Міністерство освіти і науки України
Одеська державна академія будівництва та архітектури

Кваліфікаційна праця
на правах рукопису

Шиляєв Олексій Сергійович

УДК 624.012.46:692.5

ДИСЕРТАЦІЯ

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ПЕРЕХРЕСНО-БАЛКОВИХ СИСТЕМ

05.23.01 – будівельні конструкції, будівлі та споруди

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____________________Шиляєв Олексій Сергійович

Науковий керівник: Ковров Анатолій Володимирович, кандидат технічних наук, професор

Одеса – 2020

АНОТАЦІЯ

Шиляєв О.С. Напружено-деформований стан залізобетонних перехресно-балкових систем – *кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису*.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.01 «Будівельні конструкції, будівлі та споруди» (192 – Будівництво та цивільна інженерія). – Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, 2020.

Зміст дисертації.

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, наукову новизну отриманих результатів, практичну цінність, відомості про впровадження результатів роботи, особистий внесок здобувача, відомості про апробацію результатів; окреслено публікації здобувача за темою дисертації; представлено загальну характеристику роботи, структуру та обсяг дисертації.

У розділі 1 виконано огляд та критичний аналіз доступних автору досліджень перехресно-балкових систем та методів їх розрахунку. Було розглянуто розвиток методів розрахунку перехресно-балкових систем, в тому числі класичні, аналітичні та чисельні, роботи, присвячені визначенню крутильної жорсткості залізобетонних елементів, розробці та вдосконаленню методів розрахунку нерозрізних залізобетонних стержневих конструкцій з врахуванням тріщиноутворення.

На основі виконаного огляду робіт за темою дисертації виявлено ряд методик розрахунку ортогональних перехресно-балкових систем. Значна кількість таких методів є громіздкими та незручними для практичного застосування. Більш зручні в інженерній практиці методи мають недосконалості стосовно врахування отворів у розглянутих конструкціях та зміни граничних умов.

Спираючись на виконаний аналіз літератури, було сформульовано задачі дослідження.

У розділі 2 розглянуто застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів до розрахунку перехресно-балкових систем.

Описано основні принципи призначення системи координат елементам, що складають перехресно-балкові системи та відповідно до цього показано додатні напрямки зусиль, що виникають в конструкції.

Так, для визначення напружено-деформованого стану перехресно-балкових систем із застосуванням чисельно-аналітичного методу граничних елементів, пропонується прийняти глобальну лівогвинтову систему координат з початком в лівому ближньому вузлі конструкції.

Нумерацію вузлів перехресно-балкових систем приймаємо від початку глобальної системи координат, при цьому в першу чергу нумеруються вузли в напрямку осі 0Y, потім в напрямку осі 0X. Нумерація елементів виконується в тому ж порядку. Спочатку від початку глобальної системи координат нумеруються стержні, паралельні осі 0Y, потім – паралельні осі 0X.

Формування матриць, що входять в рівняння деформування та граничні умови, накладені на стержні перехресно-балкових систем і їх математичний опис майже не відрізняються від таких, що застосовуються для довільних стержневих систем. Втім, велике значення має порядок формування розв'язуючого рівняння чисельно-аналітичного методу граничних елементів.

У розділі, на відміну від прийнятих раніше способів формування компонентів розв'язуючого рівняння чисельно-аналітичного методу граничних елементів, що полягають у побудові аналітичних функцій при формуванні загальних матриць коефіцієнтів та векторів з частинних матриць та векторів, запропоновано універсальний алгоритм прямого формування вказаних компонентів для плоских ортогональних стержневих систем. Перевагами методу є простота його алгоритмізації при програмуванні, легкість його розвитку для просторових та/або неортогональних систем, універсальність, можливість врахування зміни жорсткості та утворення тріщин.

Серед недоліків способу слід відмітити наявність вимог з нумерації вузлів та елементів, що входять до складу розрахункової схеми та неможливість розширення способу для розрахунку пластин та об'ємних тіл.

Також виконано розрахунок перехресно-балкової системи за допомогою чисельно-аналітичного методу граничних елементів та ПК ANSYS R17.1, який показав добру збіжність результатів.

У розділі 3 описано експериментальні дослідження роботи залізобетонних перехресно-балкових систем. З метою визначення особливостей роботи перехресно-балкових систем, була розроблена та реалізована програма експериментальних досліджень залізобетонних елементів при статичних навантаженнях. Дана програма передбачає випробування конструкцій при різних режимах навантаження.

Для реалізації представленої програми були запроектовані та виготовлені залізобетонні експериментальні конструкції. Вибір розмірів конструкції, класу арматурної сталі, класу бетону за міцністю, кроку та діаметру арматурних стержнів визначається параметрами наявного технологічного оснащення, задачами дослідження та особливостями навантажувального обладнання.

Проектування експериментальних конструкцій виконано за принципом геометричної подібності схем армування, співвідношення розмірів поперечного перерізу реальним конструкціям відповідно до діючих норм. Експериментальні конструкції являють собою залізобетонні перехресно-балкові системи, що складаються із чотирьох попарно взаємно перпендикулярних балок, розміщених на відстані 500 мм від краю конструкції. Балки прямокутного перерізу з розмірами b x h = 60 x 120 мм та довжиною 2000 мм кожна. Армовані експериментальні конструкції поздовжньою арматурою класу А400С діаметром 8 мм в нижній зоні (два стержні в кожній балці). Приопорні зони армуються додатково двома стержнями арматури класу А400С діаметром 8 мм довжиною 470 мм у верхній зоні з перев'язкою з нижньою арматурою хомутами з проволоки в'язальної Вр-І, діаметром 3 мм. Товщина захисного шару складає 15 мм. Тіло експериментальної конструкції виконано з бетону класу С20/25.

Для проведення експериментальних досліджень перехресно-балкових систем було запроектовано та зібрано стенд для випробувань. Стенд являє собою конструкцію, що складається із опорної рами, виготовленої із швелерів, та балок, призначених для розподілу зусилля, що прикладалося за допомогою домкрату на 100 кН. Для визначення вертикальних переміщень досліджуваної конструкції, використовувались три прогиноміри 6ПАО та один індикатор годинникового типу ІЧ-10 з ціною поділки 0,01 мм.

Було випробувано три серії перехресно-балкових систем. Перша серія перехресно-балкової системи випробовувалась в три етапи – спершу моделювалось зосереджене навантаження, прикладене у вузлі системи. Після розвантаження, на другому етапі випробувань перехресно-балкової системи моделювалось рівномірно розподілене навантаження вздовж всіх балок, що її складають. На третьому етапі навантаження виконувалось за допомогою стенду, описаного вище. Другу та третю серії перехресно-балкових систем навантажували ступінчатим навантаженням. Всі серії перехресно-балкових систем було доведено до руйнування. За результатами експериментальних досліджень залізобетонних перехресно-балкових систем при статичному впливі були визначені схеми руйнування та деформування, прогини, руйнуюче навантаження, побудовані графіки залежності прогинів від навантажень, прикладених до перехресно-балкових систем відповідних серій.

Проведення випробувань супроводжувалось фотофіксацією поверхні досліджуваних перехресно-балкових систем з метою визначення процесу їх тріщиноутворення.

Додатково було досліджено роботу перехресно-балкових систем при дії асиметричного навантаження та виконано порівняння отриманих результатів із результатами, отриманими за допомогою авторського методу та за допомогою ПК ANSYS R17.1.

У розділі 4 виконано моделювання напружено-деформованого стану перехресно-балкових систем за допомогою чисельно-аналітичного методу граничних елементів та у ПК ANSYS R17.1, що базується на методі скінчених елементів.

На основі методики застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів до розрахунку перехресно-балкових систем, запропонованої у другому розділі, було розроблено алгоритм та реалізовано його шляхом створення програми CrossBeam в системі комп'ютерної математики MATLAB. Програма дозволяє розраховувати перехресно-балкові системи ортогональної конфігурації як з регулярною, так і з нерегулярною структурою. Спочатку задаються пружні характеристики матеріалу. Існує також можливість коригувати характеристики матеріалів.

Запропоновано інженерну методику врахування тріщиноутворення за діаграмою деформування згинального залізобетонного елементу.

У розділі показано, що різниця між результатами розрахунків ЧА МГЕ та ANSYS R17.1 для залізобетонної перехресно-балкової системи складає до 9%. Різниця в результатах, отриманих з використанням ANSYS R17.1, та експериментальними даними складає до 17%. Розбіжність в результатах, отриманих за запропонованою розрахунковою моделлю та експериментальними даними складає до 7%.

У загальних висновках показані результати, отримані під час виконання досліджень.

У додатках наведені результати експериментальних досліджень у табличній формі, алгоритм розробленої розрахункової програми та її лістинг для MATLAB.

Результати досліджень впроваджено в проектуванні реальних об'єктів, про що у додатках є відповідна довідка.

Ключові слова: перехресно-балкові системи, чисельно-аналітичний метод граничних елементів, метод скінчених елементів, напружено-деформований стан, ANSYS, MATLAB, тріщиноутворення, кручення, експериментальні дослідження.

ABSTRACT

Shyliaiev O.S. Stress-strain state of reinforced concrete cross-beam systems *– qualifying scientific work on the rights of the manuscript.*

The dissertation for a scientific degree of the Candidate of Technical Sciences on a specialty 05.23.01 "Building Structures, Buildings and Structures" (192 – Building and Civil Engineering). – Odesa State Academy of Civil Architecture, Odesa, 2020.

Dissertation content.

The introduction substantiates the relevance of the topic of the dissertation, the scientific novelty of the results, practical value, information on the implementation of the results of work, the personal contribution of the applicant, information on the approbation of the results; the applicant's publications on the topic of the dissertation are outlined; the general characteristic of work, structure and volume of the dissertation is presented.

In **Section 1**, an overview and critical analysis of available to the author research and methods of cross-beam systems calculation are performed. The development of methods for calculating cross-beam systems, including classical, analytical and numerical, works on determining the torsional stiffness of reinforced concrete elements, development and improvement of methods for calculating continuous reinforced concrete rod structures taking into account cracking was considered.

Based on the review of works on the topic of the dissertation, a number of methods for calculating orthogonal cross-beam systems have been identified. Many of these methods are cumbersome and inconvenient for practical use. More convenient in engineering practice methods have imperfections in terms of taking into account the holes in the considered structures and changing the boundary conditions.

Based on the analysis of the literature, the research objectives were formulated and stated.

Section 2 considers the application of the numerical-analytical boundary elements method to the calculation of cross-beam systems.

The basic principles of assignment of the coordinate system to the elements that make up the cross-beam systems are described and, accordingly, the positive directions of forces arising in the structure are shown.

Thus, to determine the stress-strain state of cross-beam systems using the numerical-analytical boundary elements method, it is proposed to adopt a global left-handed coordinate system starting at the left near node of the structure.

The numbering of nodes of cross-beam systems is taken from the beginning of the global coordinate system, with first numbered nodes in the direction of the axis 0Y, then in the direction of the axis 0X. The numbering of elements is performed in the same order. First, from the beginning of the global coordinate system, the rods parallel to the 0Y axis are numbered, then the parallel to axis 0X.

The formation of matrices included in the deformation equations and boundary conditions imposed on the rods of cross-beam systems and their mathematical description are almost indistinguishable from those used for arbitrary rod systems. However, of great importance is the order of formation of the solving equation of the numerical-analytical method of boundary elements.

In the section, in contrast to the previously accepted methods of forming the components of the solving equation of the numerical-analytical boundary elements method, which consist in constructing analytical functions for forming general matrices of coefficients and vectors from partial matrices and vectors, a universal algorithm for direct formation of these components for flat orthogonal rod systems is proposed. The advantages of the method are the simplicity of its algorithmization during programming, the ease of its development for spatial and/or non-orthogonal systems, versatility, the ability to take into account changes in stiffness and the formation of cracks.

