций на действие взрывной волны // Строительная промышленность. 1943. № 1-2.
39. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия/ А.А. Гвоздев - М.: Стройиздат, 1949. - 280 с.
40. Гвоздев А.А. Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций / А.А. Гвоздев, С.А. Дмитриев и др. — М.: Стройиздат, 1978. — 308 с.
41. Гениев Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин – М: Стройиздат, 1974. – 316 с.
42. Генки Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжениях / Г. Генки // Сб. «Теория пластичности». – М.: Иностранная литература, 1948. – С. 114–135.

43. Годзиковская А.А. Некоторые характеристики Спитакского землетрясения / А. А. Годзиковская // Вихри в геологических процессах. – Петропавловск-Камчатский. 2004.– С. 253-256.
44. Гольденблат И.И. Модели сейсмостойкости сооружений / И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко, С.В. Поляков и др. — М.: Наука, 1979. - 252 с.
45. Гольденблат И.И. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил / И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко — М.: Стройиздат, 1961 — 320 с.
46. Горик А.В. Определение упругопластического коэффициента ударного взаимодействия сферического индентора с деформируемым полупространством / А.В. Горик, С.Б. Ковальчук, Г.А. Шулянский// Восточно-европейский журнал передовых технологий, 2013. – Вып. 1 (7(61)).
47. Горик О.В. Розрахунок статично невизначених композитних балок з ускладненими умовами деформування / О.В. Горик, С.Б. Ковальчук // Вісник Національного транспортного університету. – 2010. – С.314-319.
48. Городецкий А.С. Прямой динамический расчет зданий на сейсмические воздействия с учетом физически нелинейной работы материала конструкций / А. С. Городецкий, Ю. Д. Гераймович // Будівельні конструкції, 2006, випуск 64, с. 80-87.
49. Городецкий А.С. Методы оценки работоспособности конструкций при динамических воздействиях / Ю. Д. Гераймович, А. С. Городецкий, В.С. Шмуклер // Науковий вісник будівництва, 2007, вип. 43, Харків, ХДТУБА, С. 62-71.
50. Государственные нормы ДБН В.1.1-12:2006 «Строительство в сейсмических районах Украины» и задачи обеспечения сейсмобезопасности зданий и сооружений / [Ю.И. Немчинов, А.К. Хавкин, Н.Г. Марьенков, Ю.И. Калюх, А.Н. Бамбура, К.В. Егупов, Л.А. Жарко, А.Б. Гурковский, Г.В. Шарапов, Я.И. Червинский, Н.Н. Сорока, В.С. Кукунаев] / Наукотехнічний журнал «Світ ГЕОТЕХНІКИ».- 2008.- № 3.- С. 4-11.

51. Гришин А.В. Нелинейные колебания ограждающего сооружения смешанного типа от волнового воздействия / А.В. Гришин – Вісник Одеського національного морського університету. – Одеса: Издательство ОГМУ, 2002. – Вып. 9. – С. 108-117.

52. Гришин А.В. Нелинейные динамические задачи расчета портовых гидротехнических сооружений / А. В. Гришин, Е. Ю. Федорова – Одеса: Издательство ОГМУ, 2002. – 125 с.

53. Гришин А.В. Нелинейная динамика ограждающих сооружений / А. В. Гришин, Е. Ю. Федорова – Одеса: Издательство ОНМУ, 2002. – 240 с.

54. Гришин А.В. Динамический расчет берегозащитных сооружений водохранилищ от волнового воздействия / А.В. Гришин // Вісник українського державного університету водного господарства та природокористування: Зб. наук. пр.– Рівне, 2002.– Вып. 5, частина 5.– С. 44-50.

55. Гришин А.В. Совместный расчет угловой подпорной стенки и грунтовой среды от кинематического возбуждения/ А.В. Гришин, Б.В. Савчинский // Вісник Дніпропетровського національного залізничного транспорту імені акад. В. Лазаряна. – Дніпропетровськ, 2003. – Вып. 1.– С. 62-65.

56. Гришин А.В. Напряженно-деформированное состояние железобетонного причального сооружения и грунтовой среды при динамическом нагружении / А.В. Гришин // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. – М.:, 2015 – Вып. №6. – С. 29-33.

57. Гришин А.В. Математическое моделирование крепления откосов котлованов. / А.В. Гришин, А.А. Сипливец // Сборник докладов «Механика разрушения бетона, железобетона и других строительных материалов». Санкт-Петербург, 2015. – С. 23-32.

58. Гришин А.В., Гришин В.А., Сипливец А.А. Крепление откосов котлованов//Вісник ОНМУ. – Одеса: ОНМУ, 2015. – Вып. 1(40). – С. 61-71.

59. Дащенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов – Одесса: ВМВ, 2010. – В 2-х томах. – Т.1.– 416 с. – Т.2. – 512 с.
60. ДБН В.1.1-12:2006. Будівництво в сейсмічних районах України. – Київ : Мінбудархітектури, 2006. - 84 с.
61. ДБН В.2.2-24:2009. Проектування висотних житлових і громадських будівель. – Київ : Мінрегіонбуд України, 2009. – 115 с.
62. Денисов Б.Е. Расчет зданий и сооружений на сейсмические воздействия / Б.Е. Денисов, Л.Ш. Килимник, Л.И. Николаенко, С.В. Поляков // Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. Справочник проектировщика. – М.: Стройиздат, 1981. – С. 41-79.
63. Дроздов П.Ф. Конструирование и расчет несущих систем многоэтажных зданий и их элементов / П. Ф. Дроздов. - 2-е изд. перераб. и доп. - М. : Стройиздат, 1977. -223 с.
64. Евсеев С.В. Землетрясения Украины / С. В. Евсеев. – К. : АН УССР, 1961. – 78 с.
65. Евсеев С.В. Интенсивность землетрясений Украины / С. В. Евсеев // Сейсмичность Украины. – К. : Наукова думка. 1969. - С. 32-55.
66. Егупов В.К. Расчет зданий на прочность, устойчивость и колебания / В.К. Егупов – Киев : Будівельник, 1965. – 256 с.
67. Егупов В.К. Пространственные расчеты зданий (пособие по проектированию) / В. К. Егупов, Т. А. Командрина, В. Н. Голобородько – Киев : Будівельник, 1976. – 264 с.
68. Егупов В.К. Практические методы расчета зданий на сейсмостойкость / В. К. Егупов, К. В. Егупов, Э. П. Лукаш – Киев : Будівельник, 1982. – 144 с.
69. Егупов К.В. Расчеты пространственных систем большой размерности / К. В. Егупов, В. И. Стародуб // Тезисы докладов Городского семинара “Применение вычислительной техники и математического

моделирования в прикладных научных исследованиях”. – Одесса, ОГПУ, 1994. - С. 35-36.

70. Егунов К.В. Влияние конструктивных особенностей зданий на определение сейсмических нагрузок / К.В. Егунов // Одесса , Вестник ОГАСА -2002.- вып.8. С. 48-58.

71. Егунов К.В. Комплексная оценка уязвимости железобетонных зданий при сейсмических воздействиях / К.В. Егунов, Ю.И. Немчинов // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Будівельні конструкції.- К.:НДІБК.- 2011.- вып.74. - С. 89-99.

72. Егунов К.В. Обобщенный вариационный метод для расчета многоэтажных каркасных зданий / К.В. Егунов // Одесса , Вестник ОГАСА - 2012.- вып.45. С. 335-348.

73. Егунов К.В. Пространственный расчет зданий и сооружений по комплексной схеме / К. В. Егунов. // Комплексный расчет зданий и сооружений с применением ЭВМ. – Одесса : ОГАСА, 2012. – 374 с.

74. Жунусов Т.Ж. Основы сейсмостойкости сооружений / Т. Ж. Жунусов – Алма-Ата : Рауан, 1990. – 270 с.

75. Жунусов Т.Ж. Сейсмостойкость каркасных железобетонных зданий / Т. Ж. Жунусов, В. А. Лапин – Алма-Ата : Рауан, 1988. – 150 с.

76. Завриев К.С. Расчет инженерных сооружений на сейсмостойкость / К.С. Завриев – Известия Тифлисского государственного политехнического института, 1928. – 124 с.

77. Завриев К.С. Сейсмостойкость сооружений / К.С. Завриев, Г.Ш. Напетваридзе, Г.Н. Карцивадзе и др. - Тбилиси: Мецниереба, 1980 - 325 с.

78. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич – М.: Мир, 1975. – 544 с.

79. Ивлев Д.Д Теория упрочняющегося пластического тела / Д.Д. Ивлев, Г.И. Быковцев – М.: Наука, 1971. – 231 с.

80. Ивлев Д.Д., Метод возмущений в теории упругопластического тела/ Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов – М.: Наука, 1978. – 207 с.

81. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред в 2т. / Д.Д. Ивлев – М.: Физматлит, 2002. – 448 с.
82. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней / А.А. Илюхин – Киев: Наукова думка, 1979. – 216 с.
83. Ильичев В.А. Динамическое взаимодействие сооружений с основанием и передача колебаний через грунт (промышленная сейсмика) / В.А. Ильичев // Справочник про динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1981. – С. 114-128.
84. Ильичев В.А. Расчет параметров колебаний грунта и зданий, вызываемых движением поездов метрополитена/ В.А. Ильичев // Справочник про динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1981. – С. 136-143.
85. Ильюшин А.А. Пластичность. / А.А. Ильюшин – М: Издательство АН СССР, 1963. – 271 с.
86. Инженерный анализ последствий Спитакского землетрясения 7.12.1988 г. / [В. А. Ржевский, И. Ф. Ципенюк, Х. А. Асамов и др.] // Архитектура и строительство Узбекистана. – 1989. - № 12. - С. 7-12.
87. Ицков И.Е. Последствия разрушительного землетрясения в Турции 17 августа 1999 г. / И. Е. Ицков // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2001. - № 1. - С. 49-53.
88. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона / Н.И. Карпенко – М: Стройиздат, 1996.– 416 с.
89. Карпюк В.М. Особливості напружено-деформованого стану і розрахунку залізобетонних конструкцій за дії циклічного навантаження високих рівнів / В.М. Карпюк, Ю.А. Сьоміна, А.І. Костюк, О.Ф.Майстренко – Одеса: Одаба, 2018.– 237 с.
90. Килимник Л.Ш. Предварительные результаты анализа последствий землетрясений в Северном Таджикистане и Южной Киргизии 31 января 1977 г. / Л.Ш. Килимник, А.М. Жаров //Сейсмостойкое строительство: Реф. сб./ЦИНИС. Сер. 14. - 1977. - Вып. 4. - С.16-18.



91. Килимник Л.Ш. Методы целенаправленного проектирования в сейсмостойком строительстве / Л.Ш. Килимник – М.: Наука, 1980. – 155 с.
92. Килимник Л.Ш. Повреждения конструкций при сильных землетрясениях / Л.Ш. Килимник // Бетон и железобетон. – 1979. – №6. – С. 11-13.
93. Клаф Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен; пер. с англ. – М. : Стройиздат, 1979. – 320 с. – (Перевод изд.: Dynamics of Structures/ Ray W. Clough, Joseph Penzien. – New York, 1975).
94. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейной механике грунтов и бетонов / С.Ф. Клованич // Строительные конструкции: межвед. н.-т. сб.: вып. 61.: т.1- Киев: НИИСК, 2004. - С. 123-141.
95. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных расчетах железобетонных конструкций / С.Ф.Клованич., Д.И. Безушко. – Одесса: Издательство ОНМУ, 2009. – 89 с.
96. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / С.Ф. Клованич. / Библиотека журнала «Світ геотехніки», вып. 9. – Запорожье: ООО ИПО «Запорожье», 2009. – 400 с.
97. Клячко М.А. Землетрясение и МЫ / М. А. Клячко – Санкт-Петербург : РИФ «Интеграф», 1999. – 236 с.
98. Князева В.С. Архивные материалы по макросейсмическому обследованию Крымского землетрясения 11 сентября 1927 г./ В. С. Князева // Сейсмологический бюллетень Украины за 1997 г.. ИГ НАНУ – Симферополь : 1999. - С. 88-100.
99. Ковров А.В. Напряженно – деформированное состояние железобетонных пространственных рамных конструкций / А.В. Ковров, А.М. Кушнир, А.В. Ковтуненко, Н.К. Высочан – Одесса: ОГАСА, 2015. – 216 с.
100. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упругопластических сред / Койтер В.Т. – М.: Изд. ин. лит., 1961. – 79 с.
101. Корчинский И.Л. Сейсмостойкость зданий и инженерных сооружений/ И.Л. Корчинский – М.: Изд-во литературы по строительству, 1967. – 320 с.

102. Колчунов В.И. Метод определения жесткостных характеристик железобетонных конструкций при сейсмических воздействиях / В. И. Колчунов, Н. Г. Марьянков // Будівництво України. - 2008, №3, С. 24-29.

103. Королев В.А. Новые макросейсмические данные по Крымскому землетрясению 11 сентября 1927 года. // Проблемы сейсмобезопасности Крыма. Крымское отделение НАН Украины, КЭС ОСОПЗ при правительстве Республики Крым / В. А. Королев, А. М. Скляр, В. С. Князева – Севастополь, 1995. - С. 30-33.

104. Костюк О.П. Макросейсмический эффект от Карпатского землетрясения 4.ІІІ.1977 г. на территории Украины. // Карпатское землетрясение 4 марта 1977 г. и его последствия / О. П. Костюк, Р. С. Пронишин, Т. С. Карпив – М. : Наука, 1980. - С. 178-183.

105. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул – М.: Мир, 1972.– 276 с.

106. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / Крауч С. , Старфилд А. – М.: Мир, 1987. – 328 с.

107. Круглов В.М. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии // В.М. Круглов // Известия вузов. Строительство и архитектура, 1985, №11, С. 1-5.

108. Крутий Ю.С., Сурьянинов Н.Г. Фундаментальные решения приведенного уравнения параметрических колебаний/ Ю.С. Крутий, Н.Г. Сурьянинов // Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту. – 2017. – Вип. 167. – С. 17–24.

109. Крутий Ю.С., Васильев А.Б. Точное решение общего уравнения Матье/ Ю.С. Крутий, А.Б. Васильев // Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference: Abstract of Conf. reports, Kyiv, Ukraine, 24–26 May, National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics [etal.] – Київ, ДП Інформ.-аналіт. агентство, 2017. – С. 55 (Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка)

110. Крылов А.Н. Избранные труды / А.Н. Крылов – М. – Л.: АН СССР, 1958. – 804 с.
111. Крылов Н.М. Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов – К.: Изд-во АН УССР, – 1937.
112. Кулыгин Ю.С. Рекомендации по назначению коэффициентов условий работы при расчете несущей способности железобетонных элементов на сейсмические воздействия / Ю. С. Кулыгин, Г. В. Мамаева // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2005, № 3, С. 40-44.
113. Кулябко В.В. Динамика конструкций, зданий и сооружений.- Часть 1. Статико-динамические модели для анализа свободных колебаний и взаимодействия сооружений с основаниями и подвижными нагрузками. навчальний посібник / В. В. Кулябко – Запоріжжя: 2005.-232с.
114. Курбацкий Е.Н. Спектры максимальных реакций (откликов) конструкций на сейсмические и техногенные динамические воздействия/ Е.Н. Курбацкий, Л.В. Баев // Праці IV научно-практичного семінара «Надежность и безопасность зданий и сооружений при сейсмических воздействиях», 2 листопаду 2011 г. – М.: МГСУ, 2011.– С. 4-35.
115. Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости / М. Леви // Сб. «Теория пластичности». – М.: Иностранная литература, 1948. – С. 20-23.
116. Лужин О.В. Расчет конструкций сооружений на действие взрывных волн // О.В. Лужин, Н.Н. Попов, Б.С. Расторгуев // Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. Справочник проектировщика. – М.: Стройиздат, 1981. – С. 5-28.
117. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин – М: Машиностроение, 1975. – 400 с.
118. Марджанишвили М.А. Современные сейсмостойкие здания и методы расчета / М.А. Марджанишвили, Л.М. Марджанишвили, Ш.М. Марджанишвили -Тбилиси: Изд-во Тбилисского гос. ун-та, 2002.-332 с.

119. Марьенков Н. Г. Оценка влияния демпфирования подсистем на сейсмическую реакцию сооружений / [ Н. Г. Марьенков, А. К. Хавкин, В.Г. Поклонский и др.] // Будівельні конструкції – К.:НДІБК, 2004, випуск 60. – С. 224-230.

120. Марьенков Н.Г. Нелинейный расчет зданий на сейсмические воздействия с применением ПК «ЛИРА» / Н. Г. Марьенков, В. П. Максименко, К. Н. Бабик // Будівельні конструкції. - 2006. - Вип. 64. - С. 188-195.

121. Марьенков Н. Г. К расчету периодов и форм собственных колебаний зданий с распределенными параметрами (с учетом изгибной и сдвиговой жесткости, массы и ее момента инерции) / Н. Г. Марьенков // Современные проблемы строительства.- Донецк: ПромстройНИИпроект.- 2009.-№ 7(12).-С.123-130.

122. Марьенков Н.Г. Сейсмическая реакция зданий и сооружений при воздействиях основного землетрясения и афтершоков с учетом основания и повреждений конструкций / Н. Г. Марьенков // Будівельні конструкції – К.: НДІБК, 2011, випуск 75– С. 285-303.

123. Марьенков Н.Г. Сейсмическая нелинейная реакция фрагмента трехэтажного железобетонного каркасного здания / Н.Г. Марьенков, К.Н. Бабик, О.Г. Недзведская и др. // Будівельні конструкції, вип.73. Міжвідом. наук.-техн. збірник. Будівництво в сейсмічних районах України. Зб. наук. праць. – Київ : 2011. - С. 128 - 139.

124. Марьенков Н. Г. Оценка влияния основания, сейсмоизоляции, гасителей колебаний на нелинейные перемещения зданий при землетрясениях / Н. Г. Марьенков // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури – Одеса:Зовнішпрекламсервіс, 2012, випуск № 47, частина 2– С. 215-224.

125. Марьенков Н.Г. Экспериментально-теоретические оценки сейсмостойкости зданий / Н.Г. Марьенков Дисс. на соискание ученой степени доктора техн. наук. – Киев: НИИСК, 2013. – 352 с.

126. Асимптотические методы и теория возмущений / В.П. Маслов.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,1988.–312 с.
127. Международные строительные нормы СНГ. Строительство в сейсмических районах (Проект) 2002 г. / [Я. М. Айзенберг, Э. Е. Хачиян, Г. К. Габричидзе и др.] // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2002. - № 3. - С. 27-54.
128. Методика ідентифікації потенційно небезпечних об'єктів. Затверджено наказом Міністерства України з питань надзвичайних ситуацій та у справах захисту населення від наслідків Чорнобильської катастрофи від 23 лютого 2006 р. № 98 Зареєстровано в Міністерстві юстиції України 20 березня 2006 р. за № 286/12160.
129. Методические рекомендации по инженерному анализу последствий землетрясений / ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко . Отв. ред. С. В. Поляков, Л. Ш. Килимник: Москва, 1980. – 78 с.
130. Методические рекомендации по уточненному расчету железобетонных элементов с учетом полной диаграммы сжатия бетона / [В. Я. Бачинский, А. Н. Бамбура, Н. В. Журавлева, И. Н. Пешкова] – К. : НИИСК, 1987. – 24 с.
131. Мизес Р. Механика твердых тел в пластически деформированном состоянии / Р. Мизес // Сб. «Теория пластичности». – М: Иностранная литература, 1948. – С. 57-69.
132. Мирсаяпов И.Т. Расчет многоэтажных каркасных зданий на сейсмические воздействия с учетом физически нелинейного поведения / И.Т. Мирсаяпов, Д.М. Нуриева // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. - 2003. - №1. - С. 7-9.
133. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний / Ю.А. Митропольский – М.: Наука, 1964. – 431 с.
134. Мкртычев О.В. Проблемы учета нелинейностей в теории сейсмостойкости (гипотезы и заблуждения) / О.В. Мкртычев, Г.А. Джиншвелашвили – М.: ФГБОУ ВПУ «МГСУ», 2012, 192 с.