Disadvantages of the method include the presence of requirements for the numbering of nodes and elements that are part of the calculation scheme and the impossibility of extending the method for calculating plates and three-dimensional bodies.

The cross-beam system was also calculated using the numerical-analytical method of boundary elements and ANSYS R17.1 software, which showed good convergence of results.

Section 3 describes experimental studies of reinforced concrete cross-beam systems. In order to determine the features of the cross-beam systems work, a program of experimental studies of reinforced concrete elements under static loads was developed and implemented. This program provides testing of structures at different load modes.

To implement the presented program, reinforced concrete experimental structures were designed and manufactured. The choice of structural dimensions, class of reinforcing steel, class of concrete in terms of strength, pitch and diameter of reinforcing bars is determined by the parameters of the available technological equipment, research objectives and features of the loading equipment.

The design of experimental structures is based on the principle of geometric similarity of reinforcement schemes, the ratio of cross-sectional dimensions of real structures in accordance with current regulations. Experimental structures are reinforced concrete cross-beam systems consisting of two pairs of mutually perpendicular beams placed at a distance of 500 mm from the edge of the structure. Beams of rectangular cross-section with dimensions b x h = 60 x 120 mm and length 2000 mm each. Experimental structures are reinforced with longitudinal reinforcement class A400C with a diameter of 8 mm in the lower zone (two rods in each beam). The support zones are additionally reinforced with two rods of A400C class reinforcement with a diameter of 8 mm and a length of 470 mm in the upper zone with bonding with the lower reinforcement with clamps made of knitting wire Bp-I with a diameter of 3 mm. The thickness of the protective layer is 15 mm. The body of the experimental structure is made of concrete class C20 / 25.

A test bench was designed and assembled to conduct experimental studies of cross-beam systems. The stand is a structure consisting of a support frame made of channels and beams designed to distribute the force applied by a jack at 100 kN. To determine the vertical displacements of the investigated structure, three 6ПАО deflectometers and one ИЧ-10 clock type indicator with a division price of 0.01 mm were used.

Three series of cross-beam systems were tested. The first series of cross-beam system was tested in three stages – first, the concentrated load applied at the system node was modeled. After unloading, in the second stage of tests of the cross-beam system, a uniformly distributed load was modeled along all the beams that make it up. In the third stage, the loading was performed using the stand described above. The second and third series of cross-beam systems were loaded with a step load in nodes. All series of cross-beam systems were destroyed. According to the results of experimental studies of reinforced concrete cross-beam systems under static influence, the schemes of fracture and deformation, deflections, destructive loading were determined, graphs of dependence of deflections on loads applied to cross-beam systems of corresponding series were plotted.

The tests were accompanied by photofixation of the surface of the investigated cross-beam systems in order to determine the process of their crack formation and development.

Additionally, the operation of cross-beam systems under the action of asymmetric loading, applied in nodes, was studied and the obtained results were compared with the results obtained using the author's method and with the help of ANSYS R17.1 software.

In **Section 4** the simulation of the stress-strain state of cross-beam systems using the numerical-analytical boundary elements method and in the ANSYS R17.1 software, which is based on the finite element method, was performed.

Based on the method of applying the numerical-analytical boundary elements method to the calculation of cross-beam systems, proposed in the second section, an algorithm was developed and implemented by creating a CrossBeam program in computer mathematics environment MATLAB. The program allows to calculate cross-beam systems of orthogonal configuration with both regular and irregular structure. First, the elastic characteristics of the material are set. It is also possible to adjust the characteristics of the materials.

The engineering technique of the account of crack formation according to the diagram of deformation of a bending reinforced concrete element is proposed.

The section shows that the difference between the results of calculations using the numerical-analytical boundary elements method and ANSYS R17.1 software for reinforced concrete cross-beam system is up to 9%. The difference between the results obtained using ANSYS R17.1 software and experimental data is up to 17%. The discrepancy in the results obtained by the proposed calculation model and experimental data is up to 7%.

The general conclusions show the results obtained during the research and dissertation preparation.

The appendices contain the results of experimental research in tabular form, the algorithm of the developed calculation program and its listing for MATLAB.

The results of the research are implemented in the design of real objects, about which there is a corresponding certificate of implementation in the appendices.

Keywords: cross-beam systems, numerical-analytical boundary element method, finite element method, stress-strain state, ANSYS, MATLAB, cracking, torsion, experimental studies.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Статті у наукових фахових виданнях України

1. Яременко О.Ф. Розрахунок нерозрізних залізобетонних балок із застосуванням повних діаграм деформацій матеріалів / О.Ф. Яременко, А.Я. Будзул, О.С. Шиляєв. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2010. – №39. – С. 366–372.

2. Яременко О.Ф. Сучасний стан в сфері розширення та посилення мостових прогонових конструкцій накладною ребристою плитою / О.Ф. Яременко, В.Г. Кваша, О.С. Шиляєв. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2012. – №46. – С. 394–398.

3. Шиляев А.С. Программная реализация алгоритмов численно-аналитического метода граничных элементов / А.С. Шиляев. // Вісник Київського національного університету технології та дизайну. – 2015. – №92. – С. 11–17.

4. Ковров А.В. Идентификация систем с перекрестными связями с использованием теории графов / А.В. Ковров, А.М. Чучмай, А.С. Шиляев. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2015. – №60. – С. 435–439.

5. Сур'янінов М.Г. Згин і кручення систем з перехресними зв'язками / М.Г. Сур'янінов, О.М. Чучмай, О.С. Шиляєв. // Міжвузівський збірник "НАУКОВІ НОТАТКИ", Луцьк. – 2017. – №58. – С. 295–300.

6. Сур'янінов М.Г. Чисельна реалізація розв'язку завдання про вигин і крутіння систем з перехресними зв'язками / М.Г. Сур'янінов, О.М. Чучмай, О.С. Шиляєв. // Міжвузівський збірник "НАУКОВІ НОТАТКИ", Луцьк. – 2017. – №59. – С. 257–262.

7. Корнеева И.Б. Компьютерные исследования напряженно-деформированного состояния плиты перекрытия из сталефибробетона /

И.Б. Корнеева, Н.Г. Сурьянинов, А.С. Шиляев. // Вісник Хмельницького національного університету. – 2018. – №257. – С. 271–276.

Статті у наукових періодичних виданнях інших держав

8. Surianinov M. Numerical and analytical boundary element method application In ribbed slab analysis / M. Surianinov, O. Chuchmai, O. Shyliaiev. // Tehnički glasnik. – 2015. – №4. – С. 432–436.

9. Сурьянинов Н.Г. Адаптация алгоритма численно-аналитического метода граничных элементов к расчету перекрестнобалочных систем / Н.Г. Сурьянинов, А.С. Шиляев. // International Academy Journal. Web of Scholar. – 2018. – №7. – С. 9–14.

10. Surianinov M. Investigation of Free Vibrations of Three-Layered Circular Shell Supported by Annular Ribs of Rigidity / M. Surianinov, T. Yemelianova, O. Shyliaiev. // Materials Science Forum. – 2019. – №968. – С. 437–443.

11. Surianinov M. Calculation of plate-beam systems by method of boundary elements / M. Surianinov, O. Shyliaiev. // International Journal of Engineering & Technology. – 2018. – №7 (2.23). – С. 238–241.

12. Сурьянинов Н.Г. Экспериментальные исследования и компьютерное моделирование железобетонной балки при пожаре / Н.Г. Сурьянинов, Ю.А. Отрош, А.С. Шиляев. // Natural and Technical Sciences. – 2018. – VI (22), Вип. 186 – С. 76–79.

13. Neutov S. Influence of long-term compressive stresses on strength of concrete and steel-fiber concrete prismatic element / S. Neutov, M. Sydorchuk, O. Shyliaiev. // MATEC Web of Conferences. – 2018. – №230. – С. 1–6.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

14. Yemelianova T.A. Free Vibrations Of Three-layered Closed Shell Supported By Longitudinal Stiffness Ribs [Електронний ресурс] / T.A. Yemelianova, M.H. Surianinov, O.S. Shyliaiev // 6TH International Congress on Technology -

Engineering - Kuala Lumpur - Malaysia (2018-07-19). – 2018. – Режим доступу до ресурсу: http://procedia.org/cpi/ICONTES-6-2111403.

15. Аніскін А. Розрахунок систем перехресних балок з використанням ПК ANSYS / А. Аніскін, О.С. Шиляєв // Тези 5 міжнародної конференції Актуальні проблеми інженерної механіки, Одеса, 22-25 травня 2018. – Одеса: Одеська державна академія будівництва та архітектури, 2018. – С. 245–247.

16. Сорока Н.Н. К расчету перекрестно-балочных систем / Н.Н. Сорока, И.А. Твардовский, А.С. Шиляев / Тези доповідей 74-ї науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу академії 17-18 травня 2018. – Одеса: Одеська державна академія будівництва та архітектури, 2018. – С. 36. (Внесок здобувача: розглянуто застосування алгоритму методу граничних елементів до розрахунку перехресно-балкових систем. Виконано побудову всіх матриць розглянутого методу, в тому числі матриці фундаментальних функцій).

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Розвиток сучасного будівництва ставить задачі дослідження роботи конструкцій будівель і споруд, спрямованих на підвищення економічності будівництва з підвищенням надійності конструктивних рішень.

Розповсюдженим видом будівельних конструкцій, що зазнають складного поєднання силових впливів, є перехресно-балкові системи. Такі системи у тому чи іншому вигляді застосовуються в фундаментах, перекриттях, покриттях будівель і споруд.

Опір залізобетонних конструкцій крученню зі згином в даний час вивчено недостатньо. Про це свідчить той факт, що у нормативних документах наведено лише загальні положення розрахунку, які не завжди узгоджуються з реальною роботою залізобетонних елементів в стадії утворення та розвитку тріщин, а також у граничній стадії.

Загалом, в будь-якому конструктивному елементі, що працює на згин, виникає кручення за рахунок випадкового ексцентриситету, зумовленого асиметрією перерізу, неоднорідністю матеріалів або позацентровим прикладенням вертикального навантаження.

Неправильне врахування згинальної та крутильної жорсткостей, що змінюються в процесі тріщиноутворення в залізобетонних елементах, може призвести до хибного визначення зусиль в системі і, як наслідок, до руйнування конструкції.

Таким чином, проведення теоретичних та експериментальних досліджень з вивчення напружено-деформованого стану перехресно-балкових систем, що зазнають згину з крученням, є актуальною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась в рамках держбюджетної теми «Розвиток чисельно-аналітичного методу граничних елементів для моделювання та розрахунку стержневих, пластинчатих та оболонкових конструкцій» на кафедрі будівельної механіки

Одеської державної академії будівництва та архітектури (номер державної реєстрації – 0117 U 000484).

Мета роботи – створення розрахункової моделі деформування залізобетонних перехресно-балкових систем з врахуванням тріщиноутворення на основі чисельно-аналітичного методу граничних елементів.

Завдання досліджень:

– створити методику застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів до розрахунку перехресно-балкових систем;
– вдосконалити пропозиції з врахування процесів тріщиноутворення під час розрахунку залізобетонних елементів, що зазнають згину з крученням;
– провести експериментальні дослідження конструкції залізобетонної перехресно-балкової системи;
– розробити комп'ютерну програму, що реалізує запропоновану розрахункову модель деформування залізобетонних перехресно-балкових систем;
– виконати порівняння результатів, отриманих аналітично, експериментально і на основі комп'ютерного моделювання.