135. Моисеев Н.Н. Нелинейные колебания в механических и электрических системах / Н.Н. Моисеев – М.: ИЛ, 1952. – 264 с.
136. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н.Моисеев – М.: Наука, 1969. – 380 с.
137. Назаров А.Г. Об изменениях норм и правил строительства в сейсмических районах / А. Г. Назаров. – Ереван : Армянский научно-исследовательский институт стройматериалов и сооружений., 1960, 99 с.
138. Найфэ А. Методы возмущений / А. Найфэ. -М.: Мир, 1976.- 453 с.
139. Найфэ А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ. – М.: Мир, 1984.– 535 с.
140. Напетваридзе Ш.Г. Пространственные упругопластические сейсмические колебания зданий и инженерных сооружений/ Ш.Г. Напетваридзе, Р.В. Двалишвили, Д.К. Уклеба - Тбилиси: Мецниереба, 1982.- 182 с.
141. Нейланд В.Я. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа / В.Я. Нейланд, В.В. Боголепов, Г.Н. Дудин, И.И. Липатов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.– 456 с.
142. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов / Ю.И. Немчинов.– Киев: Будівельник, 1980. - 232 с.
143. Немчинов Ю.И. Особенности строительства в сейсмических районах Украины и совершенствование норм проектирования зданий и сооружений / Ю. И. Немчинов // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, 2000, №1.— С. 8-15.
144. Немчинов Ю.И. Оценка сейсмической реакции многоэтажных железобетонных зданий с учетом особенностей нелинейного деформирования конструкций / Ю.И. Немчинов, Н.Г. Марьенков, К.Н. Бабик – Луганськ : Видавництво ЛНАУ, Збірник наукових праць Луганського національного аграрного університету. Серія: Технічні науки. №71 (94), 2007. - С. 105-114.

145. Немчинов Ю.И. Сейсмостойкость зданий и сооружений. В двух частях / Ю. И. Немчинов – Киев : 2008. – 480 с.
146. Немчинов Ю.И. Состояние и задачи обеспечения сейсмической безопасности и дальнейшего развития сейсмостойкого строительства в Украине / [Ю.И. Немчинов, А.К. Хавкин, Н.Г. Марьенков, И.Г. Золотарев, В.С. Кукунаев, В.С. Дорофеев, К.В. Егунов] / Міжвідомчий науково-технічний збірник «Будівельні конструкції.- К.:НДІБК.- 2010.- вып.73. - С. 8-35.
147. Немчинов Ю.И. Проектирование зданий с заданным уровнем обеспечения сейсмостойкости (с учетом рекомендаций ЕВРОКОДА 8, международных стандартов и требований ДБН) / Ю.И. Немчинов, Н.Г. Марьенков, А.К. Хавкин и др. - Киев: Минрегион Украины, ГП НИИСК, - 2012. - 53 с.
148. Немчинов Ю.И. Расчет колебаний зданий и прочности железобетонных стен на заданные акселерограммы / Ю.И. Немчинов, Н.Г. Марьенков // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2013, випуск № 49 – С. 15-25.
149. Немчинов Ю.И. Сейсмостойкость высотных зданий и сооружений / Ю.И. Немчинов – К.: Гудименко С.В. 2015. – 583 с.
150. Николаенко Н.А. Динамика и сейсмостойкость сооружений / Н. А. Николаенко, Ю. П. Назаров. - М. :Стройиздат,1988.-312 с.
151. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости / В.В. Новожилов – М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
152. Ньюмарк Н. Основы сейсмостойкого строительства/ Н. Ньюмарк, Э. Розенблюэт – М.: Стройиздат, 1980. – 344 с.
153. Образцов И.Ф. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций/ И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, И.В. Андрианов – М.: Машиностроение, 1991. – 428 с.
154. Окамото Ш. Сейсмостойкость инженерных сооружений : пер. с англ. / Ш. Окамото. – М. : Стройиздат. 1980. – 342 с.

155. Оробей В.Ф. Расчет ферм методом граничных интегральных уравнений / В.Ф. Оробей, Д.Д. Работягов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1989. – №10. – С. 107-111.

156. Оробей В.Ф. Метод граничных интегральных уравнений в расчетах линейных систем / В.Ф. Оробей, А.Ф. Дашенко, Н.Н. Андриенко – Киев: Наукова думка, 1996. – 391с.

157. Оробей В.Ф. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем / В.Ф. Оробей, А.В. Ковров // Применение метода граничных элементов. – Одесса, 2004. – 123 с.

158. Оробей В.Ф. Расчет балок на упругом винклеровском основании при помощи метода граничных элементов / В.Ф. Оробей, А.В. Ковров // Вісник Одес. держ. акад. будівн. та арх. – Одесса, 2004. – Вып. 16. – С. 165-170.

159. Оробей В.Ф. Автоматизация формирования матриц при расчете неразрезных балок с помощью метода граничных элементов / В.Ф. Оробей, А.В. Ковров, А.Ю. Болгар // Холодильна техніка і технологія. – Одесса, 2005. – № 1 (93). – С. 91-96.

160. Оробей В.Ф. Моделирование задач динамики стержневых систем методами граничных и конечных элементов / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов, Д.В. Лазарева // Изв. вузов. Строительство. – 2006. – №7. – С. 98-102.

161. Оробей В.Ф. Расчет тонкостенных стержней методами граничных и конечных элементов / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов, А.М. Лимаренко // Холодильна техніка і технологія. – Одесса, 2005. – № 2(94). – С. 89-92.

162. Оробей В.Ф. Крутильные колебания конструкций из тонкостенных стержней / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов, А.М. Лимаренко // Вісник Одес. морського у-ту. – Одесса, 2007. – Вып. 21. – С. 40-47.

163. Оробей В.Ф. Собственные крутильные колебания тонкостенных стержней / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов, А.М. Лимаренко // Тр. Одес. политехн. у-та. – Одесса, 2007. – Вып. 1(27). – С. 19-23.



164. Оробей В.Ф. Расчет цилиндрических оболочек методом граничных элементов/ В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов //Вісник ОДАБА–Одесса, 2008. – Вип. 32. – С. 242-254.

165. Оробей В.Ф. Расчет неразрезных балок с учетом эксплуатационных факторов/ В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов, А.М. Лимаренко //Тр. Одес. политехн. у-та. – Одесса, 2009. – Вып. 1(31). – С. 14-19.

166. Оробей В.Ф. Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов // Труды Санкт-Петербургского политехнич. ун-та./ Инженерно-строительный журнал. – №4 (22).– СПб, 2011. – С. 33-39.

167. Оробей В.Ф. Методы определения напряжений и деформаций в инженерных сооружениях/ В.Ф. Оробей, А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, А.М. Лимаренко Одесса: «Апрель», 2016. – 268 с.

168. Ржевский В.А. Оценка сейсмостойкости железобетонных каркасов производственных зданий при Спитакском землетрясении / В.А. Ржевский, Р. С. Ибрагимов, А.В. Новоселя и др. // Архитектура и строительство Узбекистана. – 1989. - № 12. – С. 30-33.

169. Павлык В.С. Спитакское землетрясение – факты и выводы / В. С. Павлык // Жилищное строительство. – 1990. - № 5. - С. 11-14.

170. Перельмутер А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер – Киев : Сталь, 2002. – 600 с.

171. Поляков С.В. Последствия сильных землетрясений / С. В. Поляков – М.: Стройиздат, 1978. – 311 с.

172. Поляков С.В. Особенности и уроки Спитакского землетрясения / С. В. Поляков // Жилищное строительство. – 1990. - № 1. - С. 14-17.

173. Поляков С.В. Сейсмостойкие конструкции зданий: Учебное пособие для вузов. – 2-е изд. / С. В. Поляков – М. : Высшая школа, 1983. – 304 с.

174. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. — М.: Стройиздат, 1972. — 296с.
175. Попов Н.Н. Расчет сооружений на действие кратковременных нагрузок большой интенсивности // Н.Н. Попов, Б.С. Расторгуев Справочник по динамике сооружений. — М.: Стройиздат, 1972. — С. 349-380.
176. Последствия Карпатского землетрясения 4 марта 1977 г. на территории СРР. // Строительство и архитектура. / [С. В. Поляков, Я. М. Айзенберг, А. М. Жаров и др.] // Промышленное строительство. Обзорная информация. - 1979. - Вып. 1. - 54 с.
177. Последствия Карпатского землетрясения 4 марта 1977 г. на территории Молдавской ССР. Управление, организация и технология строительства. Экономика строительства. / [С. В. Поляков, С. С. Графов, А. М. Жаров и др.] // ЦИНИС. - Обзорная информация. - 1980. - Вып. 5. - 42 с.
178. Пособие по проектированию каркасных промзданий для строительства в сейсмических районах (к СНиП II-7-81)/ ЦНИИПромзданий. — М. : Стройиздат, 1985. — 292 с.
179. Пустовитенко Б.Г. Землетрясения Крымско-Черноморского региона (инструментальный период наблюдений 1927-1986 г.г.) / Б. Г. Пустовитенко, В. Е. Кульчицкий, А. В. Горячун — Киев : Наукова думка, 1990. — 190 с.
180. Пустовитенко Б.Г. Сейсмологические аспекты оценки сейсмического риска для территории г. Измаила / Б. Г. Пустовитенко, А. М. Скляр // Геофизический журнал. — 1996. - т. 18. - № 1. - С. 73-80.
181. Пустовитенко Б.Г. Новые данные о степени сейсмической опасности территории Украины. Карты ОСР-2004/ Б.Г. Пустовитенко // Будівельні конструкції, вип. 64. Міжвідом.наук.-техн.збірник. Будівництво в сейсмічних районах України. Зб. наук. праць / Б. Г. Пустовітенко — Київ : 2006. - С. 20-27.

182. Рейсс Э. Учет упругой деформации в теории пластичности / Э. Рейсс – // Сб. Теория пластичности. – М.: Иностранная литература, 1948. – С. 206-222.
183. Рабинович И.М. Расчет сооружений на импульсивные воздействия / И.М. Рабинович, А.П. Сеницын, О.В. Лукин, В.М. Теренин – М.: 1970.
184. Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. / А.Р. Ржаницын - М.: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1954. - 289 с.
185. Ржевский В. А. Сейсмостойкость зданий в условиях сильных землетрясений / В. А. Ржевский - Ташкент: Фан, 1990.-260 с.
186. Ржевский В.А. Неупругая работа каркасов смешанного типа в условиях сильных сейсмических движений. / В.А. Ржевский, П.А.Рендель // Архитектура и строительство Узбекистана.- 1987.- №9.- С. 32-34.
187. Ржевский В.А. Упруго-пластические свойства железобетонных каркасных систем при учете вертикальной составляющей сейсмического воздействия. / В.А. Ржевский // Архитектура и строительство Узбекистана.- 1983.- №7.- С. 23-26.
188. Сейсмическая опасность г. Черновцы / [А. В. Кендзера, Р. С. Пронишин, Я. А. Бень, Г. Р. Стародуб] // Белорусский сейсмологический Бюллетень. – 1992. - Вып. 2. - С. 151-168.
189. Сейсмичность территории Украины / [О. М. Харитонов, О. П. Костюк, В. В. Кутас и др.] // Геофизический журнал. – 1996. - том 18. - № 1. - С. 3-15.
190. Сен-Венан. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости/ Сен-Венан // Сб. Теория пластичности. – М.: Иностранная литература, 1948. – С. 11-19.
191. Симборт Э. Сравнение динамических упругопластических расчетов, выполненных по одностепенной модели и по модели со многими

степенями свободы / Э. Симборт // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6. - С. 23-27.

192. Симборт Э. Методика выбора коэффициента редукии сейсмических нагрузок  $K_i$  при заданном уровне коэффициента пластичности / Э. Симборт // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1. - С. 44-52.

193. Сорокин Е.С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. – М.: Госстройиздат, 1956. – 346 с.

194. Сорокин Е.С. Расчет сооружений на действие эксплуатационных импульсивных нагрузок / Е.С. Сорокин // Справочник по динамике сооружений. — М.: Стройиздат, 1972. — С. 93-122.

195. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. / Дж. Стокер – М.: ИЛ, 1952. – 264 с.

196. Сурьянинов, Н.Г. Математическая модель трубопровода в виде неразрезной балки с применением метода граничных элементов/ Н.Г. Сурьянинов, П.А. Швагирев, Г.Б. Шотадзе// Вісник КНУТД, №1 (94). – Київ, 2016. – С. 97-103.

197. Сурьянинов Н.Г. Компьютерные и экспериментальные исследования модели кессонного перекрытия/ Н.Г. Сурьянинов, И.А. Твардовский, А.М. Чучмай// Вісник Хмельницького національного університету. - 2016. - №2 (235). – С. 186-190.

198. Сурьянинов Н.Г. Расчет кессонных перекрытий численно-аналитическим методом граничных элементов/ П.Г. Балдук, А.М. Чучмай, Н.Г. Сурьянинов// Вісник КНУТД №2(96). - 2016. - С. 68-76.

199. Сурьянинов Н.Г. Численная реализация задачи об изгибе и кручении систем с перекрестными связями / Н.Г. Сурьянинов, А.М. Чучмай, А.С. Шиляев // Вісник Хмельницького національного університету. – Хмельницький, 2017. – №59 – С.257-262.

200. Сурьянинов Н.Г. К расчету устойчивости ортотропных пластин численно-аналитическим методом граничных элементов / П.Г. Балдук, В.Ю. Денисенко, Н.Г. Сурьянинов // Вісник КНУТД, 2017. – №6 (112) – С. 40-49.

201. Сурьянинов Н.Г. Адаптация алгоритма численно-аналитического метода граничных элементов к расчету перекрестно-балочных систем / Н.Г. Сурьянинов, А.С. Шиляев // International Academy Journal. Web of Scholar, 7(25), Vol. 1, pp. 9-14.

202. Сурьянинов Н.Г. Фундаментальные решения задачи о колебаниях ортотропной пластины / П.Г. Балдук, Н.Г. Сурьянинов, Т.С. Маковкина // European Journal of Technical and Natural Science, №2, 2018, С.29-32.

203. Сысоев В.И. Динамические нагрузки от машин // В.И. Сысоев Справочник про динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1972. – С. 20-37.

204. Сычев В.В. Асимптотическая теория отрывных течений / В.В. Сычев, А.И. Рубан, Вик.В. Сычев, Г.Л. Королев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.– 256 с.

205. Тюрин А.А. Волновые расчеты при проектировании и эксплуатации портовых гидротехнических сооружений / А.А. Тюрин, С.Г. Колесниченко – М.: Порттехинформ, 1986. – 41 с.

206. Угодчиков А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. – 296с.

207. Уздин А. М. Метод определения спектральных характеристик сооружений с неоднородным демпфированием для оценки их сейсмостойкости /А.М. Уздин // Экспресс-информ. ВНИИИС. Сер. 14. Сейсмостойкое строительство, 1986. Вып. 2. С. 2-6.

208. Уздин А. М. Основы теории сейсмостойкости и сейсмостойкого строительства зданий и сооружений/ А.М. Уздин, Т.А. Сахнович, Аль-Насер-Мохомад Самих Амин – Санкт-Петербург: Изд-во ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 1993. – 176 с.

209. Уроки Спитака / Г.Л. Кофф, Ю.И. Баулин, В.И. Смирнов и др. - Владивосток: Дальнаука, 2008. - 156 с.
210. Филиппов А.П. Расчет сооружений на подвижные нагрузки // Справочник по динамике сооружений. — М.: Стройиздат, 1972. — С. 20-37.
211. Фомин В.М. Уравнения плоского изгиба стержней с учетом физической и геометрической нелинейностей / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 24, – Одесса, 2006. – С. 273 – 287.
212. Фомин В.М. Колебания консольной балки, несущей сосредоточенную массу, при учете геометрической нелинейности / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 25, – Одесса, 2007. – С. 266 – 274.
213. Фомин В.М. Определение секущих объемных модулей упругости и сдвига для бетона / В.М. Фомин, И.П. Фомина // Вісник ОДАБА. Вып. 26, – Одесса, 2007. – С. 301 – 306.
214. Фомин В.М. Плоский изгиб консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 28 – Одесса, 2007. – С. 354 – 368.
215. Фомин В.М. Нестационарные колебания груза на консоли с учетом физической и геометрической нелинейностей / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 30 – Одесса, 2008. – С. 301 – 310.
216. Фомин В.М. Определение объемного модуля упругости и модуля сдвига для бетона при циклическом нагружении (1) / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 30, – Одесса, 2008. – С. 311 – 318.
217. Фомин В.М. Нелинейная теория плоского изгиба железобетонных балок / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 32, – Одесса, 2008. – С. 313 – 324.
218. Фомин В.М. Определение объемного модуля упругости и модуля сдвига для бетона при циклическом нагружении (2) / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 32, – Одесса, 2008. – С. 325 – 334.

219. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (1) \ В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 36(ч.1), – Одесса, 2009. – С. 367 – 369.

220. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (2) / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 36(ч.2), – Одесса, 2009. – С. 697 – 709.

221. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (3) / В.М. Фомин / Вісник ОДАБА. Вып. 37, – Одесса, 2009. – С. 372 – 386.

222. Фомин В.М. Колебания железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 38, – Одесса, 2010. – С. 626 – 630.

223. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского продольно-поперечного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып.40, – Одесса, 2010. – С. 347 – 352.

224. Фомин В.М. Плоский изгиб продольно сжатой железобетонной консольной балки с учетом пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып.41, – Одесса, 2011. – С. 307 – 311.

225. Фомин В.М. Определение прогибов железобетонной консольной балки при учете пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып.41, – Одесса, 2011. – С. 312 – 317.

226. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып.44, – Одесса, 2011. – С.345–353.

227. Фомин В.М. Плоский изгиб продольно сжатой ж.б.консольной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении / В.М. Фомин, И.П. Фомина // Вісник ОДАБА. Вып.45, – Одесса,2012 . – С.279-284.

228. Фомин В.М. Колебания ж.б.консольной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 47,ч.1, – Одесса, 2012 . – С.364-368.

229. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при исследовании статике и динамики железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 48, ч.2 , – Одесса, 2012 . – С.175–178.

230. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при исследовании статике и динамики железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып.48,ч.2 – Одесса,2012 . – С.179–186.

231. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при статических расчетах статически неопределимых железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып.49,ч.2 – Одесса,2013 . – С.239–245.

232. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при динамических расчетах статически неопределимых железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып. 50, ч.1 – Одесса, 2013. – С. 292-295.

233. Фомин В.М. О применении метода граничных элементов к решению нелинейных упругопластических задач статике и динамики железобетонных балок и рам / В.М. Фомин, И.П.Фомина // Вісник ОДАБА. Вып. 50, ч.2 – Одесса, 2013. – С. 168-172.

234. Фомин В.М. Исследование динамики многоэтажной железобетонной рамы с жесткими ригелями с учетом нелинейного поведения



и пластичности бетона / В.М. Фомин, // Вісник ОДАБА. Вып.52 – Одесса,2013 . – С. 286 – 292.

235. Фомин В.М. Устойчивость консольной балки, нагруженной системой осевых сил / В.М. Фомин, И.П.Фомина // Вісник ОДАБА. Вып.53 – Одесса,2014 . – С. 400-404.

236. Фомин В.М. Исследование динамической устойчивости железобетонной колонны с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып.54 – Одесса,2014 . – С. 377-394.

237. Фомин В.М. К сейсмическому проектированию протяженных конструкций / В.М. Фомин // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. №1.– Москва, 2001 – С. 32-35.

238. Фомин В.М. Моделирование динамического процесса разрушения железобетонных рам при сейсмических воздействиях / В.М. Фомин, С.А. Полевой // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. №6.– Москва, 2001 – С. 27-32.

239. Фомин В.М. Нестационарная динамическая контактная задача для периодической системы штампов при произвольном нагружении / В.М. Фомин // Прикладная математика и механика, том 50, вып. 3, – Москва, 1986. – С. 461-469.

240. Фомин В.М. Нелинейные квазистатические задачи для многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып.55 – Одесса,2014 . – С. 273-281.

241. Фомин В.М. Исследование динамики железобетонных причальных сооружений эстакадного типа при сейсмических воздействиях / В.С. Дорофеев , В.М. Фомин // Проблемы современного бетона и железобетона. Вып.6 – Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, РУП «Институт БелНИИС», Минск, 2014.– С. 106-120.