Об'єкт досліджень – процес деформування перехресно-балкових систем.

Предмет дослідження – напружено-деформований стан залізобетонних перехресно-балкових систем при силових впливах.

Методи дослідження: експериментальні дослідження, теоретичні методи будівельної механіки, чисельно-аналітичний метод граничних елементів, метод скінчених елементів, комп'ютерне моделювання..

Наукова новизна отриманих результатів:

– вперше запропоновано підхід до розрахунку перехресно-балкових систем на основі чисельно-аналітичного методу граничних елементів;
– вперше запропоновано новий підхід до формування компонентів розв'язуючого рівняння методу граничних елементів;

- отримала подальший розвиток методика врахування кручення під час розрахунку стрижневих залізобетонних елементів;
- вперше запропонована методика врахування кручення під час розрахунку перехресно-балкових систем методом граничних елементів;
- отримала подальший розвиток методика розрахунку перехресно-балкових систем з врахуванням кручення в сучасних інженерних програмах;
- вперше запропонована розрахункова модель деформування залізобетонних перехресно-балкових систем з врахуванням тріщиноутворення;
- отримані нові експериментальні дані про роботу залізобетонних перехресно-балкових систем.

Практичне значення отриманих результатів роботи:

Розроблена методологія комплексного дослідження напружено-деформованого стану залізобетонних перехресно-балкових систем на основі сумісного використання аналітичних, чисельних та експериментальних методів.

Отримана просторова розрахункова модель вказаних систем та описана методика її розрахунку чисельно-аналітичним методом граничних елементів. Достовірність розробленої методики підтверджена експериментальними даними.

Отримані аналітичні залежності чисельно-аналітичного методу граничних елементів стосовно розрахунку розглянутих конструкцій, комп’ютерна реалізація яких не потребує використання дорогих скінченно-елементних програм. Запропонована в роботі розрахункова модель деформування та комп’ютерна програма, що реалізує її, дозволяє визначати напружено-деформований стан залізобетонних перехресно-балкових систем з врахуванням тріщиноутворення.

Основні результати досліджень по дисертаційній роботі запроваджені в навчальний процес в Одеській державній академії будівництва та архітектури при проведенні лекційних та практичних занять для магістрів з дисциплін «Будівельна механіка» та «Залізобетонні конструкції», а також в проектну практику ТОВ «ППІ «ГІПРОПРОМ» (м. Запоріжжя).

Особистий внесок здобувача:

Здобувач виконав експериментальні дослідження конструкцій залізобетонних перехресно-балкових систем. Основні результати дисертаційної роботи розроблено особисто автором. В дослідженнях, виконаних та опублікованих у співавторстві із науковим керівником Ковровим А.В., а також із Квашею В.Г., Отрошем Ю.А., Сур’яніновим М.Г., Яременко О.Ф., особистий вклад здобувача полягає в постановці задач, науковому обґрунтуванні та безпосердній участі в їх реалізації.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідались на 3-й Міжнародній науково-практичній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки», Одеса, 2016 р.; на 4-й Міжнародній науково-практичній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки», Одеса, 2017 р.; на 5-й Міжнародній науково-практичній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки», Одеса, 2018 р.; на Міжнародній конференції з новітніх досліджень в матеріалах та інженерії, Вішакхапатнам, Індія, 2018 р., на 6-му Міжнародному конгресі з технології – Інженерії та Науки, Куала-Лумпур, Малайзія, 2018 р.; на науково-технічних конференціях професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури у 2010...2018 рр.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 16 наукових роботах, серед них: 7 статей в журналах з переліку спеціальних фахових видань України, 6 статей у періодичних виданнях інших держав, з яких 2 статті у виданнях, що індексуються Scopus, 1 стаття у виданні, що індексується Web of Science.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Обсяг дисертації – 206 стор., з них 114 стор. основного тексту, 46 стор. додатків. Дисертація включає 64 рисунки, 5 таблиць та список використаних джерел, що складається із 192 найменувань.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1. Застосування класичних методів будівельної механіки для розрахунку перехресно-балкових систем

Перехресно-балкові системи відрізняються різноманітністю розрахункових схем за багатьма параметрами – розміщенням елементів (ортогональне, паралелограмне, ромбічне і т.п.), граничними умовами, величинами прогонів та іншими характеристиками.

В ортогональних перехресно-балкових системах при експлуатаційних навантаженнях виникають не лише згинальні, але й крутні моменти.

Розвиток загальних класичних методів будівельної механіки (методу сил та методу перемізень) в працях І.М. Рабиновича, Н.С. Стрелецького, А.А. Уманського, А.А. Гвоздєва, Н.К. Снітко та інших вчених, матрична форма алгоритмів цих методів створили можливість їх застосування для розрахунку перехресно-балкових систем.

Вельми плідною виявилась ідея групування невідомих, запропонована Н.С. Стрелецьким та І.М. Рабиновичем [107, 124], що отримала спочатку ефективне застосування в розрахунках циклічних систем в формі розкладення навантажень та невідомих в скінчені тригонометричні ряди [38, 85, 122], а пізніше узагальнена А.А. Уманським [129] шляхом введення нескінченої основної системи на більш складні регулярні системи. Метод А.А. Уманського отримав розвиток в роботах Б.Н. Кутукова [80] та Р. Світки [191, 192].

Ідея групування невідомих виявилась корисною і в різних формах ортогоналізації епюр [110, 131, 132].

Узагальненням цієї ідеї стала побудова А.Ф. Смірновим [119] шляхом спектральних розкладень повних матриць жорсткостей (податливостей) методу повного розділення невідомих, названого методом головних напрямків і потім розвиненого В.Д. Шайкевичем [137, 138].

Подальшим розвитком методу головних напрямків є метод спектральних розкладень С.З. Дінкевича [51].

Відмітимо роботу Г.Н. Положого [103] з розрахунку систем перехресних балок (без врахування кручення), що базується на розв'язку рівнянь нерозривності деформацій і рівноваги за допомогою сумарних подань і роботи [191, 192], що основані на розкладеннях навантажень та переміщень за формами власних коливань балок, що несуть регулярно розміщені точкові маси.

У міру розвитку точних і наближених методів розрахунку рам, всі вони знаходили застосування в статичних та динамічних розрахунках перехресно-балкових систем – метод фокусів, метод переміщень із застосуванням електромоделювання, ітераційний процес на основі методу переміщень та методу сил, змішаний метод та метод пружних вантажів А.Ф. Смірнова, метод переміщень в розгорнутій формі із застосуванням табульованих функцій, метод сил в поєднанні з локалізованими групами невідомих і т.д.

Труднощі обчислювального характеру тривалий час стримували розвиток точних методів розрахунку складних статично невизначених систем, що призводять до розв'язку великих систем лінійних алгебраїчних рівнянь. З появою сучасної комп'ютерної техніки точні методи розрахунку (в матричному формулюванні) отримали широкий вжиток. Основоположними в цьому напрямку є роботи Дж. Аргіріса [16, 17].

Отримані за допомогою комп'ютерної техніки точні розв'язки систем з великою кількістю невідомих дали можливість провести порівняння експериментальних та теоретичних результатів [30, 61, 94].

Слід зазначити, що розв'язки, засновані на класичних методах в матричній формі, поряд з високою точністю, мають один суттєвий недолік: всі вони чисельні і тому навіть для регулярних перехресних систем не дають аналітичних залежностей між силовими та деформаційними параметрами, що особливо необхідно під час попереднього проектування. Крім того, використання методів сил та переміщень в класичній формі при великій кількості вузлів системи веде до великих витрат машинного часу.

В цьому відношенні в розрахунках регулярних стержневих систем метод узагальнених невідомих має суттєві переваги: розв'язки виражаються в аналітичній формі та охоплюють широкий клас задач, крім того, функціональні невідомі, що лежать в його основі, значно покращують обумовленість матриць систем розв'язуючих рівнянь.

У більшості робіт, про які йшлося вище, розрахунок перехресно-балкових систем розглядався з позицій механіки, без прив'язки до конкретного матеріалу і відповідного врахування особливостей його деформування.

Застосування методу сил для розрахунку залізобетонних перехресно-балкових систем розглянув В.Н. Байков [21]. Це ж питання досліджували Б.Е. Уліцький та А.А. Потапкін [128].

Сутність запропонованого підходу розглянемо на прикладі системи, показаної на рис. 1.1.

Рис. 1.1. Розрахункова схема перехресно-балкової системи

Нехай балки, паралельні осі x, – більш короткі та більш жорсткі, ніж балки, паралельні осі y; їх називають головними балками, а другий набір – другорядними. Основна система методу сил може бути сформована різними способами, але надається перевага установці шарнірів в точках перетину балок двох наборів (рис. 1.2).

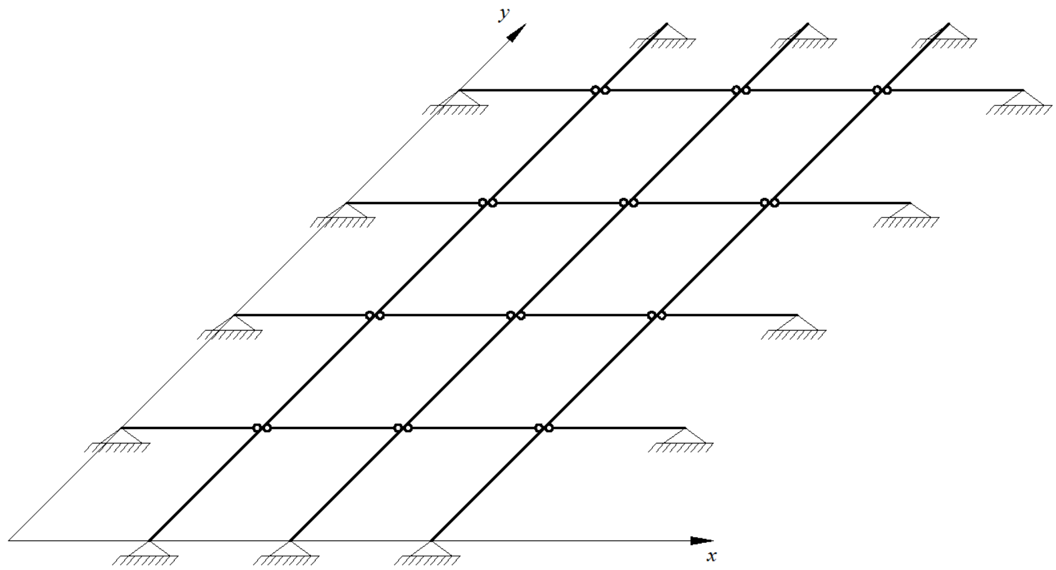


Рис. 1.2. Основна система методу сил

Основна система методу сил являє собою сукупність однопролітних балок, в яких головні балки – пружні опори для другорядних.

Наявність шарнірів призводить до того, що пружна лінія другорядних балок має злами в точках спряження з головними балками, чого не муже бути у вихідній системі. Для усунення цього протиріччя, прикладемо в шарнірах зосереджені моменти, які повинні бути такими, щоб дорівнювали нулю всі кути зламів від одночасної дії цих моментів та зовнішнього навантаження. Математично вказана властивість буде описуватись системою рівнянь виду

$$\sum \Delta_{i_{mn}} + \Delta_{i_{mF}} = 0, \tag{1.1}$$

де $\Delta_{i_{mn}}$ – кут зламу в i_m-му вузлі від сукупності моментів з номером n; $\Delta_{i_{mF}}$ – кут зламу в $i i_m$-му вузлі від зовнішнього навантаження.

Недоліком описаного методу є наближеність розрахунку – неможливість врахування кручення стержнів, що імітують роботу полиць [8]. В роботах [2, 5, 7…10, 154] Т.Н. Азізов пропонує чисельно-аналітичний метод розрахунку стержневих систем та кесонних перекриттів, який дозволяє точніше визначати зусилля в балках перехресно-балкових систем. Однак метод не позбавлений недоліків. Серед них слід відмітити складність проведення розрахунків при наявності отворів, відмінностях граничних умов спирання балок від прийнятих у запропонованій методиці.

Врахувати кручення перехресно-балкової системи дозволяє інший фундаментальний метод будівельної механіки – метод переміщень.

Розглянемо систему жорстко з'єднаних між собою перехресних балок з прямокутними комірками. Опори виключають кручення кінців балок. Введемо позначення: φ_x та φ_y – кути поворотів; W – прогин; M_x та M_y – згинальні моменти; Q_x та Q_y – поперечні сили; H_x та H_y – крутні моменти.

Основна система вибирається шляхом накладення на всі вузли защемлень, що запобігають кутам повороту φ_x та φ_y, і лінійних зв'язків, що запобігають прогинам W.

Переміщення $\vec{\delta}$ визначаються шляхом розв'язання загальної системи рівнянь

$$\overline{R}\vec{\delta} = \vec{F}, \tag{1.2}$$

де $\vec{F}$ – вектор навантажень.

Розмірність матриці $\overline{R}$ буде $3mn \times 3mn$, де m – кількість балок в напрямку однієї осі (наприклад, y); $n = 3$ – кількість балок в напрямку другої осі. Кількість вузлів – $r = m \times n$.

Компоненти вектору переміщень можна знайти з (1.2):

$$\vec{\delta} = \overline{R}^{-1}\vec{F}, \tag{1.3}$$

де

$$\vec{\delta} = \begin{vmatrix} \vec{\varphi}_x \\ \vec{\varphi}_y \\ \overrightarrow{W} \end{vmatrix}; \ \vec{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{M}_x \\ \overrightarrow{M}_y \\ \vec{f} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Якщо вважати завантаження приведеним до вузлових сил, а це справедливо при достатній кількості вузлів, то

$$\vec{m}_x = \vec{m}_y = 0.$$

Одиничні епюри локальні, тобто вони ненульові лише в околі розглянутого вузла. Вантажна епюра, у випадку приведення навантаження до вузлових сил, - нульова.

Для систем, що складаються з великої кількості перехресних балок, загальний вид цих матриць зберігається; їх розмірність – $m \times n$. Порядок загальної системи рівнянь можна понизити в три рази, застосувавши послідовний розв'язок системи алгебраїчних рівнянь (1.2).

Зусилля визначаються в перерізах, розміщених поблизу вузлів.

При формуванні загальної системи рівнянь від початку враховано шарнірне спирання поздовжніх і поперечних балок. Для розрахунку нерозрізних прогонових будов спочатку формується глобальна матриця жорсткості для однопрогонової системи сумарної довжини. Потім в тих вузлах поперечних балок, де розміщені проміжні опори, переміщення вузлів прирівнюються до нуля. Це досягається шляхом перетворення загальної системи рівнянь за методикою, прийнятою в методі скінчених елементів.

Однак і тут обчислення виявляються вельми громіздкими та трудомісткими, чим, мабуть, і пояснюється незначна кількість відповідних публікацій.

1.2. Розвиток методів розрахунку перехресно-балкових систем

Створенням методів розрахунку перехресно-балкових систем займалося багато вчених. Тут першість належить І.Г. Бубнову [36], який розглянув згин перехресно-балкової системи з великою кількістю балок одного напрямку, рівновіддалених одна від одної, та однією балкою в іншому напрямку. Його розв'язок пізніше узагальнив П.Ф. Папкович [101], знявши обмеження на жорсткість балок та умови їх закріплення.

П.Ф. Папкович виявив аналогію між задачею про коливання балки на пружній основі, що несе у вузлових точках зосереджені маси, і задачею про розрахунок плоского стержневого перекриття, що дозволило йому ефективно використати ортогональність форм коливань такої балки, автоматично задовольнити граничним умовам та спростити визначення частинного інтегралу диференційних рівнянь І.Г. Бубнова. За аналогією до головних координат в теорії коливань, метод, запропонований П.Ф. Папковичем, був названий ним «методом головних вигинів».

Остаточний вигляд цей метод отримав після виходу ряду робіт А.А. Курдюмова [79], який застосував для інтегрування системи диференційних рівнянь І.Г. Бубнова метод розкладення в ряди, використаний раніше акад. А.Н. Криловим для розрахунку балок на пружній основі, тобто метод розкладення в ряди за формами вільних коливань. Рівняння зігнутої поверхні системи перехресних балок у цьому випадку виходить у вигляді нескінчених рядів.

З математичної точки зору такий підхід рівносильний розв'язку системи повних диференційних рівнянь шляхом розкладення правої частини за власними розв'язками.

Сутність методу головних вигинів зводиться до наступного.

Розглянемо перехресно-балкову систему з ортогональною коміркою (рис. 1.3).

Вважатимемо, що навантаження сприймається лише балками головного напрямку, а до поперечних балок прикладені реакції взаємодії перехресних зв'язків.

Прогин у i-ій вузловій точці балки головного напрямку

$$w_i = \beta_i(x)\frac{Q(x)l_y^3}{EI_0} - \frac{l_y^3}{EI_0}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}R_j\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1.5}$$

де $\beta_i(x)$ – коефіцієнт впливу навантаження $Q(x)$ на прогин балки головного напрямку в i-ій точці; γ_{ij} – коефіцієнт впливу j-ої реакції на прогин балки основного напрямку в i-ій точці; n – число перехресних зв'язків; I_0 – момент інерції балки поперечного напрямку.

Значення коефіцієнтів впливу β_i та γ_{ij} залежать від типу опор балок головного напрямку, виду навантаження $Q(x)$, розміщення вузлових точок. Ці коефіцієнти визначаються за таблицями.

Реакції, що діють на i-ий перехресний зв'язок, можна замінити розподіленим навантаженням

$$r_j(x) = \frac{R_j(x)}{a},$$

тоді диференційне рівняння пружної лінії перехресної балки має вигляд

$$EI_j w_j^{IV}(x) = \frac{R_j(x)}{a}. \qquad (1.6)$$

Балки головного напрямку та перехресно-балкові системи мають однакові прогини у вузлових точках, тому, підставляючи (1.6) в (1.5), отримаємо систему диференційних рівнянь

$$w_i = \beta_i(x)\frac{Q(x)l_y^3}{EI_0} - \frac{al_y^3}{EI_0}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}EI_j w_j^{IV}(x), \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (1.7)$$

Система рівнянь (1.7), вперше отримана І.Г. Бубновим, може бути розв'язана одним із відомих [92, 102] методів розв'язку лінійних диференційних рівнянь з постійними коефіцієнтами, але такий шлях складний, тому роблять наступним чином.

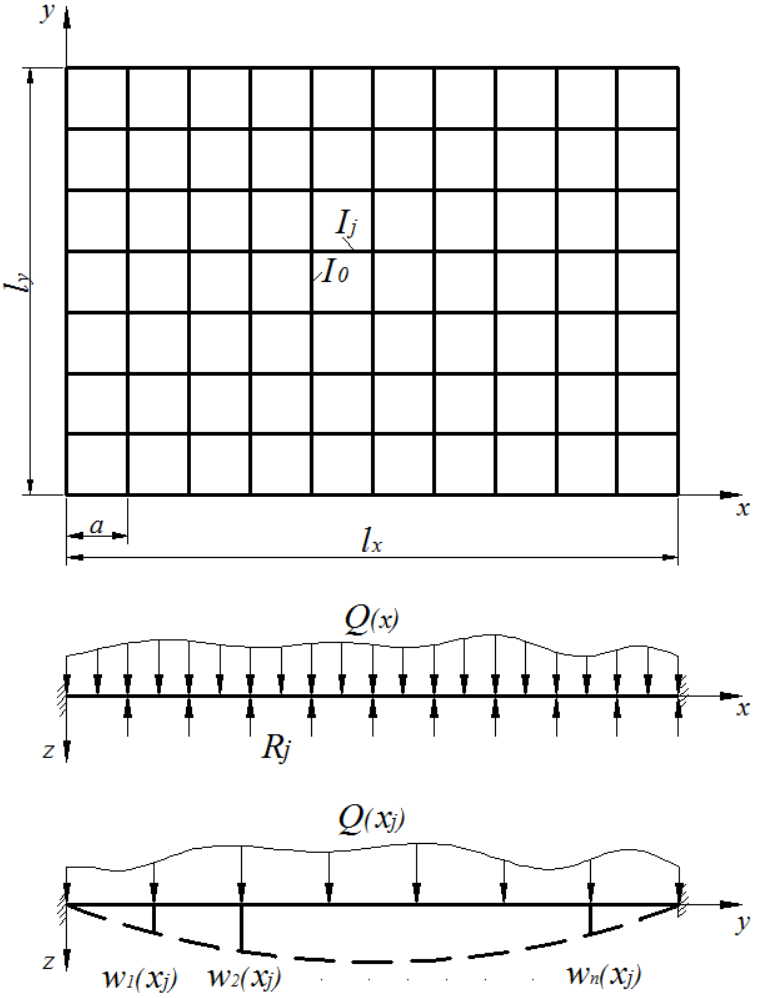


Рис. 1.3. Розрахунок перехресно-балкової системи з ортогональною коміркою методом головних згинів

Відомі два варіанти заміни змінних в рівняннях (1.7) – підстановка Лагранжа та підстановка Даламбера, використання яких дозволяє перетворити систему (1.7) в незалежні диференційні рівняння з однією змінною в кожній з них.

Частіше виконується підстановка Лагранжа:

$$w_i = \frac{I_c}{I_i} \sum_{k=1}^{n} \nu_{ik} p_k(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.8}$$

де I_c – постійна величина, що має розмірність моменту інерції; ν_{ik} – невідомі коефіцієнти; $p_k(x)$ – функції, що задовольняють диференційному рівнянню згину балки на пружній основі,

$$EI_c p_k^{IV}(x) + k_k p_k(x) = q_k(x). \tag{1.9}$$

Тут необхідно визначити константу k_k та функцію $q_k(x)$.

П.Ф. Папкович назвав функції $p_k(x)$ головними згинами, а коефіцієнти ν_{ik} – формами головних згинів.

На основі (1.8) та (1.9) можна записати:

$$EI_i w_i^{IV}(x) = EI_c \sum_{k=1}^{n} \nu_{ik} p_k^{IV}(x) = \sum_{k=1}^{n} \nu_{ik}[q_k(x) - k_k p_k(x)]. \tag{1.10}$$

Підставимо (1.10) та (1.8) в систему диференційних рівнянь (1.7):

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\nu_{ik} \frac{I_c}{I_i} - \frac{al^3 k_k}{EI_0} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \nu_{jk} \right] p_k(x) = \beta_i \frac{Q(x) l^3}{EI_0} - \frac{al^3}{EI_0} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \sum_{k=1}^{n} \nu_{jk} q_k(x)\,. \tag{1.11}$$

Коефіцієнти ν_{jk} визначимо з умови рівності нулю виразу, що стоїть в квадратних дужках:

$$\nu_{ik} \frac{I_c}{I_i} \lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \nu_{jk}\,, \tag{1.12}$$

де

$$\lambda_k = \frac{EI_0}{al^3 k_k}.$$

Система рівнянь (1.12) має ненульовий розв'язок лише при рівності нулю його визначника:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - \frac{I_c}{I_1}\lambda_k & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} - \frac{I_c}{I_2}\lambda_k & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} - \frac{I_c}{I_n}\lambda_k \end{vmatrix} \qquad (1.13)$$

Оскільки $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, рівняння (1.13) має n дійсних додатних коренів λ_k.