242. Фомин В.М. Нелинейные динамические задачи для многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып.57 – Одесса,2015 . – С.445–448.

243. Фомин В.М. Нелинейные квазистатические задачи для многоэтажных многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып.58 – Одесса, 2015. – С.372-381.

244. Фомин В.М. Нелинейные динамические задачи для многоэтажных многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / В.М. Фомин // Будівельні конструкції: збірник наукових праць. – К.: ДП НДІБК, 2015. – Вип. 82 – С. 142 – 148.

245. Фомин В.М. Дифференциальные уравнения пространственного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник ОДАБА. Вып.65 – Одесса, 2016. – С. 74 – 80.

246. Фомин В.М. Построение дифференциальных уравнений пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник КНУТД. №1 (106) – Киев, 2017. – С. 43 – 50.

247. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при исследовании квазистатических задач для железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / В.М. Фомин // Вісник КНУТД. №4 (112) – Київ, 2017. – С. 11 – 18.

248. Фомин В.М. Модификация метода граничных элементов для решения нелинейных задач пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей пластичности бетона / В.М.Фомин // Тези доповідей III Міжнародної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки». – Одеса, 2016. – С. 163 – 167.

249. Фомин В.М. Применение МГЭ при расчете пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / В.М.Фомин // Збірка тез доповідей Міжнародної науково-технічної конференції, присв. 90-річчю від дня нар. д.т.н., проф. В.К. Егупова «Проблеми теорії та практики сейсмостійкого будівництва», – Одеса, 2016. – С. 105.

250. Фомин В.М. Дифференциальные уравнения пространственного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / В.М.Фомин // Тези доповідей IV Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки».– Одеса, 2017. – С. 206 – 210.

251. Фомин В.М. Построение алгоритма метода граничных элементов для решения нелинейных упругопластических задач сейсмостойкости железобетонных каркасных сооружений / В.М.Фомин, И.П. Фомина // Збірка наукових праць Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми збереження архітектурної спадщини півдня України», присвяченої пам'яті академіка В.А. Лісенка (1937-2016). – Одеса, 2017. – С. 195 – 198.

252. Фомин В.М. Расчет пространственного нелинейного упругопластического изгиба железобетонной рамы методом граничных элементов / В.М.Фомин // Тези доповідей 74-ї науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2018. – С. 76.

253. Фомин В.М. Исследование нелинейных пространственных колебаний железобетонной рамы методом граничных элементов / В.М.Фомин // Тези доповідей 74-ї науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2018. – С. 77.

254. Хаузнер Г.В. Расчет сооружений на сейсмические воздействия по предельному состоянию / Г.В. Хаузнер // Международная конференция по сейсмостойкому строительству в Сан-Франциско: Сб. статей. М.: Госстройиздат, 1961.— С. 19-30.

255. Хачиян Э.Е. Сейсмические воздействия на высотные здания и сооружения / Э. Е. Хачиян – Ереван: Изд-во «Айастан», 1973.– 328 с.

256. Хачиян Э.Е. Динамические модели сооружений в теории сейсмостойкости / Э. Е. Хачиян, В.А. Амбарцумян – М.: Наука, 1981. – 204 с.

257. Хачиян Э.Е. Прикладная сейсмология / Э. Е. Хачиян – Ереван: изд-во «Гигутюн, 2008. – 491 с.
258. Цейтлин А.И. Расчет сооружений на периодические нагрузки от машин / А.И. Цейтлин // Справочник по динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1972. – С. 62-92.
259. Цейтлин А.И. Динамические воздействия на здания и сооружения от сверхзвуковых самолетов / А.И. Цейтлин // Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. Справочник проектировщика. – М.: Стройиздат, 1981. – С. 92-101.
260. Черноусько Ф. Л. Asymptotic Methods for the solution of Some Problems of Satellite Dynamics / Ф. Л. Черноусько, Ю. Г. Евтушенко // Proceedings of the XV-th Internatinal Astronotical Congress, Warszawa.– 1964, v. 1, pp. 277-296.
261. Черноусько Ф. Л. Декомпозиция и синтез управления в нелинейных динамических системах. / Ф. Л. Черноусько // *Тр. Мат Ин-та. РАН.* – 1995, Т. 211, С. 457–472.
262. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах / К.Ф. Черных – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
263. Шмуклер В.С. К упрощению нелинейного расчета железобетонных элементов / В.С. Шмуклер // Бетон и железобетон в Украине, 2012, №4, С. 17-20.
264. Штейнман О. Метод возмущений в аксиоматической теории поля / О. Штейнман. – М.: Мир, 1974.– 136 с.
265. Ящук В.Е. О связи напряжения-деформации растянутого бетона / В.Е. Ящук, П.Г. Курган // Известия вузов. Строительство и архитектура, 1981, №12, С. 12-17.
266. Argatov I. Asymptotic methods in mechanics / I. Argatov, G. Mishuris. – Aberstwyth University, 2011. – 121 p.

267. ATC-40 (1996) "Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings", Vol 1 and 2, Applied Technology Council, Redwood City, CA.
268. Azuhata, T. Seismic performance estimation of asymmetric buildings based on the capacity spectrum method / T. Azuhata, T. Saito, M. Takayama and K. Nagahara -12wcee-2000. 2322. P. 1-8.
269. Bento R. Nonlinear static procedures in performance based seismic design / R. Bento, S. Falcão, F. Rodrigueus // Proceedings of 13 World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada, 2004: paper № 2522.
270. Bertero Raul D. Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach / Raul D. Bertero, Vitelmo V. // Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 31,3, Mar. 2002, P. 627-652.
271. Biot M. Theory of vibration of buildings during earthquake./ M. Biot // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik and Mechanik, Band 14 Heft 4, August, 1934.
272. Biot M. Mechanical Analysis for the Predication of Earthquake stress/ M. Biot // Bull, of Soc.Seism, of Amer., v.31, №2, 1941.
273. Blume John A. A reserve energy technique for the earthquake design and rating of structures in the Inelastic range / John A. Blume // Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering. Vol. 1, Japan, 1960.
274. Bommer J. Acceleration and displacement spectra for seismic design codes. / J. Bommer, A. Selnashai // 12WCEE-2000/0207 P. 1-8.
275. Chopra Anil K. Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering. / Anil K. Chopra - Prentice Hall, Inc. 1995, Englewood Cliffs, New Jersey, 07632. - 794 p.
276. Chopra Anil K. Elastic Response Spectrum: a Historical Note / Anil K. Chopra // Earthquake Engineering and Structural Dynamics 36, 2007, P. 3-12.

277. Code for Seismic Design of Buildings (GB 50011-2001)] (in Chinese). Ministry of Housing and Urban-Rural Development of PRC (MOHURD, Retrieved 2008-09-29).
278. Datta T.K. *Seismic Analysis of Structures* / T.K. Datta // John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd. , 2010. – 464 p.
279. Davidson R.C. Nonlinear oscillations in a Vlasov-Maxwell plasma / R.C. Davidson // *Phys. Fluids.*– 1968, №11, pp. 194-204.
280. Deprit A. Canonical transformations depending on a small parameter / A. Deprit // *Celestial Mech.* – 1969, №1, pp. 12-30.
281. Di Prima R. C. Higher order approximations in the asymptotic solution of the Reynolds equation for slider bearings at high bearing numbers / R. C. Di Prima // *J. Lubrication Technology.* – 1969, №91, pp. 45-51.
282. Dobrowolny M. Nonlinear theory of hydromagnetic waves in a high  $\beta$  plasma / M. Dobrowolny, A. Rogister//*J. Plasma Phys.* – 1971, №6, pp. 401-412.
283. Douherty J.P. Lagrangian methods in plasma dynamics. 1. General theory of the method of the averaged Lagrangian // *J. Plasma Phys.*– 1970, №4, pp. 761-785.
284. EN 1998-1. Comité Européen de Normalisation: “Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance. Part 1: General Rules, Seismic Actions and Rules for Buildings”. EN 1998-1, CEN, Brussels, 2004. - 89p.
285. Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance - Part 1: General Rules, Seismic actions and Rules for Buildings. European Committee for Standardization. - Brussels, 2003. - 229 p.
286. Fajfar P. A Nonlinear Analysis Method for Performance Based Seismic Design //*Earthquake Spectra*, Vol. 16, No. 3, pp. 573-592, August 2000.
287. Fardis M.N. Modelling of concrete buildings for practical nonlinear seismic response analysis / M.N. Fardis // *Architecture, Civil engineering, Environment*, The Silesian University of Technology, No. 1, 2010, P. 31-46.

288. FEMA 356 (2000) Pre-Standard and Commentary for The Seismic Rehabilitation of Buildings, Federal Emergency Management Agency, Washington, D.C., USA.

289. Fomin V.M. The Steady Antiplane Dynamic Contact Problem of a Periodic Structure for an Elastic Half-space / V.M. Fomin // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 60, No. 1, 1996, P. 135-144.

290. Fomin V.M. Nonlinear Dynamic Analysis of a Reinforced Concrete Frame by the Boundary Element Method. / Volodymyr Fomin, Mariam Bekirova, Mykola Surianinov, Inna Fomina // 6<sup>th</sup> International Congress on Technology-Engineering and Science. July 19-20, 2018. Abstract Book. Kuala Lumpur.-Malaysia. P. 213.

291. Freeman S.A. (1978) "Prediction of Response of Concrete Buildings to Severe Earthquake Motion"/ S.A. Freeman // Douglas McHenry International Symposium on Concrete Structures, SP-55, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, P. 589-605.

292. Fujii K. "Simplified nonlinear analysis procedure for single-story asymmetric buildings" / K. Fujii, Y. Nakano, Y. Sanada // Journal of Japan Association for Earthquake Engineering, Vol. 4, № 2, 2004.

293. Ganz H.R. Post-Tensioning in Buildings – A Technology with Significant Potential / H.R. Ganz // Proceedings of fib Symposium. Dubrovnik, 2007. Concrete Structures.- Zagreb, SECON HDGK, 2007, P. 25-40.

294. Grishin A. Comparing of results of calculation of models of flexible oneanchor retaining building to experimental data/A.Grishin, O.Siplivets//Academic journal' Series^ Industrial machine building civil engineering. – PoltNTU, 2018. – Isssure 2(51). – P. 31 – 37.

295. Günay M. Selim. A comparative evaluation of performance-based seismic assessment procedures / M. Selim Günay, Sucuoğlu Haluk // Proceedings of 13 World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada, 2004: paper №453.

296. Hisada T., Izumi M., Hirosava M. Structural Response of Tall Building to Earthquake Shocks /Proc. on International Seminar on Earthquake Engineering, UNESCO, Skopje, 1964. - P. 63-68.

297. Housner G.W. The Plastic Failure of Frames During Earthquakes / G.W. Housner // Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering. Vol. 1, Japan, 1960.

298. JGJ 3-2010 Technical Specification for Concrete Structures of Tall Building (English). Ministry of Housing and Urban-Rural Development of PRC (MOHURD) - 2011. - P. 165.

299. Jacobs S.J. An asymptotic solution of the tidal equations // S.J. Jacobs // *J. Fluid Mech.* – 1967, №30, pp. 417-438.

300. Kawakami I. Perturbation approach to nonlinear Vlasov equation, II, Nonlinear plasma oscillation of finite amplitude / I. Kawakami, T. Yagishita // *J. Phys. Soc. Japan.* – 1971, №30, pp. 244-253.

301. Keller J.B. Perturbation theory of nonlinear electromagnetic wave propagation / J.B. Keller, M.H. Millman // *Phys. Rev.* – 1969, **181**, pp. 1730-1747.

302. Kuramoto H. "Prediction the Earthquake Response of Buildings Using Equivalent Single Degree of Freedom System" / H. Kuramoto, Teshigawara, Okuzono T., Koshika T., Takayama M., Hori T. M. // Proceedings of 12 World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 2000: paper №1039.

303. Lestuzzi P. "How to choose earthquake recordings for non-linear seismic analysis of structures" / P. Lestuzzi, Ph. Schwab, M. Koller, C. Lacave // Proceedings of 13 World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada, 2004: paper № 1241.

304. Matsumori T. "Estimation of the seismic demand in R/C frame structures using push-over analysis" / T. Matsumori, Sh. Otani, H. Shionara, T. Kabeyasawa // Proceedings of 13 World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada, 2004: paper № 1365.



305. Mononobe N. Die Eigenschwingungen eingespannter Stäbe von veränderlichen Querschnitt/ N. Mononobe // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 1, Heft 6, 1921.

306. Mugumura H. Study on hysteretic behavior of statically indeterminate prestressed concrete frame structure subjected to reversed cyclic lateral load / H. Mugumura // Bulletin Information № 132bis, AJCAP-CEB Symposium, Rome, May 1979. - P. 37-44.

307. Nagao T. "Case Studies on Performance Based Seismic Design Using Capacity Spectrum Method" / T. Nagao, H. Mukai, D. Nishikawa // Proceedings of 12 World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 2000: paper № 0694.

308. Nemchynov Iu.I. "Design procedure of seismic structures with assigned category of plasticity taking into account the requirements of European standards (EN 1998-1)" // Iu. Nemchynov, A. Khavkin, N. Maryenkov, K. Babik // Proceedings of 15 World Conference on Earthquake Engineering, Lisboa, Portugal, 2012: paper № 2189. - 8 p.

309. Nemchynov Iu.I. "Seismic hazards in Ukraine, investigation experience and earthquake engineering development tasks" / Iu. Nemchynov, P. Kryvosheyev, A. Khavkin, N. Maryenkov, K. Babik, V. Dorofyeyev, K. Yegupov, A. Murashko, I. Zolotaryov, V. Kukunayev, N. Ilyashenko // Proceedings of 15 World Conference on Earthquake Engineering, Lisboa, Portugal, 2012: paper № 2176. - 8 p.

310. Oliva M.G. Shaking Table of Reinforced Concrete Frames with Biaxial Response. / M.G. Oliva // Report No, UCB/EERC -80/28. - P. 1-114.

311. Park Y.J. "Mechanistic seismic damage model for reinforced concrete." / Y. J. Park and A. H.-S. Ang // J. Struct. Eng., Vol. 111, No. 4, 1985. - P. 722-739.

312. Paulay T. Shear Effects on Plastic Hinges of Earthquake Resisting Reinforced Concrete Frames. / T. Paulay, J.N. Bull // Bulletin Information № 132, AJCAP-CEB Symposium, Rome, May 1979. - P. 165-172.

313. Paz M. Structural Dynamics. Theory and Computation. / M. Paz , W. Leigh // Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 810 p.
314. Peter K. and Badoux M. Application of the capacity spectrum method to r.c. buildings with bearing walls/ K. Peter and M. Badoux // 12WCEE, № 0609, 2000.- P. 1-8.
315. Prandtl L. Spannungsverteilung in Plastischen Korpern/ L. Prandtl // Proc. Of 1<sup>st</sup> Int. Congr. Of Appl. Mech. – 1924. – P. 43-54.
316. Rakech K. Goel. Evaluation of nonlinear static procedures using strong-motion building records / K. Goel. Rakech/ .– SMIP04 Seminar proceeding, 2005, P. 70-81.
317. Requena M. Evaluation of a simplified method for the determination of the non linear seismic response of RC frames / Requena M., Ayala A. G. // Proceedings of 12 World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 2000: paper № 2109.
318. Specification for Structures to be Built in Disaster Areas. Part III - Earthquake Disaster Prevention. Ministry of Public Works and Settlement Government of Republic of Turkey. - 1997. - 84 p.
319. Sudhir K. Jain.– Proposed Draft Provisions and Commentary on Indian Seismic Code IS 1893 (Part 1) / K. Jain Sudhir, CVR. Murty // . - Indian Institute of Technology Kanpur, Kanpur, 2002. - 158 p.
320. Surianinov M.G. Calculation of plate-beam systems by method of boundary elements/ Mykola Surianinov, Oleksii Shylyiaiev// International Journal of Engineering & Technology, 7 (2.23),2018, P. 238-241
321. Surianinov M.G. Application of numerical and analytical method of boundary elements to calculation of reinforced concrete cross-beam systems/ Mykola Surianinov, Oleksii Shylyiaiev// Informes de la construccion, 2018.
322. Surianinov M.G. Development of numerical-analytical boundary element method to calculation of rods, plates and shells/ Н.Г. Сурьянинов, П.Г. Балдук, А.М. Чучмай, А.С. Шиляев// XXXII Construction technology exhibit, 2018, Spain.

323. Suriyaninov M. To the solution of the problem of bending of a cylindrical shell by the boundary elements / M. Suriyaninov, Yu. Krutii // MATEC Web of Transbud-2018, Vol. 230, 02020 (2018) (Scopus).

324. Van Hove L. Quantum- mechanical perturbations giving rise to a statistical transport equation / L. Van Hove // *Physica.* – 1955, **21**, pp. 517-540.

325. Vatulia Glib. Regression equations for circular CFST columns carrying capacity evaluation / G. Vatulia, M. Resunenکو, Ye. Orel, D. Petrenko // DYN-WIND'2017 – MATEC Web of Conferences 107, 00051, 2017.

326. Vatulia G. Simulation of performance of circular CFST columns under short-time and long-time load / G. Vatulia, A. Lobiak, Ye. Orel // Transbud'2017 – MATEC Web of Conferences 116, 02036, 2017.

327. Vatulia G. Evaluation of the carrying capacity of rectangular steel-concrete columns / G. Vatulia, M. Rezunenکو, D. Petrenko, S. Rezunenکو // *Civil and Environmental Engineering* – Vol. 14, Issue 1/2018, P. 76-83.

328. Wasow W.A. Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point / W.A. Wasow // *Ann. Math.* – 1953, №58, P. 222-252.

329. Watson J. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 2. / J. Watson // *J. Fluid Mech.* – 1960, №9, P. 371-389.

330. Williams, M.S. and R.G. Sexsmith, “Seismic damage indices for concrete structures: a state-of-the-art review”/ M.S. Williams, and R.G. Sexsmith *Earthquake Spectra*, Volume 11, № 2, 1995, P. 319-349.

331. Wingate R.T. Perturbation solution of a hyperbolic equation governing longitudinal wave propagation in certain nonuniform bars / R.T. Wingate, R.T. Davis // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1970, №47, P. 1334-1337.

332. Xue Q. The Draft Code For Performance Based Seismic Design of Buildings in Taiwan / Q. Xue , C.W. Wu, C.C. Chen, Chen K.C. // *Engineering Structures.* – 2008.30, P. 1535-1547.

333. Xiong X.Y. “The Influence of Lateral Load Patterns on the Results of Static Pushover Analysis” / Xiong X.Y. and Qi ZH // *Building Science*, 2001. – **17**(15).– P. 8–13.

334. Yegupov K. V. Seismic loads and soil conditions / K. V. Yegupov // VI Symposium on Earthquake Engineering, University of Roorkee, Oct.5-7, 1978. - vol.1. - P. 301-304.

335. Yegupov V. K. Taking into account three-dimensional deformations of buildings in normsetting calculations / V. K. Yegupov, K. V. Yegupov, V. I. Starodub // Ninth European Conference on Earthquake Engineering, - Moscow 1990. - vol. 7-a - P. 44-51.

336. Yegupov K. V. Computation methods of structure three-dimensional models on seismic effects / K. V. Yegupov, G. Assaf // Ninth European Conference on Earthquake Engineering, - Moscow 1990. - Vol. 7-a, - P. 52-58.

337. Yegupov V. Computer Technologies for Calculation of Buildings by Three Dimensional Models / V. Yegupov, K. Yegupov, V. Starodub, P. Mazur, A. Kostrijtskiy // International IMACS Symposium on Systems Analysis and Simulation, June,26-30,1995.-Berlin,Vol. 18-19, 1995, - P. 115-118.

338. Yegupov K.V. The Model of Response of Building to the Effect of a Running Seismic Wave / K. V. Yegupov // International IMACS Simposium on “System”s Analysis and Simulation”,June,26-30,1996.-Berlin.

339. Yegupov V. Simulation and Automation of Calculations of Buildings (Structures) on Seismic Effects / V. Yegupov, K. Yegupov, V. Starodub, P. Mazur, A. Kostrijtskiy // International Journal Computers & Structures,Elsevier Science Ltd., 1997.