Подібно до власних форм коливань в динаміці, форми головних згинів ν_{ik} володіють властивістю ортогональності:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{I_c}{I_i} \nu_{ik} \nu_{ir} = 0 \text{ при } r \neq k. \qquad (1.14)$$

Враховуючи (1.14), рівняння (1.11) набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} q_k(x) \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \nu_{jk} = \frac{\beta_i Q(x)}{a},$$

або, беручи до уваги (1.12),

$$\sum_{k=1}^{n} q_k(x) \nu_{ik} \frac{I_c}{I_i} \lambda_k = \frac{\beta_i Q(x)}{a}. \qquad (1.15)$$

Для визначення функції $q_k(x)$ помножимо i-е рівняння (1.15) на ν_{ir} та просумуємо за всіма значеннями i:

$$\sum_{k=1}^{n} q_k(x)\lambda_k \sum_{i=1}^{n} \frac{I_c}{I_i} \nu_{ik}\nu_{ir} = \frac{Q(x)}{a}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \nu_{ir}.$$

З врахуванням умови ортогональності (1.14) звідси випливає

$$q_k(x) = \frac{Q(x)\sum_{i=1}^{n} \beta_i \nu_{ik}}{a\lambda_k \sum_{i=1}^{n} \frac{I_c}{I_i} \nu_{ik}^2}. \tag{1.16}$$

Тепер для визначення головних згинів потрібно використати ті чи інші граничні умови для функцій $p_k(x)$.

Н.В. Маттес [89] розробила спеціальні допоміжні таблиці, що дозволяють вибрати фундаментальні функції для розрахунку перекриттів за методом головних вигинів. Пізніше аналогічну роботу провів італійський вчений А. Ломео [179].

Дослідженням роботи перехресно-балкових систем, в тому числі, з врахуванням впливу кручення, успішно займались В.А. Постнов та ін. [105]. В основі запропонованого ними методу розрахунку лежали наступні положення. Вузлові точки системи мають лише три ступені волі, лінійне переміщення в напрямку вертикальної осі oz та кути поворотів відносно осей $ox, oy,$ що лежать в площині системи, обумовлені не лише згином відповідної балки, але й закручуванням балки перпендикулярного напрямку. На цій основі окремо розглядались системи з невеликим числом балок, з одним перехресним зв'язком і загальний випадок – системи з великим числом балок в обох напрямках, де використовувався вже згаданий метод головних вигинів.

Рівняння, отримані І.Г. Бубновим, використовував Д.М. Ростовцев [111], який запропонував наближений поділ системи рівнянь І.Г. Бубнова на n незалежних рівнянь. Однак подальші дослідження показали, що метод Ростовцева дає хороші результати лише при плавній зміні навантаження вздовж балок та відношенні моментів інерції їх перерізів, що не перевищує 2-3. В інших випадках погрішність результатів може складати 10-15% і більше.

Розрахунок системи перехресних балок був виконаний також А.І. Сєгалем [114], котрий запропонував розчленовувати навантаження, прикладені до балок одного напрямку, на головні взаємно ортогональні частини, так, що кожна з них створює однакові за формою прогини всіх стержнів одного напрямку. Це дозволяє звести розрахунок перекриття до розрахунку балки на незв'язній пружній основі. Метод отримав назву «методу головних навантажень».

На основі перелічених вище методів С.В. Сімеонов побудував теорію статичного та динамічного розрахунку перехресних балок загального типу [117, 118]. В його роботах отримана загальна система диференційних рівнянь з дискретними коефіцієнтами, розв'язок яких подано в одинарних та подвійних рядах Фур'є.

Ці рівняння відрізняються від звичайних диференційних рівнянь тим, що їх коефіцієнти задані не за всією областю перехресно-балкової системи, а лише вздовж осей балок. Це дозволило відмовитись від прийнятої в роботах І.Г. Бубнова, П.Ф. Папковича та А.А. Курдюмова наближеної заміни зосереджених сил та реакцій, що діють на поперечні балки, деяким розподіленим навантаженням.

Тим не менше, метод, запропонований С.В. Сімеоновим, так же, як і методи П.Ф. Папковича та А.І. Сєгаля, виявився дуже громіздким та незручним для практичного застосування.

Суттєвий вклад в розрахунок методів розрахунку перехресно-балкових систем вніс С.П. Тимошенко [125, 126], роботи якого пізніше використовувало багато авторів для досліджень статики та динаміки перехресно-балкових систем [32, 90, 156, 183]. Основна ідея методу С.П. Тимошенко полягає в заміні перехресно-балкової системи еквівалентною анізотропною пластинкою, пружні параметри якої розподілені по поверхні, обмеженій контуром системи. Функцію прогинів С.П. Тимошенко апроксимував подвійними тригонометричними рядами, а невідомі коефіцієнти рядів визначав за методом Рітца.

Ідеї С.П. Тимошенко отримали подальший розвиток в цілому ряді робіт із застосуванням функцій як дискретного, так і безперервного аргументів. В цьому ж напрямку виконано роботи Б.Д. Ханьжова [133] та Ченга [161], які під час розрахунку перехресно-балкових систем на стійкість та коливання використовували апарат дельта-функцій в поєднанні із методом Рітца.

Принципово новий аналітичний метод розрахунку регулярних стрижневих систем, заснований на використанні теорії рівнянь в скінчених різницях, було розроблено І.М. Рабіновичем [108], Ф. Блейхом та Е. Меланом [31]. Точні розв'язки за цим методом при використанні основних припущень будівельної механіки, отримуються у природніх для дискретної розрахункової схеми функціях з дискретною зміною аргументу. Однак сам процес складання системи рівнянь (на основі використання умов рівноваги та нерозривності деформацій) та їх розв'язання виявився дуже громіздким та складним. Ця обставина призвела до того, що важлива в теоретичному відношенні робота Ф. Блейха та Е. Мелана довго залишалась без уваги, а різницеве числення використовувалось лише як апарат для наближеного розв'язку задач, що описуються диференційними рівняннями. Лише значно пізніше дослідники знов звернули увагу на можливість використання скінчено-різницевого числення як самостійного математичного апарату для розрахунку регулярних дискретних систем. Проблемі спрощення виведення скінчено-різницевих рівнянь під час розрахунку стрижневих систем та їх розв'язку присвячені роботи [171, 174, 184] та багато інших.

М.Ю. Прокуров [106] пропонує використовувати енергетичний метод для розрахунку перехресно-балкових систем. В побудованій основній системі використовуються шарніри Гука, що сприймають деформації кручення. В результаті розробки математичної моделі та алгоритмів є можливість визначення згинальних моментів в двох площинах, крутного моменту, поперечних сил та переміщень.

Д.П. Голоскоков запропонував наближений метод розрахунку перехресно-балкових систем [41]. Його модель заснована на ідеї методу Нав'є: прогини балок двох напрямків прирівнюються у вузлових точках. Викладається новий підхід до розрахунку перехресно-балкових систем, що використовує узагальнені функції: дельта-функцію Дірака та одиничну функцію Гевісайда. За допомогою дельтафункції моделюються зосереджені сили – вузлові реакції взаємодії балок, що перетинаються. Всі розрахунки виконано в системі символьних обчислень Maple.

Метод скінчених елементів (МСЕ) було детально описано О. Зенкевичем [60] та Галлагером [39] і являє собою чисельний метод розв'язку диференційних рівнянь з частинними похідними. Сутність методу полягає в побудові матриць жорсткості та накладенні на них граничних умов, що призводить в результаті до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь.

Стосовно поперечно-балкових систем ідея методу скінчених елементів полягає в розбитті системи на стержневі скінченні елементи або на об'ємні скінченні елементи та проведенні відповідних обчислень.

Одним із серйозних недоліків МСЕ Ю.І. Нємчинов [93] вважає неможливість розрахунку достатньо складних просторових конструкцій, як єдиних систем. Так, наприклад, одна секцій крупнопанельного дев'ятиповерхового будинку збирається із більш ніж 200 панелей. Число невідомих узагальнених переміщень при використанні плоских прямокутних скінчених елементів з трьома ступенями волі в кожному вузлі може складати десятки тисяч. Практична реалізація таких задачі на ЕОМ потребує великої підготовчої роботи, значної витрати машинного часу.

Також у сучасних програмних комплексах, зо реалізують МСЕ, погано враховується зміна згинальних жорсткостей в стержневих елементах. Зміна крутильної жорсткості в стержневих елементах в результаті тріщиноутворення не врахована взагалі. Це обмеження можна обійти із застосуванням об'ємних скінченних елементів, однак їх використання значно підвищує складність розрахункової моделі.

Сучасні обчислювальні комп'ютерні комплекси, такі, як ANSYS, NASTRAN, LIRA, SCAD, Sofistik та ін. Дещо спрощують таку роботу, однак розв'зок сучасних задач, в тому числі і задач розрахунку перехресно-балкових систем, все ще залишається складною задачею, як з точки зору машинних ресурсів, так і з точки зору витрат часу оператора.

Різним аспектам роботи перехресно-балкових систем присвячені роботи [18, 33…35, 43, 45…50, 73, 87, 88, 115, 116, 127].

1.3. Теоретичні основи застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів для розрахунку статично невизначених конструкцій

Скористаємось для описання механічних впливів на елемент та встановлення залежностей між граничними параметрами лівогвинтової системи координат (рис. 1.4) [70].

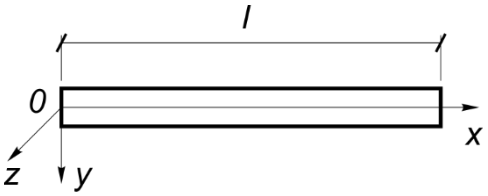


Рис. 1.4. Прийнята система координат

В загальному випадку в елементах перехресно-балкової системи виникають деформації зсуву, кручення та згину. Конструкції, що сприймають бокові навантаження, і, відповідно, такі, що працюють на розтяг-стиск, в даній роботі не розглядаються.

Прийняті додатні напрямки зовнішніх впливів та позначення показані на рис. 1.5.

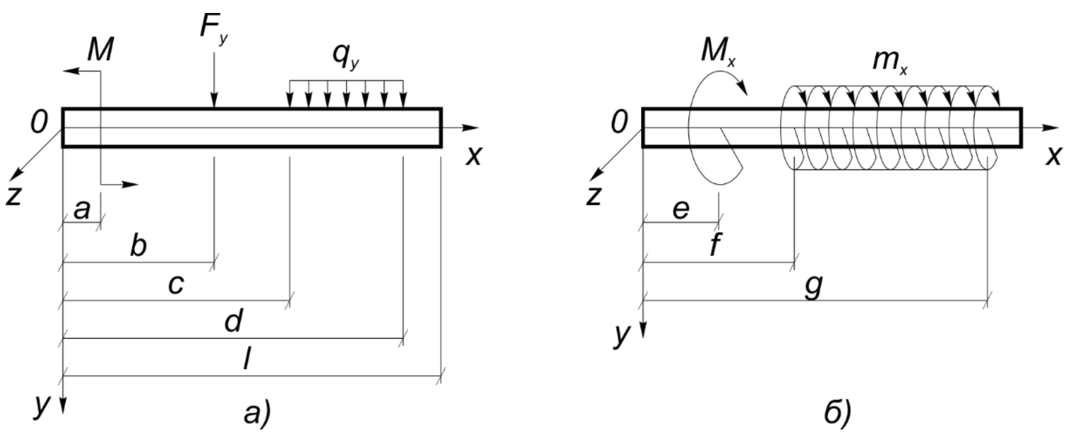


Рис. 1.5. Позначення для навантажень при згині (а) та крученні (б)

При деформуванні елемента конструкції у вигляді системи перехресних балок, в його граничних точках $x = 0$ та $x = l$ (на початку та в кінці елементу відповідно) виникають наступні кінематичні та статичні параметри:

а) згин

$\nu(0)$; $\nu(l)$ – поперечні переміщення граничних точок (в напрямку осі y);

$\varphi(0)$; $\varphi(l)$ – кути повороту перерізів в граничних точках;

$M(0)$; $M(l)$ – згинальні моменти;

$Q(0)$; $Q(l)$ – поперечні сили;

б) кручення

$\theta(0)$; $\theta(l)$ – кути закручування граничних точок;

$M_x(0)$; $M_x(l)$ – крутні моменти.

В прийнятій лівогвинтовій системі координат додатні лінійні переміщення граничних точок вважаються співпадаючими з напрямком осей $0x, 0y, 0z$. Кути повороту перерізів в граничних точках вважаються додатними, якщо вони спрямовані за годинниковою стрілкою з сторони додатного напрямку координатних осей [44].

Прийняті додатні напрямки граничних параметрів, що характеризують зусилля та деформації, показані на рис. 1.6.

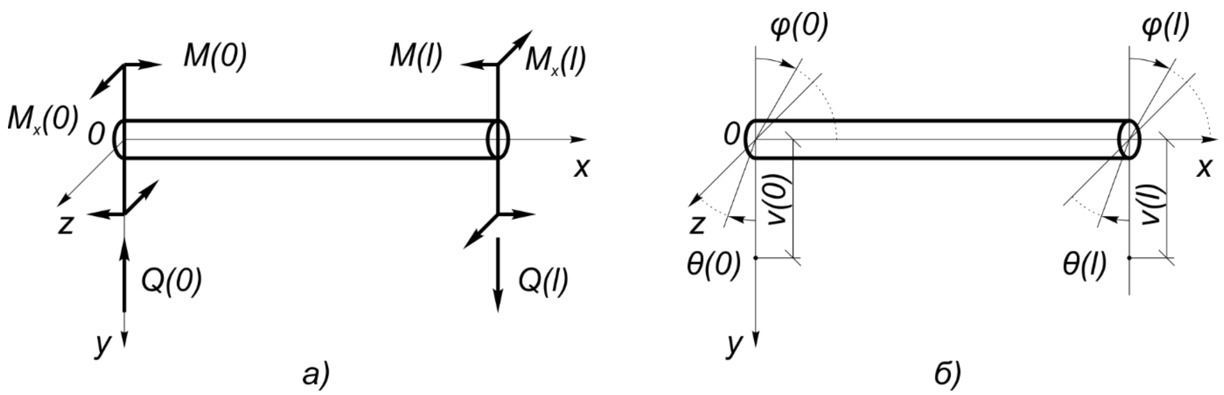


Рис. 1.6. Додатні напрямки граничних параметрів:

а – зусиль; б – переміщень

Розрахунок статично визначених і статично невизначених стержневих систем на статичні навантаження із застосуванням чисельно-аналітичного методу граничних елементів викладено в роботах [44, 59, 95].

Деформування елементів, що зазнають згину, описується диференційним рівнянням

$$EI\frac{d^4\nu}{dx^4} = q_y(x), \tag{1.17}$$

де ν – функція прогинів; EI – жорсткість перерізів, яка в пружній стадії роботи елементу дорівнює добутку модуля пружності матеріалу та моменту інерції поперечного перерізу.

Деформування елементів при крученні описується диференційним рівнянням

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{m(x)}{GI_{kp}}, \tag{1.18}$$

де θ – кут закручування; $m(x)$ – інтенсивність розподілених крутних моментів, що прикладені до елементу; G – модуль зсуву, що визначається за формулою

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)};$$

I_{kp} – момент інерції перерізу елементу при крученні.

Крутні моменти і зовнішнє навантаження пов’язані диференційним рівнянням

$$\frac{dM_x(x)}{dx} = -m(x), \tag{1.19}$$

де $M_x(x)$ – крутні моменти, що виникають в поперечних перерізах елементу; $m(x)$ – інтенсивність розподілених крутних моментів, прикладених до елементу.

Інтегруючи диференційне рівняння (1.17), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} EIv(x) = EIv(0) + EI\varphi(0)x - \dfrac{M(0)}{2}x^2 - \dfrac{Q(0)}{6}x^3 - \\ \quad - \int\limits_0^x \int\limits_0^x \int\limits_0^x \int\limits_0^x q_y(x)dxdxdxdx\,; \\ EI\varphi(x) = EI\varphi(0) - M(0)x - \dfrac{Q(0)}{2}x^2 - \int\limits_0^x \int\limits_0^x \int\limits_0^x q_y(x)dxdxdx\,; \\ M(x) = M(0) + Q(0)x + \int\limits_0^x \int\limits_0^x q_y(x)dxdx\,; \\ Q(x) = Q(0) + \int\limits_0^x q_y(x)dx\,; \\ GI_{kp}\theta(x) = GI_{kp}\theta(0) + M_x(0)x - \int\limits_0^x \int\limits_0^x m(x)dxdx\,; \\ M_x(x) = M_x(0) - \int\limits_0^x m(x)dx\,, \end{cases} \tag{1.20}$$

де $\nu(x), \varphi(x), M(x), \ Q(x), \theta(x), M_x(x)$ – відповідно, прогин, кут повороту, згинальний момент, поперечна сила, кут закручування та крутний момент в перерізі на відстані *x* від початку координат; $\nu(0), \varphi(0), M(0), \ Q(0), \theta(0), M_x(0)$ – відповідно, прогин, кут повороту, згинальний момент, поперечна сила, кут закручування та крутний момент в перерізі в початку координат.

Систему рівнянь (1.20) зручно представляти в матричному виді:

$$\vec{Y}(x) = \bar{A}(x)\vec{X}(0) + \vec{B}(x) \tag{1.21}$$

де $\vec{Y}(x)$ – вектор зусиль та переміщень в довільному перерізі; $\vec{X}(0)$ – вектор зусиль та переміщень на початку координат; $\bar{A}(x)$ – матриця коефіцієнтів системи рівнянь; $\vec{B}(x)$ – вектор зовнішнього навантаження.

Для системи, що складається з декількох елементів, рівняння (1.21) можна записати у вигляді

$$\vec{Y}(l_i) = \bar{A}(l_i)\vec{X}(0) + \vec{B}(l_i) \tag{1.22}$$

де $\vec{Y}(l_i)$ – матриця зусиль та переміщень в кінці елементів; $\vec{X}(0)$ – матриця зусиль та переміщень в початку елементів; $\bar{A}(l_i)$ – матриця коефіцієнтів системи рівнянь напружено-деформованого стану елементів; $\vec{B}(l_i)$ – матриця зовнішнього навантаження; l_i – довжина i-го елементу.

Виконаємо для (1.22) перетворення матриць за схемою:

$$\begin{gathered} \vec{Y}(l_i) = \bar{A}(l_i)\vec{X}(0) + \vec{B}(l_i) \to \bar{A}(l_i)\vec{X}(0) - \vec{Y}(l_i) = \\ = -\vec{B}(l_i) \to \overline{A^*}\overrightarrow{X^*} = -\vec{B}(l_i) \end{gathered} \tag{1.23}$$

Для запису матриці зовнішнього навантаження скористаємось методом початкових параметрів. Правила знаків при цьому приймаються відповідно до рис. 1.5, 1.6.

Елементи матриці зовнішнього навантаження при згині:

$$\begin{gathered} B_1 = \Big\|_{x>a} M\frac{(x-a)^2}{2} + \Big\|_{x>b} F_y\frac{(x-b)^3}{6} + \\ + \Big\|_{x>c} q_y\frac{(x-c)^4}{24} - \Big\|_{x>d} q_y\frac{(x-d)^4}{24} \\ B_2 = M(x-a) + \Big\|_{x>b} F_y\frac{(x-b)^2}{2} + \Big\|_{x>c} q_y\frac{(x-c)^3}{6} - \Big\|_{x>d} q_y\frac{(x-d)^3}{6} \\ B_3 = M + F_y(x-b) + \Big\|_{x>c} q_y\frac{(x-c)^2}{2} - \Big\|_{x>d} q_y\frac{(x-d)^2}{2} \\ B_4 = F_y + q_y(x-c) - q_y(x-d). \end{gathered} \tag{1.24}$$

Елементи матриці зовнішнього навантаження при крученні:

$$B_5 = \|_{x>e} M_x(x-e) + \Big\|_{x>f} m_x \frac{(x-f)^2}{2} - \Big\|_{x>g} m_x \frac{(x-g)^2}{2}$$
$$B_6 = M_x + \|_{x>f} m_x(x-f) - \|_{x>g} m_x(x-g) \quad (1.25)$$

1.4. Визначення крутильної жорсткості залізобетонних елементів

Згин балочних елементів тією чи іншою мірою завжди супроводжується крученням, що пояснюється рядом причин: наявність ексцентриситету, обумовленого асиметрією поперечного перерізу, неоднорідністю матеріалу, позацентровим прикладенням згинального навантаження.

В багатьох випадках невраховане кручення може призвести до невірного уявлення про характер перерозподілу зусиль в системі, а іноді і до руйнування конструкції.

Кручення в залізобетоні являє собою досить складне явище і суттєво відрізняється від кручення елементів, виготовлених з інших матеріалів. В літературі описані чотири випадки руйнування залізобетону при крученні.

Ще більш складним є згин з крученням, оскільки при цьому відбувається накладення варіантів руйнування при крученні з декількома варіантами руйнування при згині. Окрім того, характер руйнування залежить від форми поперечного перерізу, схеми поперечного та поздовжнього армування, співвідношення міцності бетону на стиск та міцності арматурної сталі на розтяг.

На сьогодні відомий цілий ряд методів оцінки міцності залізобетону за наявності кручення. Деякі з них відображені в діючих нормативних документах. Однак багато аспектів освітлені недостатньо, а часто розходяться з експериментальними даними.

Так, в нормативних документах немає рекомендацій з визначення напружень в арматурі, що сприймає нормальні та дотичні зусилля. Не вказано, як визначати січний модуль пружності спіральних смуг бетону вздовж та впоперек тріщин. Відсутні значення нормативного та розрахункового опорів кручення для різних класів бетону. Не враховується зниження границі призмової міцності бетону при складному напруженому стані та ін.

Сказане свідчить про те, що проведення теоретичних, комп'ютерних та експериментальних досліджень міцності залізобетонних конструкцій довільного переріз при крученні зі згином, в тому числі і перехресно-балкових систем, є актуальною задачею.

Перші оцінки напружено-деформованого стану залізобетонних елементів при згині щ крученням були засновані на загальних положеннях теорії пружності та виконувались за припустимими напруженнями. А потрібна кількість арматури визначалась, виходячи з двох незалежних розрахунків – на згин і окремо – на кручення. Узагальнення отриманих результатів було основою для конструювання залізобетонних елементів.

Експериментальні дослідження роботи залізобетонних елементів при крученні, виконані П. Андерсеном [145, 146], показали, що запропоновані Е. Раушем залежності суттєво занижують несучу здатність конструкції в зв'язку з тим, що не враховують міцність бетону. Змінюючи міцність бетону в значних межах, П. Андерсен на зразках прямокутного перерізу експериментально довів вплив міцності бетону на несучу здатність елементу.