340. Yegupov V. Simulation and Automation of Calculations of Buildings (Structures) on Seismic Effects / V. Yegupov, K. Yegupov, V. Starodub, P. Mazur, A. Kostrijtskiy // Computer & Structures, 1997.- Vol.63, No 6. - P. 1065-1083.

341. Yu-Yuan Lin. “Comparison of displacement coefficient method and capacity spectrum method with experimental results of RC columns” / Lin Yu-

Yuan, Chang Kuo-Chun, Wang Yuan-Li // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. Volume 33, Issue 1, 1999, P. 35-48.

342. Zembaty Z. Spatial seismic excitations and response spectra / Z. Zembaty, S. Krenk // J. eng. mech., ASCE, 1993.- 119. - P. 2449-2459.

343. Zembaty Z. Response spectra of spatial seismic ground motion / Z. Zembaty, S. Krenk // 10th European Conf. Earthquake Eng., Austria, - Vienna, 2, 1994, - P. 1271-1275.

344. Zerva A. Effect of spatial variability and propagation of seismic ground motions on the response of multiply supported structures / Zerva A. // Prob. eng. mech., 6, 1991, - P. 212-221.

## ДОДАТОК А

**Визначення січних об'ємних модулів пружності і зсуву для бетону в процесі активного навантаження**

При дослідженні статички і динаміки залізобетонних конструкцій виникає необхідність в аналітичних залежностях між середніми напруженнями  $\sigma_0$  і середніми відносними деформаціями  $\varepsilon_0$ , а також між октаедричними дотичними напруженнями  $\tau_0$  і зсувами на октаедричних площадках  $\gamma_0$  для бетону. Подібні залежності наведені в [107,265], однак вони досить громіздкі і незручні для якісного дослідження коливань.

Нехай бетонний стержень відчуває деформацію одноосного поздовжнього стиску. Позначивши через  $\varepsilon_b$  та  $\varepsilon_p$  відповідно подовжню і поперечну відносні деформації, матимемо

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_b + 2\varepsilon_p) / 3 \quad (\text{A.1})$$

Враховуючи що  $\varepsilon_p = -\nu_b \varepsilon_b$ , а  $\varepsilon_b = \sigma_b / (E_0 V_b)$  ( $\sigma_b$  - нормальне напруження в поперечному перерізі стержня,  $\nu_b$  - коефіцієнт Пуасяона,  $E_0$  - початковий модуль пружності бетону,  $V_b$  - коефіцієнт зміни січного модуля [78]), можемо записати

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_b (1 - 2\nu_b)}{3E_0 V_b}. \quad (\text{A.2})$$

Зауважимо, що [88]

$$V_b = \hat{V}_b + (V_0 - \hat{V}_b) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nu_b = \hat{\nu}_b + (\nu_0 - \hat{\nu}_b) \sqrt{1 - \eta^2}. \quad (\text{A.4})$$

У формулі (A.3)  $\hat{V}_b$  - максимальне значення коефіцієнта  $V_b$ ,  $V_0$  - його початкове значення;  $\omega_1$  і  $\omega_2$  - деякі постійні величини. Їх значення визначаються з формул

$$\hat{V}_b = \frac{\hat{\sigma}_b}{\hat{\varepsilon}_b E_0}, \quad \hat{\sigma}_b = -R_{b,ser}, \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{\varepsilon}_b = -\frac{(18 + R_{b,ser})(62R_{b,ser} + 0.675R_{b,ser}^2 + 22)}{(53000 - 62R_{b,ser})(7R_{b,ser} + R_{b,ser}^2 + 22)}. \quad (\text{A.6})$$

( $R_{b,ser}$  у МПа – наводиться в СНиПі, а  $V_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 2 - 2,5V_b$  для висхідної гілки діаграми одновісного стиску;  $V_0 = 2,05\hat{V}_b$ ,  $\omega_1 = 1,95\hat{V}_b - 0,138$  для низхідній;  $\omega_2 = 1 - \omega_1$ ).

У формулі (А.6)  $\hat{v}_b$  - максимальне значення  $v_b$ :

$$\hat{v}_b = v_0 + 1 - \sqrt[3]{\hat{V}_b}. \quad (\text{A.7})$$

Зауважимо, що величини  $V_b$  і  $v_b$  у формулах (А.3) і (А.4) є функціями рівня нормальних напружень  $\eta$ :

$$\eta = \sigma_b / \hat{\sigma}_b. \quad (\text{A.8})$$

Введемо величину  $\zeta$ , яка характеризує рівень середньої деформації:

$$\zeta = \varepsilon_0 / \hat{\varepsilon}_b. \quad (\text{A.9})$$

Тоді (А.2) може бути записано так:

$$\zeta = A\eta f(\eta) \quad \left( A = \frac{\hat{\sigma}_b(1 - 2v_0)}{3E_0\hat{\varepsilon}_b}; f(\eta) = \frac{1 - 2v_b(\eta)}{[1 - 2v_0]V_b(\eta)} \right). \quad (\text{A.10})$$

Формула (А.10) висловлює залежність  $\varepsilon_0$  від  $\sigma_b$ , а значить, і від  $\sigma_0$ , так як  $\sigma_0 = \sigma_b / 3$  при одноосьовому стиску. Оскільки нас цікавить зворотна залежність  $\sigma_0$  від  $\varepsilon_0$ , то проблема полягає в зверненні вираження (А.10). Для однозначного звернення будемо розглядати тільки висхідну гілку діаграми, тобто при  $\zeta_b < \hat{\zeta}_b$ ,  $\eta < 1$  ( $\hat{\zeta}_b = Af(1)$ ). Позначимо шукану залежність  $\eta$  від  $\zeta$  так:  $\eta = \chi(\zeta)$ . Тоді (А.10) можна представити так:

$$\eta = \frac{1}{A} \zeta \frac{1}{f[\chi(\zeta)]}. \quad (\text{A.11})$$

Так як  $v(0) = v_0$ , а  $V_b(0) = 1$ , то  $f(0) = 1$ . Як вже зазначалося, на висхідній гілці діаграми залежність  $\eta = \chi(\zeta)$  однозначна. Звідси слідує, що  $\eta(0) = 0$ .

Тому можна записати наступну рівність:

$$\frac{1}{f[\chi(\zeta)]} = 1 + \phi(\zeta), \quad (\text{A.12})$$

де  $\phi(0) = 0$ . Використовуючи (A.12), запишемо (A.11) в наступному вигляді:

$$\eta = \frac{1}{A} \zeta [1 + \phi(\zeta)]. \quad (\text{A.13})$$

Аналітичний запис функції  $\phi(\zeta)$  невідомий, проте, його апроксимацію за допомогою поліномів легко побудувати. розбиваємо відрізок  $[0, \eta^*]$  ( $\eta^* < 1$ ) на  $n$  частин і для кожної точки  $\eta_k = k\eta^*/n$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) визначаємо відповідне значення  $\zeta_k$  за формулою (A.10). Далі з формули (A.13) при знайдених значеннях  $\eta_k$  і  $\zeta_k$  визначається  $\phi(\zeta_k)$ . Використовуючи будь-яку інтерполяційну формулу (Лагранжа, Ньютона або ін.), можемо записати

$$\eta = \frac{1}{A} \zeta [1 + \tilde{\phi}(\zeta)], \quad \tilde{\phi}(\zeta) = \sum_{k=0}^n a_k \zeta^k. \quad (\text{A.14})$$

Замінюючи  $\eta$  і  $\zeta$  їх виразами (A.8) і (A.9) і враховуючи, що  $\sigma_0 = \sigma_b/3$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 3K(\varepsilon_0)\varepsilon_0, \\ K(\varepsilon_0) &= K_0 [1 + \tilde{\phi}(\frac{\varepsilon_0}{\hat{\varepsilon}_b})]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Тут  $K_0 = \frac{\hat{\sigma}_b}{3A\hat{\varepsilon}_b}$ . Легко переконатися в тому, що  $K_0 = \frac{E_0}{3(1-2\nu_0)}$ , тобто являє

собой початковий об'ємний модуль пружності.

Переходимо до визначення зсуву на октаедричних площадках. з формули  $\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$  отримуємо

$$\gamma_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} |\varepsilon_b| (1 + \nu_b), \quad (\text{A.16})$$

так як  $\varepsilon_1 = \varepsilon_b$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu_b \varepsilon_b$ . Таким же чином отримуємо, що октаедричні дотичні напруження визначаються за формулою

$$\tau_0 = \sqrt{2} |\sigma_b| / 3. \quad (\text{A.17})$$

Тоді із залежності

$$\tau_0 = G\gamma_0 \quad (\text{A.18})$$



впливає, що

$$G = \frac{\tau_0}{\gamma_0} = \frac{E_0 V_b(\eta)}{2[1 + v_b(\eta)]}. \quad (\text{A.19})$$

Введемо позначення

$$\rho = \frac{3\gamma_0}{4\sqrt{2} |\hat{\sigma}_b|}. \quad (\text{A.20})$$

Враховуючи що  $\sigma_b = \eta \hat{\sigma}_b$ , а також (A.18) і (A.19), отримуємо з (A.20)

$$\rho = B\eta g(\eta) \quad \left( B = \frac{\hat{\sigma}_b(1 + v_b)}{2E_0 \hat{\epsilon}_b}, g(\eta) = \frac{1 + v_b(\eta)}{(1 + v_0)V_b(\eta)}, g(0) = 1 \right). \quad (\text{A.21})$$

Тепер проблема полягає в зверненні функції (A.21), тобто у визначенні залежності  $\eta$  від  $\rho$ . Діючи аналогічно попередньому випадку, приходимо до співвідношення, аналогічного (A.14)

$$\eta = \frac{1}{B} \rho [1 + \psi(\rho)], \quad (\psi(0) = 0). \quad (\text{A.22})$$

Продовжуючи так само далі, отримуємо

$$\eta = \frac{1}{B} \rho [1 + \tilde{\psi}(\rho)], \quad \tilde{\psi}(\rho) = \sum_{k=0}^m b_k \rho^k, \quad (\text{A.23})$$

де коефіцієнти  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) визначаються так само, як  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Замінюючи  $\eta$  відношенням  $\sigma_b / \hat{\sigma}_b$ , а  $\rho$  відповідно до (A.20), знаходимо

$$\begin{aligned} \tau_0 &= G(\gamma_0) \gamma_0, \\ G(\gamma_0) &= G_0 [1 + \tilde{\psi}(d_b \gamma_0)] \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

( $G(\gamma_0)$  – січний модуль зсуву бетону, а  $G_0$  – відповідний початковий модуль,

$$d_b = \frac{3}{4\sqrt{2} |\hat{\sigma}_b|} ).$$

Нехай тепер стержень піддається одноосьовому розтягу. Всі вищенаведені формули за винятком (A.6), виявляються вірними при заміні індексу "b" індексом "bt". Замість (A.6) слід використовувати формулу [234]

$$\hat{\epsilon}_{bt} = A_0 R_{bt}^\alpha, \quad (\text{A.25})$$

де  $A_0$  і  $\alpha$  – параметри, які залежать від типу бетону.

Таким чином, формули (А.14) і (А.15) з урахуванням вищевказаної заміни справедливі і для одноосного розтягу. Отже, коефіцієнти діаграм зсуву для стиску і розтягу (тобто для різних значень параметра Лоде-Надаї) відрізняються один від одного, що було відзначено в роботі [96].

Як приклад розглянемо стержень, виконаний з бетону В40:

$$R_{b,ser} = 29 \text{ МПа}, E_0 = 36 \cdot 10^3 \text{ МПа}, R_{bt,ser} = 2,1 \text{ МПа}.$$

Розглядаємо спочатку випадок одновісного стиску. За формулами (А.5) – (А.7) знаходимо  $\hat{\varepsilon}_b = -2,056 \cdot 10^{-3}$ ;  $\hat{V}_b = 0,392$ ;  $\omega_1 = 2 - 2,5\hat{V}_b = 1,02$ ;  $\omega_2 = 1 - \omega_1 = -0,02$ ;  $\hat{v}_b = 0,468$  (прийнято, що  $v_0 = 0,2$ ). З формул (2.104) і (2.105) визначаємо

$$V_b = 0,392 + 0,608\sqrt{1 - 1,02\eta + 0,02\eta^2}, v_b = 0,468 - 0,268\sqrt{1 - \eta^2},$$

а з (А.10):

$$A = 0,0784; f(\eta) = \frac{0,064 + 0,536\sqrt{1 - \eta^2}}{0,6(0,392 + 0,608\sqrt{1 - 1,02\eta + 0,02\eta^2})}.$$

Прийmemo  $\eta^* = 0,8$  і розіб'ємо відрізок на дві ділянки. Тоді з (А.10) отримуємо  $\eta_0 = 0$ ;  $\eta_1 = 0,4$ ;  $\eta_2 = 0,8$ ;  $\zeta_0 = 0$ ;  $\zeta_1 = 0,0337$ ;  $\zeta_2 = 0,0609$ . З (А.12) знаходимо  $\phi(\zeta_0) = 0$ ;  $\phi(\zeta_1) = -0,0695$ ;  $\phi(\zeta_2) = 0,0297$ . Очевидно, що  $a_0 = 0$ .

Для знаходження  $a_1$  і  $a_2$  складаємо систему рівнянь

$$a_1 0,0337 + a_2 0,0337^2 = -0,0695$$

$$a_1 0,0609 + a_2 0,0609^2 = 0,0297$$

вирішуючи яку знаходимо:  $a_1 = -5,224$ ;  $a_2 = 93,807$ . Далі, з (А.15) отримуємо

$$\sigma_0 = 3K(\varepsilon_0)\varepsilon_0; K(\varepsilon_0) = 20 \cdot 10^3 (1 + 2,541 \cdot 10^3 \varepsilon_0 + 22,192 \cdot 10^6 \varepsilon_0^2).$$

Останні два доданки всередині дужок показують відхилення поведінки матеріалу від лінійного в розглянутому діапазоні деформацій.

Покажемо, що це відхилення мало. Максимальне значення  $\zeta$  дорівнює  $\zeta_2 = 0,0609$ . Тоді відповідне значення  $\varepsilon_{0,2} = \hat{\varepsilon}_b \zeta_2 = -0,1252 \cdot 10^{-3}$ . Таким чином, необхідно знайти максимум модуля функції

$$\phi_0(\varepsilon_0) = 2,541 * 10^3 \varepsilon_0 + 22,192 * 10^6 \varepsilon_0^2 \quad \text{на відрізку } [-0,1252 * 10^{-3}, 0].$$

Прирівнюючи нулю похідну, знаходимо точку мінімуму функції  $\phi_0(\varepsilon_0)$ :

$$\varepsilon_{0,\min} = -0,05725 * 10^{-3}. \quad \text{Відповідне значення функції: } \phi_0(\varepsilon_{0,\min}) = -0,0728.$$

Значенн  $\phi_0(-0,1252 * 10^{-3}) = 0,0298$ . Отже, відхилення від лінійності  $|\phi_0(\varepsilon_0)| \leq 0,0728$ , тобто значно менше 1.

Переходимо до визначення модуля зсуву. Діючи відповідно до формул (A.17) - (A.24), отримуємо

$$\tau_0 = G(\gamma_0)\gamma_0; \quad G(\gamma_0) = 15 * 10^3 (1 - 0,383 * 10^3 \gamma_0 + 0,0468 * 10^6 \gamma_0^2).$$

Аналогічно показується, що відхилення від лінійності мало.

Для розтягу маємо

$$\sigma_0 = 3K(\varepsilon_0)\varepsilon_0; \quad K(\varepsilon_0) = 20 * 10^3 (1 - 2,785 * 10^3 \varepsilon_0 - 1041,453 * 10^6 \varepsilon_0^2);$$

$$\tau_0 = G(\gamma_0)\gamma_0; \quad G(\gamma_0) = 15 * 10^3 (1 - 0,148 * 10^3 \gamma_0 - 23,714 * 10^6 \gamma_0^2).$$

Зауважимо, що в цьому випадку  $\varepsilon_{0,2} = \hat{\varepsilon}_{bt} \zeta_2 = 6,202 * 10^{-5}$ . Неважко показати, що і в цьому випадку відхилення від лінійності в  $K(\varepsilon_0)$  и  $G(\gamma_0)$  малі.

## ДОДАТОК Б

**Визначення січних об'ємних модулів пружності і зсуву для бетону в процесі циклічного навантаження.**

Досліджуємо спочатку випадок, коли поздовжня сила знака не змінює. Розглянемо бетонну колону постійного поперечного перерізу, яка зазнає одновісний стиск. Поздовжня відносна деформація колони може бути визначена з формули [88]

$$\varepsilon = \sigma / [E^{[0]} V_b(\eta)], \quad (\text{Б.1})$$

де  $\sigma = N / S$  ( $N$  – поздовжня сила,  $S$  – площа поперечного перерізу),  $E^{[0]}$  – початковий модуль пружності бетону,  $V_b(\eta)$  – коефіцієнт зміни січного модуля пружності

$$V_b(\eta) = \hat{V}_b + (V_0 - \hat{V}_b) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2}. \quad (\text{Б.2})$$

Тут  $\hat{V}_b$  – значення  $V_b$  в вершині діаграми ( $\varepsilon, \sigma$ ) стиску бетону [18],  $\eta$  – рівень напружень:

$$\eta = \sigma / \hat{\sigma}_b \quad (\text{Б.3})$$

( $\hat{\sigma}_b$  – значення напружень у вершині діаграми,  $\hat{\sigma}_b = -R_{b,ser}$ ). Зауважимо, що вершині діаграми відповідає значення  $\eta = 1$ .

Будемо розглядати тільки такі значення  $N$ , при яких точка з координатами  $\sigma, \varepsilon$  знаходиться на висхідній гілці діаграми (тобто  $|N| < |\hat{N}|$ ,  $\hat{N} = S\hat{\sigma}_b$ , рис. Б.1). Тоді [78]  $V_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 2 - 2,5\hat{V}_b$ ,  $\omega_2 = 1 - \omega_1$ . Значення поздовжньої деформації  $\varepsilon$  в вершині діаграми для важких і дрібнозернистих бетонів визначається за формулою

$$\hat{\varepsilon}_b = - \frac{(18 + R_{b,ser})(62R_{b,ser} + 0.675R_{b,ser}^2 + 22)}{(53000 - 62R_{b,ser})(7R_{b,ser} + R_{b,ser}^2 + 22)}. \quad (\text{Б.4})$$

Припустимо, що на початковому етапі деформування колони (будемо називати його нульовим, на рис. Б.1 він відповідає відрізьку  $OX_1$  діаграми) величина стискаючої сили збільшується від нуля до деякого значення  $|N_1^*| < |\hat{N}|$ . В кінці цього етапу нормальні напруження на поперечних перерізах

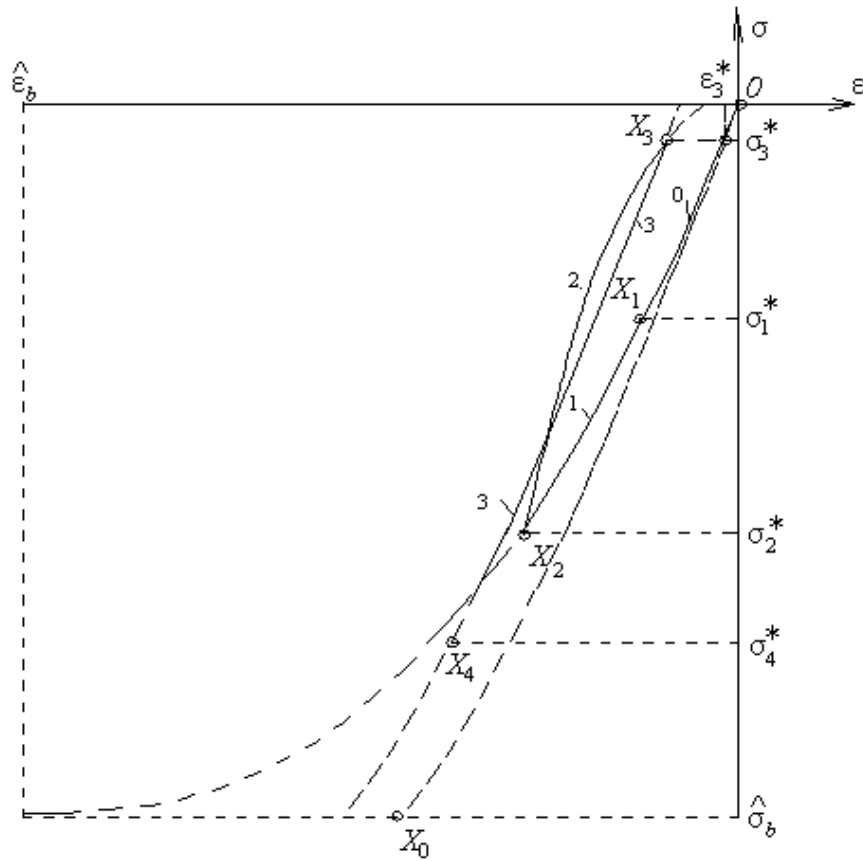


Рис. Б.1

Діаграма деформування бетону при навантаженні и розвантаженні

і відносна поздовжня деформація в колоні відповідно до (Б.1) дорівнюватимуть

$$\sigma_1^* = N_1^* / S, \quad \varepsilon_1^* = \sigma_1^* / [E^{[0]} V_b(\eta_1^*)], \quad (\text{Б.5})$$

де  $\eta_1^* = \sigma_1^* / \hat{\sigma}_b$ .