Цей вплив враховується поправкою у формулі Е. Рауша, зробленою шляхом введення коефіцієнту λ, що залежить, як показав П. Андерсен, від розміщення арматури та співвідношення розмірів поперечного перерізу:

$$T = T_B + T_S = T_B + \frac{2\lambda h_w b_w A_{sw}[\sigma_s]}{S}. \tag{1.26}$$

Г. Коуен [164] визначив коефіцієнт λ теоретично, прирівнявши половину роботи зовнішнього моменту до енергії деформації арматури, і встановив, що коефіцієнт λ залежить лише від співвідношення сторін прямокутника, і в практичних розрахунках може бути прийнятий рівним 0,8. Відповідна формула для визначення розрахункового крутного моменту, що сприймається елементом прямокутного перерізу, має вигляд

$$T = T_B + T_S = \alpha[\sigma_b]b^2h + \frac{1{,}6h_w b_w A_{sw}[\sigma_s]}{S}, \tag{1.27}$$

де α – константа пружного кручення Сен-Венана; $[\sigma_b]$, $[\sigma_s]$ – допустимі напруження в бетоні і арматурі; b, h – розміри поперечного перерізу елементу.

Числовий множник другого доданка відрізняється від прийнятих в роботах Е. Рауша та П. Андерсена, і враховує зменшення напружень в хомутах в напрямку від середин гілок до кутів перерізів.

Пізніше Г. Ернст [167] провів експерименти на балках прямокутного перерізу при різному співвідношенні поздовжнього та поперечного армування, яке характеризується величиною:

$$m = \frac{R_{sw}A_{sw}b}{R_s A_s S}, \tag{1.28}$$

де R_s, R_{sw} – межі текучості поздовжньої та поперечної арматури; A_s, A_{sw} – площа перерізів кутових стержнів і площа перерізу хомута.

Досліди Г. Ернста довели залежність характеру руйнування залізобетонного елементу від виду армування. При проведенні досліджень ним були зафіксовані напруження, що відповідають межі текучості, як в хомутах, так і в поздовжній арматурі.

Сумісна дія згинального та крутного моментів експериментально досліджували Г. Коуен та С. Армстронг [165]. Була встановлена взаємодія крутного та згинального моментів, що проявилось в характері руйнування та взаємній зміні граничних значень зусиль залежно від співвідношення їх інтенсивностей.

Тим не менше, Г. Коуен [74] вважав, що розрахунок таких елементів слід виконувати роздільно на згин та кручення, не враховуючи їх взаємовплив.

Слід відмітити, що всі описані вище дослідження засновані на використанні умовних розрахункових схем. Прийняті Е. Раушем гіпотези хоча й відповідають реальній роботі поздовжньої та поперечної арматури на розтяг, а бетону – на стиск, але розрахункові формули справедливі для деякої проміжної стадії навантаження, а не для граничного стану. В деяких випадках приведення формул Е. Рауша до відповідності з результатами експериментальних даних відбувалось шляхом введення додаткових і не завжди необгрунтованих поправок. Крім того, не враховувався взаємний вплив зовнішніх зусиль для елементів, що працюють при одночасному згині з крученням.

П.І. Бурлаченко [37], на основі аналізу власних експериментальних досліджень, а також дослідження Г. Ернста [167], робить висновок про те, що несуча здатність залізобетонних елементів, що сприймають поперечну силу і кручення, знижується на 25% порівняно із згинальними елементами.

Ефект зниження несучої здатності елементів через наявність в них поряд із згином і кручення, порівняно з елементами, що зазнають лише згин, відмітив В.Н. Байков [20...23]. Він запропонував метод розрахунку залізобетонних елементів, що зазнають згину з крученням, заснований на загальних співвідношеннях теорії згину.

Формули В.Н. Байкова мають вид

$$M = \sigma_s z_y A_{sx}; \tag{1.29}$$

$$T = 2\tau_{xz} z_y A_{sx}. \tag{1.30}$$

В цих формулах в якості характеристики міцності поздовжньої арматури вводиться знижена границя текучості $\sigma_s = kR$ де $k \leq 1$. Таким чином, враховується, що арматура досягає стану текучості раніше, ніж напруження в ній досягнуть границі текучості при одновісному розтягу. Формули В.Н. Байкова справедливі для елементів, армованих поздовжньою та поперечною арматурою в такій кількості, що на границі несучої здатності арматура встигає досягнути границі текучості. При виведенні формул (1.29) та (1.30) мається на увазі переважний вплив згину, порівняно з крученням, тобто $T/M \leq 1$.

Теорія В.Н. Байкова отримала розвиток в роботах В.І. Фомичева [130], О.К. Базоєва [19], В.І. Попова [104] та ін.

1.5. Методи розрахунку нерозрізних залізобетонних стержневих конструкцій з врахуванням тріщиноутворення

Крутильна жорсткість окремих елементів перехресно-балкової системи впливає на перерозподіл зусиль в цих елементах. Крутильна жорсткість, в свою чергу, залежить від наявності тріщин. При дії великих крутних моментів в залізобетонних балках утворюються просторові спіральні тріщини. Вивченню жорсткості елементів з такими тріщинами присвячено чимало робіт, основними з яких є роботи Н.І. Карпенко та його учнів [63, 64].

Перші роботи з вивчення залізобетонних елементів при крученні належать Е. Мершу [173, 182], та лягли в основу методу розрахунку за допустимими напруженнями. Гіпотези Е. Мерша, засновані на рівняннях теорії пружності, протягом достатньо довгого періоду визначали напрямок інших досліджень роботи залізобетону при крученні.

Гіпотези Е. Мерша були сформульовані для елементів з прямокутною формою поперечного перерізу та полягали в наступному:

- при руйнуванні утворюються тріщини, розміщені під кутом 45^{o} до поздовжньої осі елемента;

- головні розтягуючі напруження сприймаються поздовжньою і поперечною арматурою;

- шар бетону, розміщений між похилими тріщинами, працює на стиск.

Пізніше Е. Рауш [109, 188] розповсюдив гіпотези Е. Мерша на інші форми поперечного перерізу.

Ідея підходу Мерша-Рауша полягає в тому, що рівновага елементу розглядається відносно центру кручення перерізу на стадії з тріщинами в бетоні, що утворилися під нахилом 45^{o} до поздовжньої осі під дією головних розтягуючих напружень. При цьому елемент являється у вигляді просторової решітчастої системи з арматурних стержнів, а роль розпорок виконують полоси стиснутого бетону (рис. 1.7).

Мається на увазі, що головні розтягуючі напруження повністю сприймаються поздовжньою і поперечною арматурою, а головні стискаючі напруження – полосами бетону.

Максимальний крутний момент в елементі, армованому поздовжньою стержневою арматурою та хомутами, визначається у виді

$$T = 2h_w b_w \frac{A_{sw}[\sigma_{sw}]}{S} = h_w b_w \frac{A_{s,tot}[\sigma_s]}{h_w + b_w}, \tag{1.31}$$

де A_{sw}, $A_{s,tot}$ – площа поперечного перерізу гілки хомута та поздовжньої арматури відповідно; $[\sigma_s]$, $[\sigma_{sw}]$ – допустимі напруження в арматурі; h_w, b_w – висота та ширина умовного ядра перерізу; S – крок хомутів.

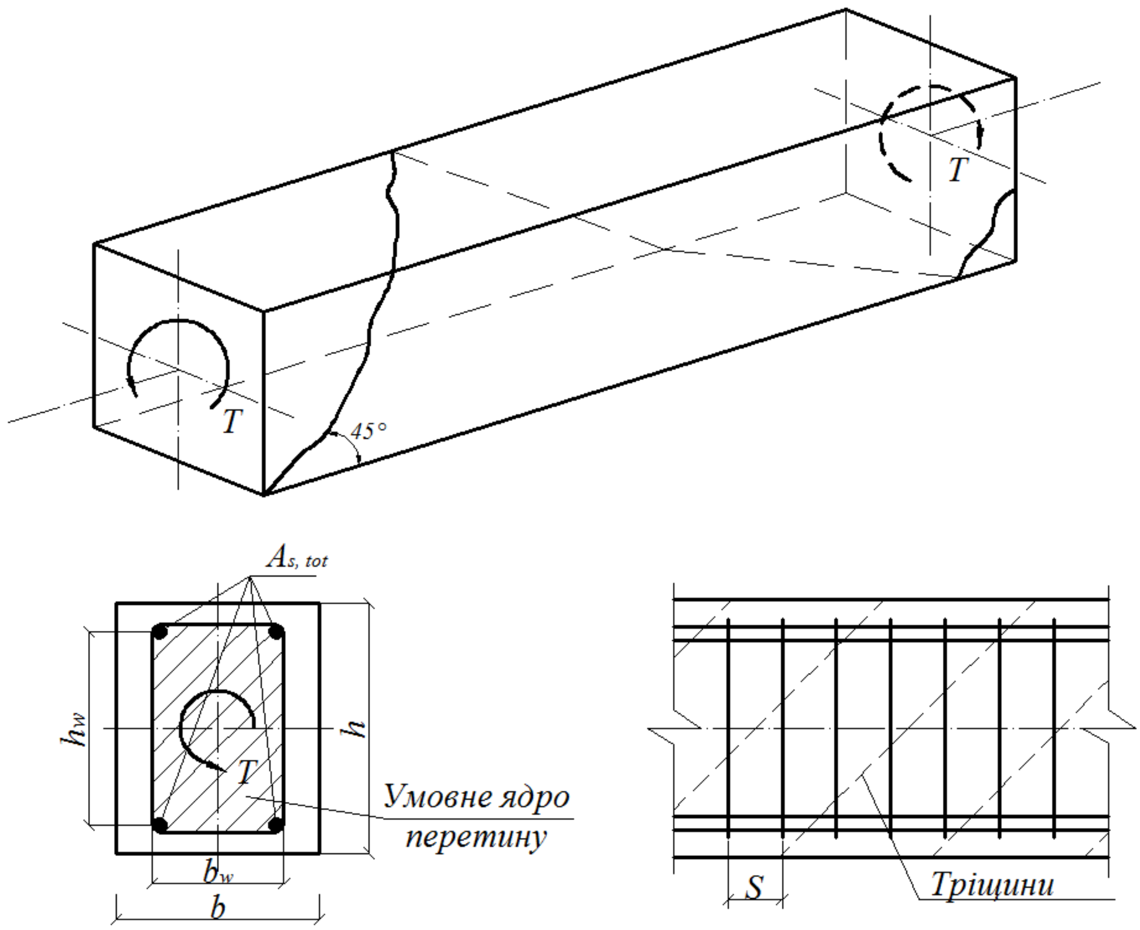


Рис. 1.7. Розрахунок елементів при чистому крученні методом Мерша-Рауша

Н.Н. Лессіг [83, 84], розвиваючи ідеї А.А. Гвоздєва [40], провела експериментальні та теоретичні дослідження і запропонувала методику розрахунку міцності залізобетонних елементів при згині з крученням по методу граничної рівноваги. Запропоновані нею розрахункові формули були потім підтверджені експериментальними дослідженнями інших вчених – П.І. Бурлаченко [37], І.М. Ляліна [86], Ю.В. Чиненкова [134] та багатьох інших.

Основна ідея Н.Н. Лессіг полягає у твердженні, що руйнування залізобетонного елементу прямокутного перерізу при згині з крученням відбувається в результаті розкриття просторової тріщини, що утворює просторовий переріз. При цьому стиснена зона орієнтована паралельно одній із граней бруса та спрямована під кутом до поздовжньої осі елементу (рис. 1.8), а її розміщення залежить від комбінації діючих на елемент зовнішніх зусиль.