Позначимо через  $\varepsilon_{\text{п}}$  поперечну відносну деформацію. Тоді середня відносна деформація (середнє подовження) запишеться так

$$\bar{\varepsilon} = (\varepsilon + 2\varepsilon_{\text{п}}) / 3. \quad (\text{Б.6})$$

Враховуючи що  $\varepsilon_{\text{п}} = -\nu_b(\eta)\varepsilon$  ( $\nu_b(\eta)$  – коефіцієнт Пуассона), представимо (Б.6) наступним чином:

$$\bar{\varepsilon}(\sigma) = \frac{\sigma[1 - 2\nu_b(\eta)]}{3E^{[0]}V_b(\eta)}, \quad (\text{Б.7})$$

причому [78]

$$\nu_b(\eta) = \hat{\nu}_b + (\nu_0 - \hat{\nu}_b)\sqrt{1 - \eta^2} \quad (\text{Б.8})$$

$$(v_0 = 0,2, \hat{v}_b = v_0 + 1 - \sqrt[3]{\hat{V}_b}, \hat{V}_b = \hat{\sigma}_b / (\hat{\varepsilon}_b E_0)).$$

Введемо величину  $\zeta$ , яка характеризує рівень середньої відносної деформації:

$$\zeta = \bar{\varepsilon} / \hat{\varepsilon}_b. \quad (\text{Б.9})$$

Тоді (Б.7) запишеться так

$$\zeta(\eta) = A_b \eta f(\eta). \quad (\text{Б.10})$$

Тут

$$A_b = \hat{\sigma}_b (1 - 2v_0) / (3E^{[0]} \hat{\varepsilon}_b), f(\eta) = [1 - 2v_b(\eta)] / [(1 - 2v_0)V_b(\eta)]. \quad (\text{Б.11})$$

Нехай тепер величина поздовжньої сили  $|N|$  продовжує зростати. Процес збільшення величини поздовжньої сили  $N$  від  $|N_1^*|$  до деякого значення  $|N_2^*| < |\hat{N}|$  (тобто процес навантаження при стиску) і відповідні зміни  $\sigma$  і  $\varepsilon$  будемо називати першим етапом деформування колони. Відрізок  $X_1 X_2$  діаграми (рис. Б.1), який відповідає цьому етапу, запишемо в наступному кілька більш загальному вигляді, придатному для наступних етапів:

$$\Delta \varepsilon_j (\Delta \sigma_j) = (k_j \sigma_j^* + \Delta \sigma_j) / [E_j^{[0]} V_j(\Delta \eta_j)] - k_j \varepsilon_j^*, \quad (\text{Б.12})$$

де

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_j &= \varepsilon - \varepsilon_j^*, \Delta \sigma_j = \sigma - \sigma_j^*, \Delta \eta_j = \eta - \eta_j^*, V_j(\Delta \eta_j) = \\ &= \hat{V}_j + (V_{j0} - \hat{V}_j) \sqrt{1 - \omega_{j1} |k_j \eta_j^* + \Delta \eta_j| - \omega_{j2} (k_j \eta_j^* + \Delta \eta_j)^2}. \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

Для застосування формул (Б.12)–(Б.13) до першого етапу деформування слід в них покласти  $j = 1$ . При цьому

$$\begin{aligned} k_j &= 1, E_j^{[0]} = E^{[0]}, \hat{V}_j = \hat{V}_b, V_{j0} = V_0 = 1, \\ \omega_{j,1} &= 2 - 2,5\hat{V}_b, \omega_{j,2} = 1 - \omega_{j,1}, A_j = A_b, B_j = B_b. \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

(з приводу визначення величини  $B_b$  див. (Б.11)).

Будемо називати (Б.12) рівнянням діаграми деформування в приростах  $\varepsilon$  і  $\sigma$ .

З (Б.7) і (Б.13) випливає, що

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\varepsilon}_j(\sigma_j) &= (k_j \sigma_j^* + \Delta \sigma_j)(1 - 2\nu_j(\Delta \eta_j)) / (3E_j^{[0]} V_j(\Delta \eta_j)) - k_j e_j^* \\ (\Delta \bar{\varepsilon}_j &= \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_j^*, \bar{\varepsilon}_j^* = \bar{\varepsilon}(\sigma_j^*), \nu_j(\Delta \eta_j) = \nu_b(\eta_j^* + \Delta \eta_j)). \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

З (Б.15) отримуємо

$$\Delta \zeta_j(\Delta \eta_j) = A_j(k_j \eta_j^* + \Delta \eta_j) f_j(\Delta \eta_j) - k_j \zeta_j^*. \quad (\text{Б.16})$$

$$(\Delta \zeta_j = \zeta - \zeta_j^*, \zeta_j^* = \bar{\varepsilon}_j^* / \hat{\varepsilon}_b, f_j(\Delta \eta_j) = [1 - 2\nu_j(\Delta \eta_j)] / [(1 - 2\nu_0) V_j(\Delta \eta_j)]).$$

Функція  $\Delta \zeta_1(\Delta \eta_1)$  є монотонно зростаючою на відрізку  $[0, 1 - \delta_1]$  ( $\delta_1 \ll 1$ ), тому на цьому відрізку вона оборотна. Будемо розшукувати функцію, зворотну  $\Delta \zeta_1(\Delta \eta_1)$ , в наступному вигляді:

$$\Delta \eta_j(\Delta \zeta_j) = \frac{1}{A_j} \Delta \zeta_j [1 + \chi_j(\Delta \zeta_j)], \quad (\text{Б.17})$$

де

$$\chi_j(\zeta_{j\Delta}) = \sum_{k=0}^{n_j} \chi_{j,k} \zeta_{j\Delta}^k. \quad (\text{Б.17a})$$

Прийmemo  $n_j = 2$  і з умови

$$\Delta \eta_j'(0) = 1 / \Delta \zeta_j'(0) \quad (\text{Б.18})$$

отримаємо

$$\chi_{j,0} = 1 / f_j(0) - 1. \quad (\text{Б.19})$$

Покладемо тепер

$$\Delta_1 \eta_{j1} = \eta_{j+1}^* - \eta_j^*, \Delta_2 \eta_j = (\eta_{j+1}^* - \eta_j^*) / 2 \quad (\text{Б.20})$$

(через  $j + 1$  позначений номер наступного етапу деформування) і знайдемо значення  $\Delta \zeta_1$  при  $\Delta \eta_1 = \Delta_1 \eta_1$  і  $\Delta \eta_1 = \Delta_2 \eta_1$ :

$$\Delta_1 \zeta_j = \Delta \zeta_j(\Delta_1 \eta_j), \Delta_2 \zeta_j = \Delta \zeta_j(\Delta_2 \eta_j). \quad (\text{Б.21})$$

З умов

$$\Delta_1 \eta_j = \Delta \eta_j(\Delta_1 \zeta_j), \Delta_2 \eta_j = \Delta \eta_j(\Delta_2 \zeta_j) \quad (\text{Б.22})$$

отримуємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta_1 \zeta_j \chi_{j,1} + \Delta_1 \zeta_j^2 \chi_{j,2} &= F_{j,1} - \chi_{j,0}, \\ \Delta_2 \zeta_j \chi_{j,1} + \Delta_2 \zeta_j^2 \chi_{j,2} &= F_{j,2} - \chi_{j,0} \end{aligned}$$

( $F_{j,1} = 1/f_j(\Delta_1\eta_j) - 1$ ,  $F_{j,2} = 1/f_j(\Delta_2\eta_j) - 1$ ), рішення якої має такий вигляд:

$$\begin{aligned}\chi_{j,1} &= [(F_{j,1} - \chi_{j,0})\zeta_{j\Delta 2}^2 - (F_{j,2} - \chi_{j,0})\Delta_1\zeta_j^2]/[\Delta_1\zeta_j\Delta_2\zeta_j(\Delta_2\zeta_j - \Delta_1\zeta_{j\Delta 1})], \\ \chi_{j,2} &= [(F_{j,2} - \chi_{j,0})\Delta_1\zeta_j - (F_{j,1} - \chi_{j,0})\Delta_2\zeta_j]/[\Delta_1\zeta_j\Delta_2\zeta_j(\Delta_2\zeta_j - \Delta_1\zeta_j)].\end{aligned}\quad (\text{Б.23})$$

З (Б.3) і (Б.9) випливає

$$\Delta\eta_j = \Delta\sigma_j / \hat{\sigma}_b, \quad \Delta\zeta_j = \bar{\varepsilon}_j / \hat{\varepsilon}_b. \quad (\text{Б.24})$$

Зауважимо, що середнє напруження  $\bar{\sigma} = \sigma / 3$  при одноосьовому стиску, тоді приріст його  $\Delta\bar{\sigma}_1 = \Delta\sigma_1 / 3$ . Враховуючи це, отримуємо з (Б.17)

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\sigma}_j &= 3K_j(\Delta\bar{\varepsilon}_j)\Delta\bar{\varepsilon}_j, \\ K_j(\Delta\bar{\varepsilon}_j) &= K_j^{[0]}[1 + \chi_j(\Delta\bar{\varepsilon}_j / \hat{\varepsilon}_b)]\end{aligned}\quad (\text{Б.25})$$

( $K_j^{[0]} = \hat{\sigma}_b / (9A_j\hat{\varepsilon}_b)$ ). Легко переконатися, що при  $j = I$

$$K_j^{[0]} = K^{[0]}$$

( $K^{[0]}$  – початковий об'ємний модуль пружності бетону).

Перша рівність (Б.25) означає, що  $K_1(\Delta\bar{\varepsilon}_1)$  є січний об'ємний модуль пружності бетону на першому етапі деформування.

Зсув на октаедричних майданчиках визначається за формулою [133]

$$\bar{\gamma} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \quad (\text{Б.26})$$

де  $\varepsilon_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – головні лінійні деформації. У разі одноосного стиску  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu_b\varepsilon$  і (Б.26) приймає наступний вигляд:

$$\bar{\gamma} = \frac{2\sqrt{2}}{3} |\varepsilon| (1 + \nu_b). \quad (\text{Б.27})$$

Аналогічно отримуємо співвідношення

$$\bar{\tau} = \sqrt{2} |\sigma| / 3 \quad (\text{Б.28})$$

( $\bar{\tau}$  – октаедричні дотичні напруження).

Використовуючи (Б.28) і (Б.27), знаходимо, що на нульовому етапі навантаження

$$\bar{\gamma} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{|\sigma| [1 + \nu_b(\eta)]}{E^{[0]}V_b(\eta)}.$$



Ця рівність може бути представлено так

$$\rho(\eta) = B_b \eta g(\eta). \quad (\text{Б.29})$$

Тут

$$\rho = \frac{\bar{\gamma}}{|\varepsilon_b|}, B_b = \frac{2\sqrt{2}\hat{\sigma}_b(1+\nu_0)}{3E^{[0]}\hat{\varepsilon}_b}, g(\eta) = \frac{1+\nu_b(\eta)}{(1+\nu_0)V_b(\eta)}. \quad (\text{Б.30})$$

На першому етапі деформування співвідношення (Б.28) і (Б.30) приймають такий вигляд (у нижченаведених формулах (Б.31)–(Б.39)  $j = 1$ ):

$$\Delta\bar{\gamma}_j = \frac{2\sqrt{2} |k_j \sigma_j^* + \Delta\sigma_j| [1 + \nu_j(\Delta\eta_j)]}{3 E_j^{[0]} V_j(\Delta\eta_j)} - k_j \bar{\gamma}_j^*, \quad (\text{Б.31})$$

де  $\Delta\bar{\gamma}_j = \bar{\gamma} - \bar{\gamma}_j^*$  ( $\bar{\gamma}_j^*$  – зсув на октаедричному майданчику при дії на колону стискаючої сили  $N_j$ ),

$$\Delta\rho_j(\Delta\eta_j) = B_j(k_j \eta_j^* + \Delta\eta_j) g_j(\Delta\eta_j) - k_j \rho_j^* \quad (\text{Б.32})$$

( $\Delta\rho_j = \rho - \rho_j^*$ ,  $\rho_j^* = \bar{\gamma}_j^* / |\hat{\varepsilon}_b|$ ),  $B_j = B_b$ ).

У формулі (Б.32)

$$g_j(\Delta\eta_j) = \frac{1 + \nu_j(\Delta\eta_j)}{(1 + \nu_0) V_j(\Delta\eta_j)}. \quad (\text{Б.33})$$

Функція  $\rho(\eta)$  є монотонно зростаючою на відрізку  $[0,1]$ , а отже, є монотонно зростаючою і функція  $\Delta\rho_j(\Delta\eta_j)$  на відрізку  $[0, 1 - \eta_j^*]$ . Тому на цьому відрізку функція  $\Delta\rho_j(\Delta\eta_j)$  оборотна. Будемо розшукувати функцію, зворотну (Б.32), в наступному вигляді:

$$\Delta\eta_j(\Delta\rho_j) = \frac{1}{B_j} \Delta\rho_j [1 + \psi_j(\Delta\rho_j)], \quad (\text{Б.34})$$

де

$$\psi_j(\Delta\rho_j) = \sum_{k=0}^2 \psi_{j,k} \Delta\rho_j^k.$$

Як і  $\chi_{j,k}$  ( $k = 0,1,2$ ) будемо визначати коефіцієнти  $\psi_{j,k}$  ( $k = 0,1,2$ ) з наступних умов:

$$\Delta\eta_j'(0) = 1/\Delta\rho_j'(0), \Delta\eta_j(\Delta_1\rho_j) = \Delta_1\eta_j, \Delta\eta_j(\Delta_2\rho_j) = \Delta_2\eta_j. \quad (\text{Б.35})$$

в яких  $\Delta_1 \rho_j$  і  $\Delta_2 \rho_j$  знаходяться з рівності

$$\Delta_1 \rho_j = \Delta \rho_j (\Delta_1 \eta_j), \Delta_2 \rho_j = \Delta \rho_j (\Delta_2 \eta_j). \quad (\text{Б.36})$$

З першого з умов (Б.35) знаходимо

$$\psi_{j,0} = 1/g_j(0) - 1, \quad (\text{Б.37})$$

а виходячи з другого і третього умов (Б.35) будемо систему лінійних рівнянь відносно  $\psi_{j,k}$  ( $k = 1, 2$ ), аналогічну (Б.37), вирішуючи яку отримуємо

$$\begin{aligned} \psi_{j,1} &= [(G_{j,1} - \psi_{j,0})\Delta_2 \rho_j^2 - (G_{j,2} - \psi_{j,0})\Delta_1 \rho_j^2] / [\Delta_1 \rho_j \Delta_2 \rho_j (\Delta_2 \rho_j - \Delta_1 \rho_j)], \\ \psi_{j,2} &= [(G_{j,2} - \psi_{j,0})\Delta_1 \rho_j - (G_{j,1} - \psi_{j,0})\Delta_2 \rho_j] / [\Delta_1 \rho_j \Delta_2 \rho_j (\Delta_2 \rho_j - \Delta_1 \rho_j)]. \end{aligned} \quad (\text{Б.38})$$

$$(G_{j,1} = 1/g_j(\Delta_1 \eta_j) - 1, G_{j,2} = 1/g_j(\Delta_2 \eta_j) - 1).$$

Звідси і з (Б.28) і (Б.35) випливає

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\tau}_j &= G_j(\Delta \bar{\gamma}_j) \Delta \bar{\gamma}_j, \\ G_j(\Delta \bar{\gamma}_j) &= G_j^{[0]} [1 + \psi_j(\Delta \bar{\gamma}_j / |\hat{\epsilon}_b|)]. \end{aligned} \quad (\text{Б.39})$$

( $G_j^{[0]} = \sqrt{2} \hat{\sigma}_b / (3B_j \hat{\epsilon}_b)$ ). Зауважимо, що при  $j = 1$

$$G_j^{[0]} = G^{[0]}$$

( $G^{[0]}$  – начальный объемный модуль упругости бетона).

Перша рівність (Б.39) означає, що  $G_1(\Delta \bar{\gamma}_1)$  є січний модуль зсуву бетону на першому етапі деформування колони.

Нехай тепер величина стискаючої сили починає зменшуватися, тобто починається процес розвантаження при стиску (назвемо його другим етапом деформування). Діаграма деформування описується [78] наступним співвідношенням (в формулах (Б.40)–(Б.42) параметр  $j = 2$ ):

$$\Delta \varepsilon_j(\Delta \sigma_j) = \Delta \sigma_j / [E^{[0]} V_j(\Delta \eta_j)], \quad (\text{Б.40})$$

де

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_j &= \varepsilon - \varepsilon_j^*, \quad \varepsilon_j^* = \sigma_j^* / [E^{[0]} V_j(\eta_j^*)], \quad \Delta \sigma_j = \sigma - \sigma_j^*, \\ \Delta \eta_j &= \eta - \eta_j^* = \Delta \sigma_j / \hat{\sigma}_b, \\ V_j(\Delta \eta_j) &= \check{V}_j + (V_{j,0} - \check{V}_j) \sqrt{1 - \omega_{j,1} |\Delta \eta_j| - \omega_{j,2} \Delta \eta_j^2}, \end{aligned} \quad (\text{Б.41})$$

$$V_{j,0} = 1/V_{j-1}(\eta_j^* - \eta_{j-1}^*), \tilde{V}_j = 0,7 + 0,3V_{j-1}(\eta_j^* - \eta_{j-1}^*),$$

$$\omega_{j,1} = (2 - 2,5\tilde{V}_j)/\eta_j^*, \omega_{j,2} = -(1 - 2,5\tilde{V}_j)/(\eta_j^*)^2.$$

Таким чином, формули (Б.12)–(Б.13) і формули (Б.15)–(Б.25) і (Б.31)–(Б.39) застосовні і до другого етапу (тобто для  $j = 2$ )., При цьому

$$k_j = 0, E_j^{[0]} = E^{[0]}, A_j = A_b, B_j = B_b, K_j^{[0]} = K^{[0]}, G_j^{[0]} = G^{[0]}. \quad (\text{Б.42})$$

В результаті визначаємо  $K_2(\Delta\bar{\varepsilon}_2)$  і  $G_2(\Delta\bar{\gamma}_2)$ , які представляють собою січні об'ємний модуль пружності і модуль зсуву бетону на другому етапі деформування.

На рис. Б.1 ділянку діаграми, що відповідає цьому етапу, зображена кривою  $X_2X_3$ , причому координати  $\varepsilon_3^*$  і  $\sigma_3^*$  точки  $X_3$  визначаються наступним чином:

$$\sigma_3^* = N_3^* / S, \varepsilon_3^* = \Delta \varepsilon_2(\sigma_3^* - \sigma_2^*) + \varepsilon_2^*.$$

Наступний третій етап деформування колони складається в збільшенні величини стискаючої сили від  $N_3^*$  до  $N_4^*$ , тобто він являє собою процес навантаження при стиску після розвантаження при стиску. Будемо називати такий процес повторним стиском. Згідно [78] при повторному стиску діаграма деформування бетону описується залежністю

$$\varepsilon = \sigma / [E_{cc}^{[0]} V_{cc}(\eta)] + \varepsilon_0 \quad (\text{Б.43})$$

(Індекс  $cc$  означає повторний стиск), де

$$V_{cc}(\eta) = \hat{V}_{cc} + (V_{0cc} - \hat{V}_{cc}) \sqrt{1 - \omega_{cc,1} \eta / \tilde{\gamma}_1 - \omega_{cc,2} (\eta / \tilde{\gamma}_1)^2},$$

$$\omega_{cc,1} = 2 - 2,5\hat{V}_{cc} + [36V_1(\Delta_1 \eta_1) - 28] \sqrt{\hat{V}_{cc} - \hat{V}_b},$$

$$\omega_{cc,2} = 1 - \omega_{cc,1}, \hat{\sigma}_{cc} = \tilde{\gamma}_1 \hat{\sigma}_b, \hat{\varepsilon}_{cc} = \tilde{\gamma}_2 \hat{\varepsilon}_b, \quad (\text{Б.44})$$

$$E_{cc}^{[0]} = \tilde{\gamma}_3 E^{[0]}, \hat{V}_{cc} = \hat{\sigma}_{cc} / (E_{cc}^{[0]} \hat{\varepsilon}_{cc}), V_{0cc} = 1,$$

$$\tilde{\gamma}_i = 1 + \beta_{1i} \phi_v + \beta_{2i} \phi_v^2 + \beta_{3i} \phi_v^3 \quad (i = 1, 2, 3), \phi_v = \frac{1 - V_1(\eta_{I\Delta 1})}{1 - \hat{V}_b},$$

$\varepsilon_0$  – постійна, яка визначається з умови проходження графіка функції (3.106) через точку  $X_{III}$ .

При повторному стиску коефіцієнти  $\beta_{ki}$  ( $k, i = 1, 2, 3$ ) рівні [78]:

$$\beta_{1,1} = 0,86, \quad \beta_{2,1} = 1,78, \quad \beta_{3,1} = 0,77,$$

$$\beta_{1,2} = -0,2, \quad \beta_{2,2} = 0, \quad \beta_{3,2} = 0,$$

$$\beta_{1,3} = 0,43, \quad \beta_{2,3} = -0,88, \quad \beta_{3,3} = 0,37.$$

Графік функції (3.131) при  $\varepsilon_0 = 0$  наведений на рис. Б.1 у вигляді кривої  $OX_0$ .

**Зауваження.** Прирости  $\varepsilon$  і  $\sigma$ , а також величини, пов'язані з ними, не залежать від величини  $\varepsilon_0$ , тому для подальших обчислень можна покласти  $\varepsilon_0 = 0$ .

Відрізок  $X_3X_4$  діаграми, відповідний третьому етапу, запишемо у вигляді рівняння в приростах:

$$\Delta\varepsilon_3(\Delta\sigma_3) = (\sigma_3^* + \Delta\sigma_3) / [E_3^{[0]}V_3(\Delta\eta_3)] - \varepsilon_3^* \quad (\text{Б.45})$$

де

$$\Delta\varepsilon_3 = \varepsilon - \varepsilon_3^*, \quad \Delta\sigma_3 = \sigma - \sigma_3^*, \quad \Delta\eta_3 = \eta - \eta_3^*, \quad \eta_3^* = \sigma_3^* / \hat{\sigma}_b,$$

$$V_3(\Delta\eta_3) = \hat{V}_3 + (V_{03} - \hat{V}_3) \sqrt{1 - \omega_{3,1}(\eta_3^* + \Delta\eta_3) - \omega_{3,2}(\eta_3^* + \Delta\eta_3)^2}, \quad (\text{Б.46})$$

$$\hat{V}_3 = \hat{V}_{cc}, \quad V_{03} = V_{0cc}, \quad \omega_{3,1} = \omega_{cc,1} / \tilde{\gamma}_1, \quad \omega_{3,2} = \omega_{cc,2} / \tilde{\gamma}_1^2, \quad E_3^{[0]} = E_{cc}^{[0]}.$$

Таким чином, і в цьому випадку (тобто для  $j = 3$ ) застосовні формули (Б.12) – (Б.13) і формули (Б.15) – (Б.25) і (Б.31) – (Б.39). Замість (Б.41) використовуємо (Б.44), (Б.46) і

$$k_j = 1, \quad A_j = A_b / \tilde{\gamma}_3, \quad B_j = B_b / \tilde{\gamma}_3. \quad (\text{Б.47})$$

Тоді

$$K_j^{[0]} = K^{[0]} \tilde{\gamma}_3, \quad G_j^{[0]} = G^{[0]} \tilde{\gamma}_3$$

і формули (Б.25) і (Б.39) будуть виглядати так:

$$\Delta p_j = 3K_j(\Delta e_j)\Delta e_j, \quad K_j(\Delta e_j) = K^{[0]}[1 + \tilde{\delta}_j + (1 + \tilde{\delta}_j)\chi_j(\Delta e_j / \hat{\varepsilon}_b)],$$

$$\Delta \bar{\tau}_j = G_j(\Delta \bar{\gamma}_j)\Delta \bar{\gamma}_j, \quad G_j(\Delta \bar{\gamma}_j) = G^{[0]}[1 + \tilde{\delta}_j + (1 + \tilde{\delta}_j)\psi_j(\Delta \bar{\gamma}_j / |\hat{\varepsilon}_b|)] \quad (\text{Б.48})$$

$$(\tilde{\delta}_j = \tilde{\gamma}_3 - 1).$$

В результаті визначаємо  $K_3(\Delta \bar{\varepsilon}_3)$  і  $G_3(\Delta \bar{\gamma}_3)$ , які представляють собою січні об'ємний модуль пружності і модуль зсуву бетону на третьому етапі деформування.

При подальшій зміні стискаючої сили за циклічним законом на етапах розвантаження визначення об'ємного модуля пружності і модуля зсуву

проводиться аналогічно другому етапу деформування, а на етапах навантаження – аналогічно третьому.

## **В. Визначення січних об'ємних модулів пружності і зсуву для бетону при повторному навантаженні**

Розглянемо тепер такі значення поздовжньої сили  $N$ , при яких точка з координатами  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  знаходиться на висхідній гілці діаграми  $(\sigma, \varepsilon)$  (тобто  $\hat{\sigma}_b < \sigma < \hat{\sigma}_{bt}$ ,  $\sigma = N/S$ ).

Спочатку викладемо узагальнення алгоритму визначення об'ємних модулів пружності і зсуву для бетону при одноосьовому циклічному завантаженні, коли не передбачається сталість знака поздовжньої сили. Розіб'ємо всі етапи на три типи і введемо спеціальний параметр  $Q$  для характеристики кожного з етапів. До першого типу віднесемо етапи первинного навантаження, яким не передує етап розвантаження. При цьому параметр  $Q$  набуває таких значень:  $p_s$  (первинне навантаження при стиску),  $p_r$  (первинне навантаження при розтязі). До другого типу віднесемо етапи розвантаження, при яких параметр  $Q$  приймає два значення –  $r_s$  (розвантаження при стиску) і  $r_t$  (розвантаження при розтязі). До третього типу віднесемо етапи повторного навантаження. Параметр  $Q$  набуває таких значень:  $n_{ss}$  (навантаження при стиску після розвантаження при стиску, тобто повторний стиск),  $n_{st}$  (навантаження при розтязі після розвантаження при стиску),  $n_{ts}$  (навантаження при стиску після розвантаження при розтязі).

Відрізок  $X_j X_{j+1}$  діаграми, відповідний етапу з номером  $j$ , записується в наступному вигляді:

$$\Delta \varepsilon_j(\Delta \sigma_j) = (k_j \sigma_j^* + \Delta \sigma_j) / [E_j^{[0]} V_j(\Delta \eta_j)] - k_j \varepsilon_j^*, \quad (\text{Б.49})$$

де  $\Delta \varepsilon_j = \varepsilon - \varepsilon_j^*$ ,  $\Delta \sigma_j = \sigma - \sigma_j^*$ ,  $\Delta \eta_j = \eta - \eta_j^*$ ,  $V_j$  – коефіцієнт зміни січного модуля пружності:

$$V_j(\Delta \eta_j) = \hat{V}_j + (V_{j0} - \hat{V}_j) \sqrt{1 - \omega_{j1} |k_j \eta_j^* + \Delta \eta_j| - \omega_{j2} (k_j \eta_j^* + \Delta \eta_j)^2}. \quad (\text{Б.50})$$

Тут  $\eta$  – рівень напружень:  $\eta = \sigma / \hat{\sigma}_m$  ( $m$  – індекс, який приймає два значення:  $b$  при стиску і  $bt$  при розтязі; останній символ в значенні параметра  $Q$  ( $c$  або  $t$ ) визначає значення індексу  $m$ );  $\sigma_j^*$ ,  $\varepsilon_j^*$ ,  $\eta_j^*$  – значення напружень, відносних поздовжніх деформацій і рівня напружень на початку етапу;  $E_j^{[0]}$ ,  $\hat{V}_j$ ,  $V_{j0}$ ,  $\omega_{j1}$  і  $\omega_{j2}$  – величини, значення яких визначаються параметром  $Q_j$ ;  $k_j$  – множник, який визначається за наступним правилом:

$$k_j = 1 \text{ при навантаженні, } k_j = 0 \text{ при розвантаженні,} \quad (\text{Б.51})$$

тобто перший символ в значенні параметра  $Q$  ( $n$  або  $p$ ) визначає значення цього множника.

При  $Q_j=nc$  або при  $Q_j=nt$  (тобто для етапу першого типу)

$$\begin{aligned} k_j &= 1, E_j^{[0]} = E^{[0]}, \hat{V}_j = \hat{V}_m = \hat{\sigma}_m / [E^{[0]} \hat{\varepsilon}_m], V_{j0} = 1, \\ \omega_{j1} &= 2 - 2,5\hat{V}_m, \omega_{j2} = 1 - \omega_{j1} \end{aligned} \quad (\text{Б.52})$$

( $E^{[0]}$  – початковий модуль пружності бетону).

При  $Q_j=pc$  або при  $Q_j=pt$  (тобто для етапу другого типу)

$$\begin{aligned} k_j &= 0, E_j^{[0]} = E^{[0]}, \hat{V}_j = 0,7 + 0,3V_{j-1}(\eta_j^* - \eta_{j-1}^*), \\ V_{j0} &= 1/V_{j-1}(\eta_j^* - \eta_{j-1}^*), \\ \omega_{j1} &= (2 - 2,5\hat{V}_j) / \eta_j^*, \omega_{j2} = -(1 - 2,5\hat{V}_j) / (\eta_j^*)^2. \end{aligned} \quad (\text{Б.53})$$

При  $Q_j=ncc$ ,  $Q_j=nct$  або при  $Q_j=ntc$  (тобто для етапу третього типу)

$$\begin{aligned} k_j &= 1, E_j^{[0]} = \tilde{\gamma}_3 E^{[0]}, \hat{V}_j = \hat{\sigma}_j^* / (E_j^{[0]} \hat{\varepsilon}_j^*), \hat{\sigma}_j = \tilde{\gamma}_1 \hat{\sigma}_m, \hat{\varepsilon}_j = \tilde{\gamma}_2 \hat{\varepsilon}_m, \\ V_{j0} &= 1, \omega_{j1} = [2 - 2,5\hat{V}_j + (36/V_{j-1,0} - 28)\sqrt{|\hat{V}_j - \hat{V}_m|}] / \tilde{\gamma}_1, \\ \omega_{j2} &= [-1 + 2,5\hat{V}_j - (36/V_{j-1,0} - 28)\sqrt{|\hat{V}_j - \hat{V}_m|}] / \tilde{\gamma}_1^2, \\ \tilde{\gamma}_i &= 1 + \beta_{1i}\phi_v + \beta_{2i}\phi_v^2 + \beta_{3i}\phi_v^3 \quad (i = 1,2,3), \phi_v = (1 - 1/V_{j-1,0}) / (1 - \hat{V}_m). \end{aligned} \quad (\text{Б.54})$$

Величини  $\beta_{ki}$  ( $k, i = 1,2,3$ ) приймають наступні значення [78]:

при  $Q_j=ncc$

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= 0,86, \quad \beta_{2,1} = 1,78, \quad \beta_{3,1} = 0,77, \\ \beta_{1,2} &= -0,2, \quad \beta_{2,2} = 0, \quad \beta_{3,2} = 0, \\ \beta_{1,3} &= 0,43, \quad \beta_{2,3} = -0,88, \quad \beta_{3,3} = 0,37; \end{aligned} \quad (\text{Б.55})$$

при  $Q_j = \text{нст}$

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= -0,55, \beta_{2,1} = 0,1, \beta_{3,1} = 0, \\ \beta_{1,2} &= 0,2, \beta_{2,2} = 0, \beta_{3,2} = 0, \\ \beta_{1,3} &= -0,27, \beta_{2,3} = -0,02, \beta_{3,3} = 0; \end{aligned} \quad (\text{Б.56})$$

при  $Q_j = \text{нтс}$

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= -0,17, \beta_{2,1} = 0,02, \beta_{3,1} = 0, \\ \beta_{1,2} &= 0,13, \beta_{2,2} = -0,12, \beta_{3,2} = 0, \\ \beta_{1,3} &= -0,06, \beta_{2,3} = -0,02, \beta_{3,3} = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.57})$$

Середня відносна деформація (середнє подовження) при одноосьовому подовженні (стиску) може бути записана так

$$\bar{\varepsilon}(\sigma) = \frac{\sigma[1 - 2\nu_m(\eta)]}{3E^{[0]}V_m(\eta)}, \quad (\text{Б.58})$$

де  $\nu_m$  – коефіцієнт Пуассона [78]:

$$\nu_m(\eta) = \hat{\nu}_m + (\nu_0 - \hat{\nu}_m)\sqrt{1 - \eta^2} \quad (\text{Б.59})$$

$$(\nu_0 = 0,2, \hat{\nu}_b = \nu_0 + 1 - \sqrt[3]{\hat{V}_b}, \hat{\nu}_{bt} = \nu_0 \hat{V}_{bt}).$$

З (Б.49) і (Б.58) знаходимо, що

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\varepsilon}_j(\Delta\sigma_j) &= (k_j\sigma_j^* + \Delta\sigma_j)(1 - 2\nu_j(\Delta\eta_j))/(3E^{[0]}V_j(\Delta\eta_j)) - k_j\bar{\varepsilon}_j^* \\ (\Delta\bar{\varepsilon}_j &= \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_j^*, \bar{\varepsilon}_j^* = \bar{\varepsilon}(\sigma_j^*), \nu_j(\Delta\eta_j) = \nu_m(\eta_j^* + \Delta\eta_j)). \end{aligned} \quad (\text{Б.60})$$

Введемо величину  $\zeta$ , яка характеризує рівень середньої відносної деформації:

$$\zeta = \bar{\varepsilon} / \hat{\varepsilon}_m. \quad (\text{Б.61})$$

Тоді (Б.60) запишеться так

$$\Delta\zeta_j(\Delta\eta_j) = A_j(k_j\eta_j^* + \Delta\eta_j)f_j(\Delta\eta_j) - k_j\zeta_j^*. \quad (\text{Б.62})$$

Тут

$$\Delta\zeta_j = \zeta - \zeta_j^*, \zeta_j^* = \bar{\varepsilon}_j^* / \hat{\varepsilon}_b, f_j(\Delta\eta_j) = [1 - 2\nu_j(\Delta\eta_j)] / [(1 - 2\nu_0)V_j(\Delta\eta_j)]. \quad (\text{Б.63})$$

Величина  $A_j$  визначається так: спочатку знаходимо  $A_m$

$$A_m = \frac{\hat{\sigma}_m(1 - 2\nu_0)}{3E^{[0]}\hat{\varepsilon}_m}, \quad (\text{Б.64})$$

ПОТІМ ВВАЖАЄМО

$$\begin{aligned} A_j &= A_m \text{ при } Q_j = nc, nt, pc, pt; \\ A_j &= A_m / \tilde{\gamma}_3 \text{ при } Q_j = ncc, nct, ntc. \end{aligned} \quad (\text{Б.65})$$

Можна переконатися, що функція (Б.62) монотонна на відрізку  $[0, \eta_j^{**} - \eta_j^*]$ , де а)  $\eta_j^{**} \leq 1$  ( $1 - \eta_j^{**} \ll 1$ ) при  $Q_j = nc, nt$ ; б)  $\eta_j^{**} \leq \hat{\eta}_j$  ( $\hat{\eta}_j = \hat{\sigma}_j / \hat{\sigma}_m$ ,  $\hat{\eta}_j - \eta_j^{**} \ll 1$ ) при  $Q_j = ncc, nct, ntc$ ; в)  $\eta_j^{**} = 0$  при  $Q_j = pc, pt$ . Величину  $\eta_j^{**}$  можна знайти з умови

$$\frac{\Delta d\zeta_j(\Delta\eta_j)}{d\Delta\eta_j} = 0. \quad (\text{Б.66})$$

З монотонності функції  $\Delta\zeta_j(\Delta\eta_j)$  на відрізку  $[0, \eta_j^{**} - \eta_j^*]$  випливає, що вона оборотна на цьому відрізку (передбачається, що у випадках а) і б)  $\eta \leq \eta_j^{**}$ ). Функція, зворотна  $\Delta\zeta_j(\Delta\eta_j)$ , шукається в наступному вигляді:

$$\Delta\eta_j(\Delta\zeta_j) = \frac{1}{A_j} \Delta\zeta_j [1 + \chi_j(\Delta\zeta_j)], \quad (\text{Б.67})$$

де

$$\chi_j(\Delta\zeta_j) = \sum_{k=0}^2 \chi_{j,k} \Delta\zeta_j^k.$$

З умови

$$\Delta\eta_j'(0) = 1 / \Delta\zeta_j'(0) \quad (\text{Б.68})$$

знаходимо

$$\chi_{j,0} = 1 / f_j(0) - 1. \quad (\text{Б.69})$$

Вважаємо тепер

$$\Delta_1\eta_j = \eta_j^{**} - \eta_j^*, \quad (\text{Б.70})$$

а  $\Delta_2\eta_j$  ( $0 < \Delta_2\eta_j < \Delta_1\eta_j$ ) вибираємо довільно.

Знаходимо значення  $\Delta\zeta_j$  при  $\Delta\eta_j = \Delta_1\eta_j$  і  $\eta_{j\Delta} = \Delta_2\eta_j$ :

$$\Delta_1\zeta_j = \Delta\zeta_j(\Delta_1\eta_j), \quad \Delta_2\zeta_j = \Delta\zeta_j(\Delta_2\eta_j). \quad (\text{Б.71})$$

З умов



$$\Delta_1 \eta_j = \Delta \eta_j (\Delta_1 \zeta_j), \Delta_2 \eta_j = \eta \Delta_j (\Delta_2 \zeta_j) \quad (\text{Б.72})$$

отримуємо систему лінійних рівнянь

$$\Delta_1 \zeta_j \chi_{2,1} + \Delta_1 \zeta_j^2 \chi_{2,2} = F_{j,1} - \chi_{j,0},$$

$$\Delta_2 \zeta_j \chi_{j,1} + \Delta_2 \zeta_j^2 \chi_{j,2} = F_{j,2} - \chi_{j,0}$$

( $F_{j,1} = 1/f_j(\Delta_1 \eta_j) - 1$ ,  $F_{j,2} = 1/f_j(\Delta_2 \eta_j) - 1$ ), рішення якої має такий вигляд:

$$\chi_{j,1} = [(F_{j,1} - \chi_{j,0}) \Delta_2 \zeta_j^2 - (F_{j,2} - \chi_{j,0}) \Delta_1 \zeta_j^2] / [\Delta_1 \zeta_j \Delta_2 \zeta_j (\Delta_2 \zeta_j - \Delta_1 \zeta_j)], \quad (\text{Б.73})$$

$$\chi_{j,2} = [(F_{j,2} - \chi_{j,0}) \Delta_1 \zeta_j - (F_{j,1} - \chi_{j,0}) \Delta_2 \zeta_j] / [\Delta_1 \zeta_j \Delta_2 \zeta_j (\Delta_2 \zeta_j - \Delta_1 \zeta_j)].$$

Зауважимо, що середня напруження  $\bar{\sigma} = \sigma / 3$  при одноосьовому стиску. тоді приріст його  $\Delta \bar{\sigma}_1 = \Delta \sigma_1 / 3$ . Враховуючи це, отримуємо

$$\Delta \bar{\sigma}_j = 3K_j(\Delta \bar{\epsilon}_j) \Delta \bar{\epsilon}_j, \quad (\text{Б.74})$$

$$K_j(\Delta \bar{\epsilon}_j) = K^{[0]} [1 + \tilde{\delta}_j + (1 + \tilde{\delta}_j) \chi_j(\Delta \bar{\epsilon}_j / \hat{\epsilon}_b)]$$

( $K^{[0]}$  – початковий об'ємний модуль пружності бетону,  $\tilde{\delta}_j = 0$  при  $Q_j = нс, нт, рс, рт$  і  $\tilde{\delta}_j = \tilde{\gamma}_3 - 1$  при  $Q_j = нсс, нст, нтс$ ). Перша рівність (Б.74) означає, що  $K_j(\Delta \bar{\epsilon}_j)$  є січний об'ємний модуль пружності бетону на  $j$ -му етапі деформування.

Аналогічно (Б.49) можна записати рівність

$$\Delta \bar{\gamma}_j = \frac{2\sqrt{2} |k_j \sigma_j^* + \Delta \sigma_j| [1 + \nu_j(\Delta \eta_j)]}{3 E^{[0]} V_j(\Delta \eta_j)} - k_j \bar{\gamma}_j^* \quad (\text{Б.75})$$

де  $\Delta \bar{\gamma}_j = \bar{\gamma} - \bar{\gamma}_j^*$  ( $\bar{\gamma}$  – зсув на октаедричному майданчику,  $\bar{\gamma}_j^*$  – його значення на початку  $j$ -го етапу). Ввівши рівень зсуву на октаедричному майданчику

$$\rho = \frac{\bar{\gamma}}{|\epsilon_b|}, \quad (\text{Б.76})$$

запишемо (Б.75) так

$$\Delta \rho_j(\Delta \eta_j) = B_j(k_j \eta_j^* + \Delta \eta_j) g_j(\Delta \eta_j) - k_j \rho_j^* \quad (\text{Б.77})$$

$$g_j(\Delta \eta_j) = \frac{1 + \nu_j(\Delta \eta_j)}{(1 + \nu_0) V_j(\Delta \eta_j)}, \quad (\text{Б.78})$$

Тут  $\Delta\rho_j = \rho - \rho_j^*$ ,  $\rho_j^* = \bar{\gamma}_j^* / |\hat{\epsilon}_m|$ , а величина  $B_j$  визначається аналогічно  $A_j$ :

$$\begin{aligned} B_j &= B_m \text{ при } Q_j = nc, nt, pc, pt; \\ B_j &= B_m / \tilde{\gamma}_3 \text{ при } Q_j = ncc, nct, ntc; \\ B_m &= \frac{2\sqrt{2}\hat{\sigma}_m(1+\nu_0)}{3E^{[0]}\hat{\epsilon}_m}. \end{aligned} \quad (\text{Б.79})$$

Функція, зворотна (Б.77), шукається в наступному вигляді:

$$\Delta\eta_j(\Delta\rho_j) = \frac{1}{B_j} \Delta\rho_j [1 + \psi_j(\Delta\rho_j)], \quad (\text{Б.80})$$

де

$$\psi_j(\Delta\rho_j) = \sum_{k=0}^2 \psi_{j,k} \Delta\rho_j^k.$$

Як і  $\chi_{j,k}$  ( $k = 0, 1, 2$ ) коефіцієнти  $\psi_{j,k}$  ( $k = 0, 1, 2$ ) визначаються з наступних умов:

$$\Delta\eta_j'(0) = 1/\Delta\rho_j'(0), \Delta\eta_j(\Delta_1\rho_j) = \Delta_1\eta_j, \Delta\eta_j(\Delta_2\rho_j) = \Delta_2\eta_j. \quad (\text{Б.81})$$

в яких  $\Delta_1\rho_j$  і  $\Delta_2\rho_j$  знаходяться з рівностей

$$\Delta_1\rho_j = \Delta\rho_j(\Delta_1\eta_j), \Delta_2\rho_j = \Delta\rho_j(\Delta_2\eta_j). \quad (\text{Б.82})$$

З першого з умов (Б.81) випливає

$$\psi_{j,0} = 1/g_j(0) - 1, \quad (\text{Б.83})$$

а з другого і третього умов отримуємо

$$\begin{aligned} \psi_{j,1} &= [(G_{j,1} - \psi_{j,0})\Delta_2\rho_j^2 - (G_{j,2} - \psi_{j,0})\Delta_1\rho_j^2] / [\Delta_1\rho_j\Delta_2\rho_j(\Delta_2\rho_j - \Delta_1\rho_j)], \\ \psi_{j,2} &= [(G_{j,2} - \psi_{j,0})\Delta_1\rho_j - (G_{j,1} - \psi_{j,0})\Delta_2\rho_j] / [\Delta_1\rho_j\Delta_2\rho_j(\Delta_2\rho_j - \Delta_1\rho_j)]. \end{aligned} \quad (\text{Б.84})$$

$$(G_{j,1} = 1/g_j(\Delta_1\eta_j) - 1, G_{j,2} = 1/g_j(\Delta_2\eta_j) - 1).$$

З (Б.76) і (Б.80) виходить

$$\begin{aligned} \Delta\tau_j &= G_j(\Delta\gamma_j)\Delta\gamma_j, \\ G_j(\Delta\gamma_j) &= G^{[0]}[1 + \tilde{\delta}_j + (1 + \tilde{\delta}_j)\psi_j(\Delta\gamma_j/|\hat{\epsilon}_m|)] \end{aligned} \quad (\text{Б.85})$$

( $G^{[0]}$  – початковий модуль зсуву бетону,  $\tilde{\delta}_j = 0$  при  $Q_j = nc, nt, pc, pt$  і

$\tilde{\delta}_j = \tilde{\gamma}_3 - 1$  при  $Q_j = ncc, nct, ntc$ ). Перша рівність (Б.85) означає, що  $G_j(\Delta\gamma_j)$  є

січний модуль зсуву бетону на  $j$ -му етапі деформування колони.

**Зауваження.** Величини  $\hat{\varepsilon}_b$  і  $\hat{\varepsilon}_{bt}$  визначаються з формул

$$\hat{\varepsilon}_b = -\frac{(18 + R_{b,ser})(62R_{b,ser} + 0.675R_{b,ser}^2 + 22)}{(53000 - 62R_{b,ser})(7R_{b,ser} + R_{b,ser}^2 + 22)}, \quad (\text{Б.86})$$

$$\hat{\varepsilon}_{bt} = R_{bt,ser} / (E_0 \hat{V}_{bt}), \quad \hat{V}_{bt} = 0,6 + 0,15R_{bt,ser}. \quad (\text{Б.87})$$

На початковому етапі деформування колони (званому «нульовим», на рис. Б.2 він зображений у вигляді відрізка  $0X_1$  діаграми  $(\sigma, \varepsilon)$ ) вона відчуває стиск і величина поздовжньої сили збільшується від нуля до деякого значення  $|N_1^*| < |\hat{N}|$ ,  $\hat{N} = \hat{\sigma}_b S$ . В кінці цього етапу нормальні напруження на поперечних перерізах і відносна поздовжня деформація в колоні дорівнюють  $\sigma_1^*$  і  $\varepsilon_1^*$ .

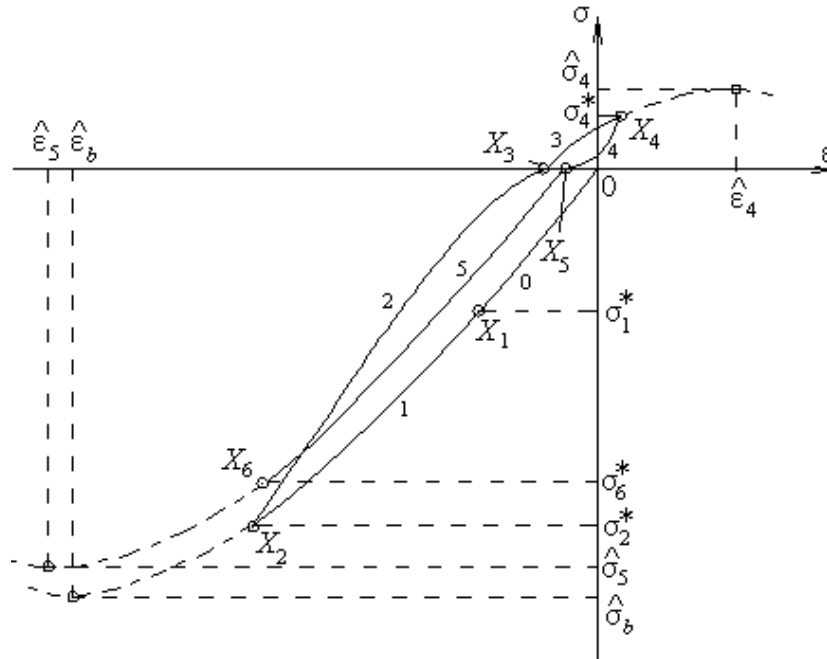


Рис. Б.2 Діаграма деформування бетону при одноцикловому навантаженні

Припустимо, що величина поздовжньої стискаючої сили  $N$  продовжує зростати. Процес збільшення  $|N|$  від  $|N_1^*|$  до деякого значення  $|N_2^*| \ll |\hat{N}|$  і супутні зміни  $\sigma$  і  $\varepsilon$  іменуються першим етапом деформування колони. Він відноситься до першого типу етапів. Відповідний відрізок  $X_1X_2$  діаграми представлений на рис. Б.2. Нехай тепер величина стискаючої сили  $N$  починає спадати, тобто починається процес розвантаження. Цей етап деформування

колони отримав номер  $j = 2$ . Він відноситься до другого типу етапів. Раніше передбачалося, що сила  $N_3^*$ , відповідна кінцю етапу, залишалася стискаючою. Тепер приймемо, що  $N_3^* = 0$ . Далі сила, що діє на колону, стає розтягуючою, тобто починається процес навантаження при розтязі. Він отримує номер 3. Поздовжня сила збільшується при цьому від нуля до деякого значення  $N_4^* < \hat{N}_{bt} = \hat{\sigma}_{bt} S$ . Цей етап відноситься до третього типу. Відповідний відрізок діаграми представлений у вигляді кривої  $X_3X_4$  на рис. Б.2. Наступний етап 4 деформування колони складається в зменшенні поздовжньої сили від  $N_4^*$  до нуля, тобто він є процесом розвантаження і зображений на рис. Б.2 у вигляді відрізка  $X_4X_5$  діаграми  $(\sigma, \epsilon)$ . Цей етап – другого типу. Нарешті, етап 5 є процесом навантаження при стиску і складається в збільшенні модуля поздовжньої сили від нуля до  $|N_6^*| < |\hat{N}_b|$ . На рис. Б.2 він представлений відрізком  $X_5X_6$  діаграми. Цей етап відноситься до третього типу.

Передбачається, що подальша зміна поздовжньої сили полягає в повторенні циклу етапів 2–3–4–5.

Викладений алгоритм застосуємо до будь-якого етапу деформування колони. Для цього необхідно визначити значення параметрів  $Q$  і  $m$  на кожному з етапів.

**Етап 1:**  $Q_1 = nc$ ,  $m = b$ . Зауважимо, що  $\hat{\sigma}_b = R_{b,ser}$ . З формули (Б.4) визначаємо  $\hat{\epsilon}_b$ . Далі знаходимо  $k_1 = 1$ ,  $E_1^{[0]} = E^{[0]}$ ,  $\hat{V}_1 = \hat{V}_b = \hat{\sigma}_b / [E^{[0]}\hat{\epsilon}_b]$ ,  $\hat{V}_1 = \hat{V}_b = \hat{\sigma}_b / [E^{[0]}\hat{\epsilon}_b]$ ,  $V_{10} = 1$ ,  $\omega_{1,1} = 2 - 2,5\hat{V}_b$ ,  $\omega_{1,2} = 1 - \omega_{1,1}$ . Таким чином, функція

$$V_1(\Delta\eta_1) = \hat{V}_1 + (V_{1,0} - \hat{V}_1) \sqrt{1 - \omega_{1,1}(\eta_1^* + \Delta\eta_1) - \omega_{1,2}(\eta_1^* + \Delta\eta_1)^2}$$

цілком визначилася.

Потім з (Б.64) і (Б.65) отримуємо  $A_1 = A_b = \hat{\sigma}_b(1 - 2\nu_0)/(3E^{[0]}\hat{\epsilon}_b)$  і з (Б.53) і (Б.69) знаходимо  $\chi_{1,0}$ . Вважаємо, що

$$\Delta_1\eta_1 = \eta_2^* - \eta_1^*, \Delta_2\eta_1 = \Delta_1\eta_1/2,$$

і з (Б.62) визначаємо  $\Delta_1\zeta_1$  і  $\Delta_2\zeta_1$ . Потім за формулами (3.139) обчислюємо  $\chi_{1,1}$  і  $\chi_{1,2}$ . Нарешті, з (Б.74) знаходимо

$$K_1(\Delta\bar{\varepsilon}_1) = K^{[0]} \left[ 1 + \chi_{1,0} + \chi_{1,1} \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_1}{\hat{\varepsilon}_b} + \chi_{1,2} \left( \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_1}{\hat{\varepsilon}_b} \right)^2 \right].$$

Аналогічно, з (Б.79) визначаємо  $B_1$ , а з (Б.73), (Б.83) і (Б.84) коефіцієнти  $\psi_{1,0}$ ,  $\psi_{1,1}$  і  $\psi_{1,2}$ . Згідно (Б.85) отримуємо

$$G_1(\Delta\bar{\gamma}_1) = G^{[0]} \left[ 1 + \psi_{1,0} + \psi_{1,1} \frac{\Delta\bar{\gamma}_1}{|\hat{\varepsilon}_b|} + \psi_{1,2} \left( \frac{\Delta\bar{\gamma}_1}{|\hat{\varepsilon}_b|} \right)^2 \right].$$

**Етап 2:**  $Q_2 = pc$ ,  $m = b$ . З (Б.53) знаходимо

$$k_2 = 0, E_2^{[0]} = E^{[0]}, \hat{V}_2 = 0,7 + 0,3V_1(\eta_2^* - \eta_1^*), V_{2,0} = 1/V_1(\eta_2^* - \eta_1^*), \\ \omega_{2,1} = (2 - 2,5\hat{V}_2)/\eta_2^*, \omega_{II,2} = -(1 - 2,5\hat{V}_2)/(\eta_2^*)^2.$$

Таким чином, функція

$$\Delta V_2(\eta_2) = \hat{V}_2 + (V_{2,0} - \hat{V}_2) \sqrt{1 - \omega_{2,1} |\Delta\eta_2| - \omega_{2,2} \Delta\eta_2^2}$$

є цілком визначеною. Так само, як і на попередньому етапі, отримуємо

$$A_2 = A_b.$$

Далі, з (Б.63) і (Б.69) знаходимо  $\chi_{2,0}$ . Вважаємо ( $\eta_3 = 0$ )

$$\Delta_1\eta_2 = -\eta_2^*, \Delta_2\eta_2 = -\eta_2^*/2,$$

і з (Б.82) визначаємо  $\Delta_1\zeta_2$  і  $\Delta_2\zeta_2$ . Потім за формулами (Б.83) обчислюємо  $\chi_{2,1}$  і  $\chi_{2,2}$ . Нарешті, з (Б.84) знаходимо

$$K_2(\Delta\bar{\varepsilon}_2) = K^{[0]} \left[ 1 + \chi_{2,0} + \chi_{2,1} \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_2}{\hat{\varepsilon}_b} + \chi_{2,2} \left( \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_2}{\hat{\varepsilon}_b} \right)^2 \right].$$

Аналогічно, з (Б.79) визначаємо  $B_2$ , а з (Б.22), (Б.23), (Б.28) і (Б.29) коефіцієнти  $\psi_{2,0}$ ,  $\psi_{2,1}$  і  $\psi_{2,2}$ . Згідно (Б.85) отримуємо

$$G_2(\Delta\bar{\gamma}_2) = G^{[0]} \left[ 1 + \psi_{2,0} + \psi_{2,1} \frac{\Delta\bar{\gamma}_2}{|\hat{\varepsilon}_b|} + \psi_{2,2} \left( \frac{\Delta\bar{\gamma}_2}{|\hat{\varepsilon}_b|} \right)^2 \right].$$

**Етап 3:**  $Q_3 = nct$ ,  $m = bt$ ,  $k_3 = 1$ . Зауважимо, що  $\hat{\sigma}_{bt} = R_{bt,ser}$ . З формули (Б.4)

визначаємо  $\hat{\varepsilon}_{bt}$ . З (Б.56) знаходимо  $\beta_{ki}$  ( $k, i = 1, 2, 3$ ), потім слідуючи (Б.54)

обчислюємо  $\phi_v = (1 - 1/V_{2,0})/(1 - \hat{V}_3)$  і  $\tilde{\gamma}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Далі знаходимо

$$E_3^{[0]} = \tilde{\gamma}_3 E^{[0]}, \hat{\sigma}_3 = \tilde{\gamma}_1 \hat{\sigma}_{bt}, \hat{\varepsilon}_3 = \tilde{\gamma}_2 \hat{\varepsilon}_{bt}, \hat{V}_3 = \hat{\sigma}_3 / (E_3^{[0]} \hat{\varepsilon}_3), V_{3,0} = 1,$$

$$\omega_{3,1} = [2 - 2,5\hat{V}_3 + (36/V_{2,0} - 28)\sqrt{|\hat{V}_3 - \hat{V}_{bt}|}] / \tilde{\gamma}_1,$$

$$\omega_{3,2} = [-1 + 2,5\hat{V}_3 - (36/V_{2,0} - 28)\sqrt{|\hat{V}_3 - \hat{V}_{bt}|}] / \tilde{\gamma}_1^2,$$

звідки випливає, що функція

$$V_3(\Delta\eta_3) = \hat{V}_3 + (V_{3,0} - \hat{V}_3)\sqrt{1 - \omega_{3,1}\Delta\eta_3 - \omega_{3,2}\Delta\eta_3^2}$$

цілком визначилася.

З (Б.64) і (Б.65) отримуємо  $A_3 = A_{bt} / \tilde{\gamma}_3 = \hat{\sigma}_{bt} (1 - 2\nu_0) / (3\tilde{\gamma}_3 E^{[0]} \hat{\varepsilon}_{bt})$  і з (Б.63) і (Б.69) знаходимо  $\chi_{3,0}$ . Вважаємо

$$\eta_{3\Delta 1} = \eta_4^*, \eta_{3\Delta 2} = \eta_{3\Delta 1} / 2,$$

і з (Б.62) визначаємо  $\Delta_1 \zeta_3$  і  $\Delta_2 \zeta_3$ . Потім за формулами (Б.63) обчислюємо  $\chi_{3,1}$  і  $\chi_{3,2}$ . Нарешті, з (Б.74) знаходимо

$$K_3(\Delta\bar{\varepsilon}_3) = K^{[0]} [1 + \tilde{\delta}_3 + (1 + \tilde{\delta}_3)(\chi_{3,0} + \chi_{3,1} \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_3}{\hat{\varepsilon}_{bt}} + \chi_{3,2} (\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_3}{\hat{\varepsilon}_{bt}})^2)]$$

$$(\tilde{\delta}_3 = \tilde{\gamma}_3 - 1).$$

Аналогічно, з (Б.79) визначаємо  $B_3$ , а з (Б.77), (Б.78), (Б.83) і (Б.84) коефіцієнти  $\psi_{3,0}$ ,  $\psi_{3,1}$  і  $\psi_{3,2}$ . Згідно (Б.85) отримуємо

$$G_3(\Delta\bar{\gamma}_3) = G^{[0]} [1 + \tilde{\delta}_3 + (1 + \tilde{\delta}_3)(\psi_{3,0} + \psi_{3,1} \frac{\Delta\bar{\gamma}_3}{|\hat{\varepsilon}_{bt}|} + \psi_{3,2} (\frac{\Delta\bar{\gamma}_3}{|\hat{\varepsilon}_{bt}|})^2)].$$

**Етап 4** (аналогічний другому):  $Q_4 = pt$ ,  $m = bt$ . З (Б.53) знаходимо

$$k_4 = 0, E_4^{[0]} = E^{[0]}, \hat{V}_4 = 0,7 + 0,3V_3(\eta_4^* - \eta_3^*), V_{4,0} = 1/V_3(\eta_4^* - \eta_3^*),$$

$$\omega_{4,1} = (2 - 2,5\hat{V}_4) / \eta_4^*, \omega_{4,2} = -(1 - 2,5\hat{V}_4) / (\eta_4^*)^2.$$

В результаті функція  $V_4(\Delta\eta_4)$  стає цілком визначеною.

З (Б.65) отримуємо  $A_4 = A_{bt}$ , а з (3.170)  $B_4 = B_{bt}$ .

Аналогічно другому етапу визначаємо коефіцієнти  $\chi_{4,0}$ ,  $\chi_{4,1}$  і  $\chi_{4,2}$ , а також  $\psi_{4,0}$ ,  $\psi_{4,1}$  і  $\psi_{4,2}$ . З (Б.84) і (Б.85) знаходимо

$$K_4(\Delta\bar{\varepsilon}_4) = K^{[0]} [1 + \chi_{4,0} + \chi_{4,1} \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_4}{\hat{\varepsilon}_{bt}} + \chi_{4,2} (\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_4}{\hat{\varepsilon}_{bt}})^2],$$

$$G_4(\Delta\bar{\gamma}_4) = G^{[0]}[1 + \Psi_{4,0} + \Psi_{4,1} \frac{\Delta\bar{\gamma}_4}{|\hat{\epsilon}_{bt}|} + \Psi_{4,2} \left(\frac{\Delta\bar{\gamma}_4}{|\hat{\epsilon}_{bt}|}\right)^2].$$

**Этап 5** (аналогічний третьому):  $Q_5 = ntc$ ,  $m = b$ ,  $k_5 = 1$ . З (Б.56) визначаємо  $\beta_{ki}$  ( $k, i = 1, 2, 3$ ), потім знаходимо  $\phi_v = (1 - 1/V_{4,0}) / (1 - \hat{V}_5)$  и  $\tilde{\gamma}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). далі з (Б.54) знаходимо

$$\begin{aligned} E_5^{[0]} &= \tilde{\gamma}_3 E^{[0]}, \quad \hat{\sigma}_5 = \tilde{\gamma}_1 \hat{\sigma}_b, \quad \hat{\epsilon}_5 = \tilde{\gamma}_2 \hat{\epsilon}_b, \quad \hat{V}_5 = \hat{\sigma}_5 / (E_5^{[0]} \hat{\epsilon}_5), \quad V_{5,0} = 1, \\ \omega_{5,1} &= [2 - 2,5\hat{V}_5 + (36/V_{4,0} - 28)\sqrt{|\hat{V}_5 - \hat{V}_b|}] / \tilde{\gamma}_1, \\ \omega_{5,2} &= [-1 + 2,5\hat{V}_5 - (36/V_{4,0} - 28)\sqrt{|\hat{V}_5 - \hat{V}_b|}] / \tilde{\gamma}_1^2. \end{aligned}$$

Потім з (Б.64) і (Б.65) отримуємо  $A_5 = A_b / \tilde{\gamma}_3 = \hat{\sigma}_b (1 - 2v_0) / (3\tilde{\gamma}_3 E^{[0]} \hat{\epsilon}_b)$ , а з (Б.79) визначаємо  $B_5$ . далі обчислюємо  $\chi_{5,0}$ ,  $\chi_{5,1}$  і  $\chi_{5,2}$ , а також  $\Psi_{5,0}$ ,  $\Psi_{5,1}$  и  $\Psi_{5,2}$ . Нарешті, з (Б.74) і (Б.85) знаходимо

$$\begin{aligned} K_5(\Delta\bar{\epsilon}_5) &= K^{[0]}[1 + \tilde{\delta}_5 + (1 + \tilde{\delta}_5)(\chi_{5,0} + \chi_{5,1} \frac{\Delta\bar{\epsilon}_5}{\hat{\epsilon}_b} + \chi_{5,2} \left(\frac{\Delta\bar{\epsilon}_5}{\hat{\epsilon}_b}\right)^2)], \\ G_5(\Delta\bar{\gamma}_5) &= G^{[0]}[1 + \tilde{\delta}_5 + (1 + \tilde{\delta}_5)(\Psi_{5,0} + \Psi_{5,1} \frac{\Delta\bar{\gamma}_5}{|\hat{\epsilon}_b|} + \Psi_{5,2} \left(\frac{\Delta\bar{\gamma}_5}{|\hat{\epsilon}_b|}\right)^2)], \end{aligned}$$

де  $\tilde{\delta}_5 = \tilde{\gamma}_3 - 1$ .

**ДОДАТОК В****СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ  
ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ****Статті у фахових наукових виданнях України**

1. Фомин В.М. Уравнения плоского изгиба стержней с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 24, – Одесса, 2006. – С. 273 – 287.
2. Фомин В.М. Колебания консольной балки, несущей сосредоточенную массу, при учете геометрической нелинейности / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 25, – Одесса, 2007. – С. 266 – 274.
3. Фомин В.М. Определение секущих объемных модулей упругости и сдвига для бетона / Фомин В.М., Фомина И.П. // Вісник ОДАБА. Вып. 26, – Одесса, 2007. – С. 301 – 306.
4. Фомин В.М. Плоский изгиб консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 28 – Одесса, 2007. – С. 354 – 368.
5. Фомин В.М. Нестационарные колебания груза на консоли с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 30 – Одесса, 2008. – С. 301 – 310.
6. Фомин В.М. Нелинейная теория плоского изгиба железобетонных балок / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 32, – Одесса, 2008. – С. 313 – 324.
7. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (1) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 34(ч.1), – Одесса, 2009. – С. 367 – 369.
8. Фомин В.М. Колебания железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 38, – Одесса, 2010. – С. 626 – 630.



9. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского продольно-поперечного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.40, – Одесса, 2010. –С. 347 – 352.

10. Фомин В.М. Плоский изгиб продольно сжатой железобетонной консольной балки с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. //Вісник ОДАБА. Вып.41, – Одесса, 2011. – С. 307 – 311.

11. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.44, – Одесса, 2011. – С.345–353.

12. Фомин В.М. Плоский изгиб продольно сжатой ж.б.консольной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении / Фомин В.М., Фомина И.П. // Вісник ОДАБА. Вып.45, – Одесса,2012 . – С.279-284.

13. Фомин В.М. Колебания железобетонной консольной балки с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона при сложном нагружении / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 47,ч.1, – Одесса, 2012 . – С.364-368.

14. Фомин В.М. Об одном методе решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами/ Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 48, ч.2 , – Одесса, 2012 . – С.175–178.

15. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при статических расчетах статически неопределимых железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.49,ч.2 – Одесса,2013 . – С.239–245.

16. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при динамических расчетах статически неопределимых железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 50, ч.1 – Одесса, 2013. – С. 292-295.

17. Фомин В.М. Исследование динамики многоэтажной железобетонной рамы с жесткими ригелями с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.52 – Одесса,2013 . – С. 286-292.

18. Фомин В.М. Исследование динамической устойчивости железобетонной колонны с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.54 – Одесса,2014 . –С. 387-394.

19. Фомин В.М. Нелинейные квазистатические задачи для многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.55 – Одесса,2014 . –С. 273-281.

20. Фомин В.М. Нелинейные динамические задачи для многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.57 – Одесса,2015 . –С.445–448.

21. Фомин В.М. Нелинейные квазистатические задачи для многоэтажных многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.58 – Одесса, 2015. – С.372-381.

22. Фомин В.М. Нелинейные динамические задачи для многоэтажных многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона / Фомин В.М. //Будівельні конструкції: збірник наукових праць.– К.: ДП НДІБК, 2015. – Вип. 82 – С. 142 – 148.

23. Фомин В.М. Дифференциальные уравнения пространственного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.65 – Одесса, 2016. – С. 74 – 80 (індексується базою Index Copernicus).

24. Фомин В.М. Построение дифференциальных уравнений пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник КНУТД. №1 (106) – Киев, 2017. – С. 43 – 50 (індексується базою Index Copernicus).

25. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при исследовании квазистатических задач для железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона. Вісник КНУТД. Київ, 2017. №4 (112). С. 11 – 18 (індексується базою Index Copernicus).

### **Статті в зарубіжних періодичних виданнях**

26. V.M. Fomin. The Steady Antiplane Dynamic Contact Problem of a Periodic Structure for an Elastic Half-space // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol.60, No. 1, pp. 135-144, 1996( індексується базою Scopus).

27. Фомин В.М. Колебания длинных путепроводов / Фомин В.М. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. №3, - Москва, 2000. – С. 31 – 36.

28. Фомин В.М. Моделирование динамического процесса разрушения железобетонных рам при сейсмических воздействиях / Полевой С.А., Фомин В.М. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. №6, - Москва, 2001. – С. 27 - 32.

29. Фомин В.М. Нестационарная динамическая контактная задача для периодической системы штампов при произвольном нагружении / Фомин В.М. // Прикладная математика и механика, том 50, вып. 3, – Москва, 1986. – С. 461-469.

30. Фомин В.М. Исследование динамики железобетонных причальных сооружений эстакадного типа при сейсмических воздействиях / Дорофеев В.С. , Фомин В.М. // Проблемы современного бетона и железобетона. Вып.6 – Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, РУП «Институт БелНИИС», Минск, 2014.– С. 106-120.

*Наукові праці, які засвідчують апробацію результатів дисертації*

31. Фомин В.М. Модификация метода граничных элементов для решения нелинейных задач пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей пластичности бетона / В.М.Фомин // Тези доповідей III Міжнародної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки». – Одеса, 2016. – С. 163 – 167.

32. Фомин В.М. Применение МГЭ при расчете пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона/ В.М.Фомин //Збірка тез доповідей Міжнародної науково-технічної конференції, присв. 90-річчю від дня нар. д.т.н., проф. В.К. Егупова «Проблеми теорії та практики сейсмостійкого будівництва », – Одеса, 2016. – С. 105.

33. Фомин В.М. Дифференциальные уравнения пространственного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / В.М.Фомин // Тези доповідей IV Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки». – Одеса, 2017. – С. 206 – 210.

34. Фомин В.М. Построение алгоритма метода граничных элементов для решения нелинейных упругопластических задач сейсмостойкости железобетонных каркасных сооружений / В.М.Фомин, И.П. Фомина // Збірка наукових праць Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми збереження архітектурної спадщини півдня України», присвяченої пам'яті академіка В.А. Лісенка (1937-2016). – Одеса, 2017. – С. 195 – 198.

35. Фомин В.М. Расчет пространственного нелинейного упругопластического изгиба железобетонной рамы методом граничных элементов / В.М.Фомин // Тези доповідей 74-ї науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2018. – С. 76.

36. Фомин В.М. Исследование нелинейных пространственных колебаний железобетонной рамы методом граничных элементов /

В.М.Фомин // Тези доповідей 74-ї науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2018. – С. 77.

37. Volodymyr Fomin. Nonlinear Dynamic Analysis of a Reinforced Concrete Frame by the Boundary Element Method. /Volodymyr Fomin, Mariam Bekirova, Mykola Surianinov, Inna Fomina // 6<sup>th</sup> International Congress on Technology-Engineering and Science. July 19-20, 2018. Abstract Book. Kuala Lumpur.-Malaysia. P. 213.

***Наукові праці, що додатково відображають результати дисертації***

38. Фомин В.М. Определение объемного модуля упругости и модуля сдвига для бетона при циклическом нагружении (1) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 30, – Одесса, 2008. – С. 311 – 318.

39. Фомин В.М. Определение объемного модуля упругости и модуля сдвига для бетона при циклическом нагружении (2) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 32, – Одесса, 2008. – С. 325 – 334.

40. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (2) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 34 (ч.2), – Одесса, 2009. – С. 697 – 709.

41. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (3) / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып. 37, – Одесса, 2010. – С. 372 – 386.

43. Фомин В.М. Определение прогибов железобетонной консольной балки при учете пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.41, – Одесса, 2010. – С. 312 – 317.

43. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при исследовании статике и динамики железобетонных балок и рам с учетом

нелинейного поведения и пластичности бетона / Фомин В.М. // Вісник ОДАБА. Вып.48,ч.2 – Одесса,2012 . – С.179—186.

44. Фомин В.М. О применении метода граничных элементов к решению нелинейных упругопластических задач статики и динамики железобетонных балок и рам / В.М.Фомин, И.П. Фомина // Вісник ОДАБА. Вып. 50, ч.2 – Одесса, 2013. – С. 168-172.

#### ***Відомості про апробацію результатів дисертації:***

– Міжнародна науково-технічна конференція «Структуроутворення, міцність і механіка руйнування композиційних будівельних матеріалів і конструкцій», присв. 70-річчя дз дня народження д.т.н., проф. В.С. Дорофєєва (*Одеса, 20-21 вересня 2012 р. – очна участь*);

– міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми теорії і практики будівельних конструкцій », присв. 100-річчя від дня нар. д.т.н., проф. І.Є. Прокоповича (*Одеса, 15-17 квітня 2013 р.– очна участь*);

– міжнародна науково-технічна конференція «Гідротехнічне і транспортне будівництво » (*Одеса, 3-6 липня 2015 р. – очна участь*);

– Десята ювілейна всеукраїнська науково-технічна конференція «Будівництво в сейсмічних районах України» (*Одеса, 14-18 вересня 2015 р. – очна участь*);

– Третя міжнародна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки » (*Одеса-Київ, 10-14 травня 2016 р. – очна участь*);

– Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми теорії та практики сейсмостійкого будівництва », присв. 90-річчю від дня нар. д.т.н., проф. В.К. Єгупова (*Одеса, 25-29 жовтня 2016 р. – очна участь*);

– Четверта міжнародна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки » (*Одеса, 16-19 травня 2017 р. – очна участь*);

- Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми збереження архітектурної спадщини півдня України», присвяченої пам'яті академіка В.А. Лісенка (1937-2016) (*Одеса, 18 – 19 травня 2017 р. – очна участь*);
- 74-а науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури (*Одеса, 17-18 травня 2018 р. – очна участь*);
- 6th International Congress on Technology-Engineering and Science (*Kuala Lumpur.-Malaysia, July 19-20, 2018. – заочна участь*);

## ДОДАТОК Г

## ДОВІДКИ ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ  
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИвул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, тел./факс: (048) 723-69-04, тел. (048) 723-43-53,  
E-mail: [list@ogasa.org.ua](mailto:list@ogasa.org.ua), веб-сайт: [www.ogasa.org.ua](http://www.ogasa.org.ua), код ЄДРПОУ 02071033

05.04.2019 № 08-29-468

На № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

Довідка  
про впровадження результатів наукових досліджень

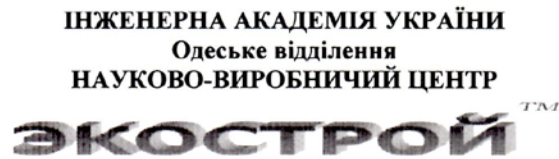
Результати досліджень за дисертаційною роботою здобувача Одеської державної академії будівництва та архітектури Фоміна Володимира Михайловича «Нелінійні динамічні моделі залізобетонних каркасних будівель і споруд з урахуванням пластичності матеріалів» у вигляді методів розрахунку, алгоритмів і програм впроваджені у навчальний процес Одеської державної академії будівництва та архітектури при проведенні лекційних та практичних занять для магістрів з дисциплін «Будівельна механіка» та «Залізобетонні конструкції».

Проректор з НПР



Крутій Ю.С.



**ПРОДОВЖЕННЯ ДОДАТКУ Г****Акт впровадження**

Від 15.03.2018 р.

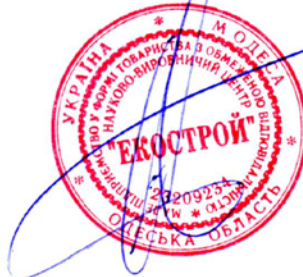
м. Одеса

Даний акт складений про те, що результати дисертаційної роботи «Нелінійні динамічні розрахункові моделі залізобетонних каркасних будівель і споруд з урахуванням пластичності матеріалів» (методики, алгоритми та програми) здобувача наукового ступеня доктора технічних наук Одеської державної академії будівництва та архітектури Фоміна Володимира Михайловича були частково використані при розрахунках конструкцій каркасних будівель.

Це дозволило скоротити термін виконання проектних робіт і одночасно підвищити їх точність в зрівнянні з загально прийнятими методиками розрахунків. Зокрема результати роботи були використані при перевірочних розрахунках житлового будинку за адресою: м. Одеса, Книжковий провулок, 19/21.

*Даний акт не відноситься до фінансових документів та засвідчує впровадження результатів наукових досліджень Фоміна В.М. в виробничу діяльність підприємства НВЦ «Екострой».*

Головний інженер  
НВЦ «Екострой»



Тихонюк С.А.

МІНІСТЕРСТВО РЕГІОНАЛЬНОГО РОЗВИТКУ, БУДІВНИЦТВА ТА ЖИТЛОВО-КОМУНАЛЬНОГО ГОСПОДАРСТВА УКРАЇНИ



ДЕРЖАВНЕ ПІДПРИЄМСТВО  
„ДЕРЖАВНИЙ НАУКОВО-ДОСЛІДНИЙ ІНСТИТУТ  
БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ”  
(ДП НДІБК)



юридична адреса: вул. І.Клименка, 5/2, м. Київ - 37, 03680, поштова адреса: вул. Преображенська, 5/2, м. Київ -37, 03037; тел. (044) 249-72-34; факс (044) 248-89-09  
www.niisk.com; e-mail: ndibk@ndibk.kiev.ua; niisk-office@ndibk.gov.ua код ЄДРПОУ 02495431

23.01.2019 № 100-97 На № \_\_\_\_\_ Від \_\_\_\_\_

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Директор ДП «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій», докт.техн.наук

Фаренюк Г.Г.

«25» січня 2019 р.

### ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертації на здобуття наукового ступеню доктора технічних наук Фоміна Володимира Михайловича на тему «Нелінійні динамічні розрахункові моделі залізобетонних каркасних будівель і споруд з урахуванням пластичності матеріалів»

Комісія у складі:

Голова – Фаренюк Г.Г., директор ДП НДІБК, д.т.н

Члени комісії: Слюсаренко Ю.С., заступник директора з наукової роботи, к.т.н.,

Мар'єнков М.Г., завідувач відділу досліджень та динамічних випробувань, д.т.н.,

Калюх Ю.І., старший науковий співробітник відділу досліджень та динамічних випробувань, д.т.н.,

цим Актом засвідчує, що результати дисертаційної роботи кандидата технічних наук, доцента Фоміна Володимира Михайловича

«Нелінійні динамічні моделі залізобетонних каркасних будівель і споруд з урахуванням пластичності матеріалів» було використано при проектуванні та розрахунках залізобетонних каркасних будівель під дією сейсмічних впливів.

Голова комісії

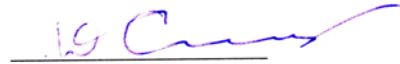
Фаренюк Г.Г.



---

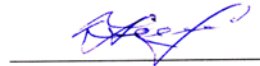
Члени комісії

Слюсаренко Ю.С.



---

Мар'єнков М.Г.



---

Калюх Ю.І.



---

«25» січня 2019 р.



65091 Одесса, Средняя 11 офис 4

+38 067 484 63 20

+38 067 484 63 23

sproekt2011@gmail.com

www.s-p.od.ua

ПП «Стальпроект - АБ»

**Довідка про впровадження**

Результати дисертаційної роботи «Нелінійні динамічні моделі залізобетонних каркасних будівель і споруд з урахуванням пластичності матеріалів» (методики, алгоритми та програми) здобувача наукового ступеня доктора технічних наук Одеської державної академії будівництва та архітектури Фоміна Володимира Михайловича використані при проектуванні конструкцій каркасних будівель.

Директор

ПП «Стальпроект - АБ»

Айзенберг Б.Б.