Н.Н. Лессіг пропонує розглядати два варіанти: сумісна дія крутного та згинального моментів з розміщенням стиснутої зони біля грані бруса, стиснутої згинальним моментом (рис. 1.8, а); сумісна дія крутного моменту і поперечної сили з розміщенням стиснутої зони біля грані, паралельної площині дії згинального моменту (рис. 1.9, б).

В обох варіантах вихідне положення полягає в тому, що поздовжня та поперечна арматура, перетнуті просторовою тріщиною, працюють на розтяг, а напруження в них досягають границі текучості, тобто утворюється пластичний шарнір.

Напруження в бетоні досягають границі міцності на стиск, на розтяг бетон не працює. Площа перерізу поперечної арматури приймається постійною за всією довжиною ділянки, що розглядається.

Для розв’язання поставленої задачі Н.Н. Лессіг складає два рівняння рівноваги: суму моментів зовнішніх і внутрішніх сил відносно осі, що паралельна нейтральній осі і проходить через центр ваги стиснутої зони, та суму проекцій зовнішніх і внутрішніх сил на нормаль до площини стиснутої зони.

Розрахункові формули отримані теоретично, на основі методу граничної рівноваги. Дещо пізніше А.А. Гвоздєв отримав ці ж формули, виходячи з роботи зовнішніх та внутрішніх сил на можливих переміщеннях.

В остаточному вигляді формули для розрахунку залізобетонних елементів на сумісний згин з крученням мають наступний вид:

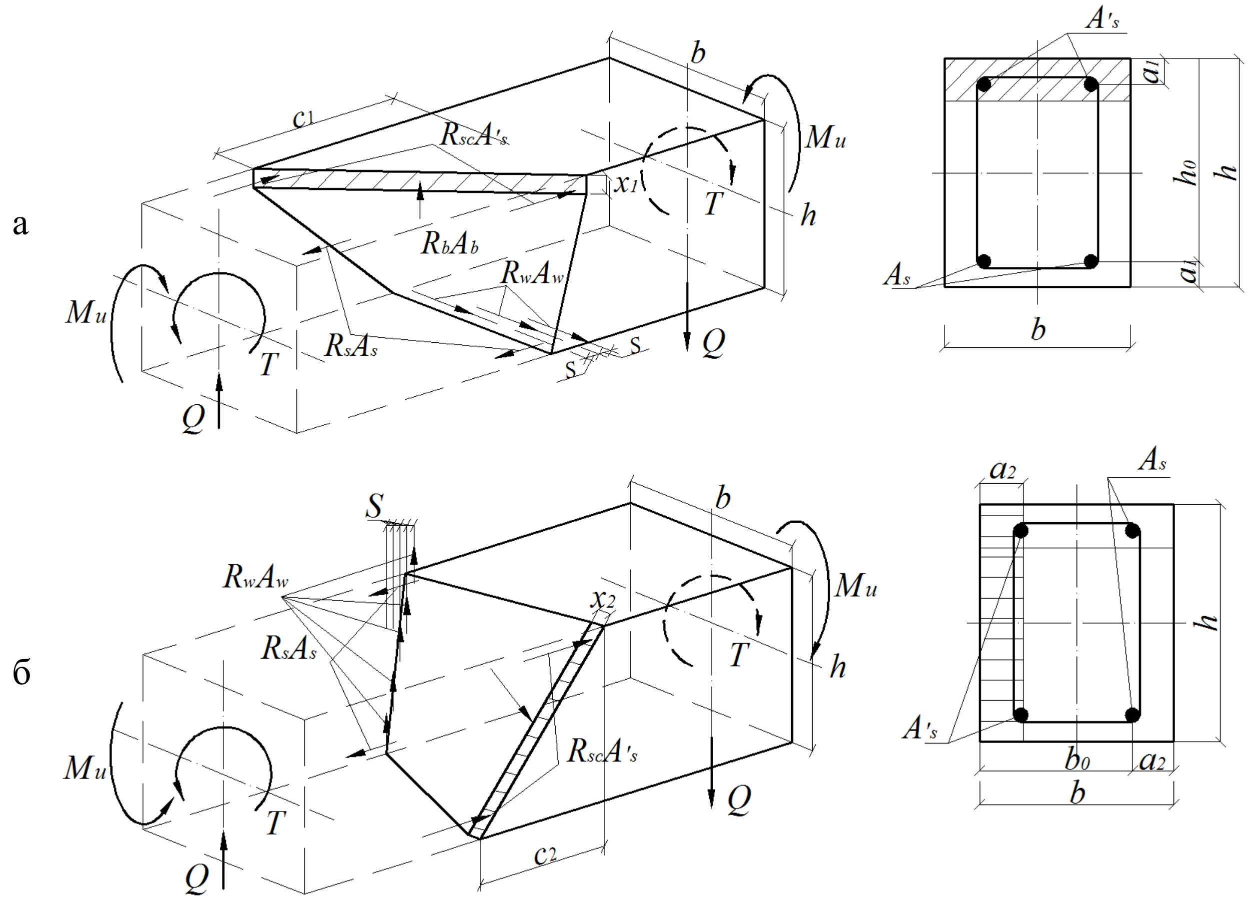


Рис. 1.8. Розрахункові схеми, запропоновані Н.Н. Лессіг

- для руйнування за першим варіантом:

$$T\left(\frac{c_1}{b}+\frac{1}{x}\right)\leq\left[R_sA_{s1}+R_w\frac{A_wc_1^2}{S(2h+b)}\right]\left(h_0-\frac{x_1}{2}\right)+R_{sc}A'_s\left(\frac{x_1}{2}-a_1\right); \qquad (1.32)$$

$$c_1=-\frac{b}{\chi}+\sqrt{\left(\frac{b}{\chi}\right)^2+\frac{R_sA_{s1}S}{R_wA_w}(2h+b)}; \qquad (1.33)$$

$$c_{1,max}=2h+b; \qquad (1.34)$$

$$R_b(c_1^2+b^2)x_1=\left[R_sA_{s1}+R_w\frac{A_wc_1^2}{S(2h+b)}-R_{sc}A_s'\right]b; \qquad (1.35)$$

- для руйнування за другим варіантом:

$$T\frac{c_2}{h}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\leq\left[R_sA_{s2}+R_w\frac{A_wc_2^2}{S(2h+b)}\right]\left(b-a_2-\frac{x_2}{2}\right); \qquad (1.36)$$

$$c_2=\sqrt{\frac{R_sA_{s2}S}{R_wA_w}(2b+h)}; \qquad (1.37)$$

$$c_{2,max}=2b+h; \qquad (1.38)$$

$$R_b(c_2^2+b^2)x_2=\left[R_sA_{s2}+R_w\frac{A_wc_2^2}{S(2b+h)}\right]h. \qquad (1.39)$$

В (1.32…1.39) прийняті позначення:

$\chi=\frac{T}{M_u}$ – відношення крутного моменту до згинального моменту від зовнішніх сил (для першого варіанту руйнування);

$\lambda=\frac{2T}{Qb}$ – відношення крутного моменту до моменту від поперечної сили відносно вертикальної грані балки (для другого варіанту руйнування);

$h_0-\frac{x_1}{2}; b-a_2-\frac{x_2}{2}$ – плечі пар внутрішніх сил;

A_{s1}, A_{s1}' – площа перерізу поздовжньої арматури у горизонтальних граней елементу;

A_{s2}, A_{s2}' – площа перерізу поздовжньої арматури у вертикальних граней;

A_{sw} – площа перерізу однієї гілки хомута;

S – крок хомутів;

x_1та x_2 – висота стиснутих зон при першому та другому варіантах руйнування;

c_1и c_2 – довжина проекції тріщин на вісь балки при першому та другому варіантах руйнування.

З (1.32…1.39) випливає, що характер руйнування елементу при згині з крученням залежить від співвідношення між величинами силових факторів, що діють на елемент; співвідношення поздовжнього та поперечного армування; співвідношення сторін поперечного армування.

Викладений метод має ряд недоліків. Так, величини проекцій стиснутих зон на поздовжню вісь елементу не можуть бути довільними, а обмежуються значеннями, що визначаються за формулами (1.33) та (1.38). Розміри поперечного перерізу назначаються з врахуванням умови забезпечення міцності бетону при стиску. Оскільки залежності (1.32…1.39) визначені з припущення руйнування елементу з утворенням пластичного шарніру, необхідно назначати граничний стан поздовжнього армування до поперечного, що забезпечує роботу поздовжньої та поперечної арматури до границі текучості. Якщо ж в момент руйнування елементу напруження в будь-якому стержні нижче границі текучості, крутний момент, визначений за формулами (1.32) та (1.36), суттєво відрізняється від дійсного.

В зв’язку із цим Н.Н. Лессіг, провівши додаткові дослідження [82], запропонувала формулу:

$$\xi \geq \xi_R = 0{,}55 - 0{,}7\sqrt{\chi}. \qquad (1.40)$$

Розрахунок за методом граничної рівноваги отримав розповсюдження на елементи довільної форми поперечного перерізу після проведення чисельних експериментальних та теоретичних досліджень елементів таврової, двотаврової, круглої форми поперечного перерізу. Дослідження елементів таврового та двотаврового перерізу виконували Л.К. Рулле [112] та Т.П. Чистова [135, 136], елементів кільцевого перерізу – В.К. Ягодин [141] та Е.Г. Єлагін [58].

В.К. Юдин [139, 140] розглянув застосування методу граничної рівноваги для складних силових впливів – згину з крученням при поздовжньому центральному та позацентровому розтягу-стиску. Причому, вперше охопив випадки дії згинального моменту в одній площині, і в двох площинах, що проходять через головні осі інерції поперечного перерізу елементу. Слідуючи за Н.Н. Лессіг, В.К. Юдін також розглядає два варіанти руйнування, для кожного з яких складається по два рівняння рівноваги – відносно поздовжньої осі елемента, що проходить через центр ваги перерізу, і відносно поперечних осей (горизонтальної – для першого варіанту руйнування і вертикальної – для другого варіанту руйнування). Тріщини на всіх гранях елементу розміщені під кутом 45˚, а плечі пар внутрішніх зусиль рівні розмірам ядра перерізу h_w та b_w.

Розрахункові формули В.К. Юдіна співпадають з формулами Е. Рауша, а це означає, що розрахунок елементу можна виконувати на кожне зусилля роздільно, що не відповідає дійсній роботі залізобетонного елементу. Крім того, методика В.К. Юдіна не враховує взаємодії зусиль.

Д.Х. Касаєв [67…69] встановив, що при крученні залізобетонних елементів можливі декілька випадків руйнування, які залежать від співвідношення поздовжнього та поперечного армування, а також від міцності бетону. При виведенні розрахункових залежностей Д.Х. Касаєв прийняв наступні гіпотези:

- тріщини розвиваються по спіралі під кутом 45˚ до осі елемента;
- арматура працює на розтяг, бетон – на стиск;
- зусилля в арматурі представлені рівномірно розподіленими інтенсивностями поздовжнього q_s та поперечного q_{sw} армування, які визначаються з виразів:

$$q_s = \frac{R_s A_{s,tot}}{2(h_w + b_w)}; \tag{1.41}$$

$$q_{sw} = \frac{R_{sw} A_w}{S}. \tag{1.42}$$

Крутний момент визначається відносно поздовжньої осі (рис. 1.9), що проходить через точку прикладення рівнодіючої стискаючих напружень в бетоні N_b:

$$T = N_s b_0 \eta. \tag{1.43}$$

Проекція рівнодіючої зусиль в арматурі на нормаль до напрямку тріщини:

$$N_s = \frac{h_s q \cos[45° - \arcsin(q_{sw}/q)]}{\sin 45°}, \quad (1.44)$$

де $q = \sqrt{q_s^2 + q_{sw}^2}$.

а

б

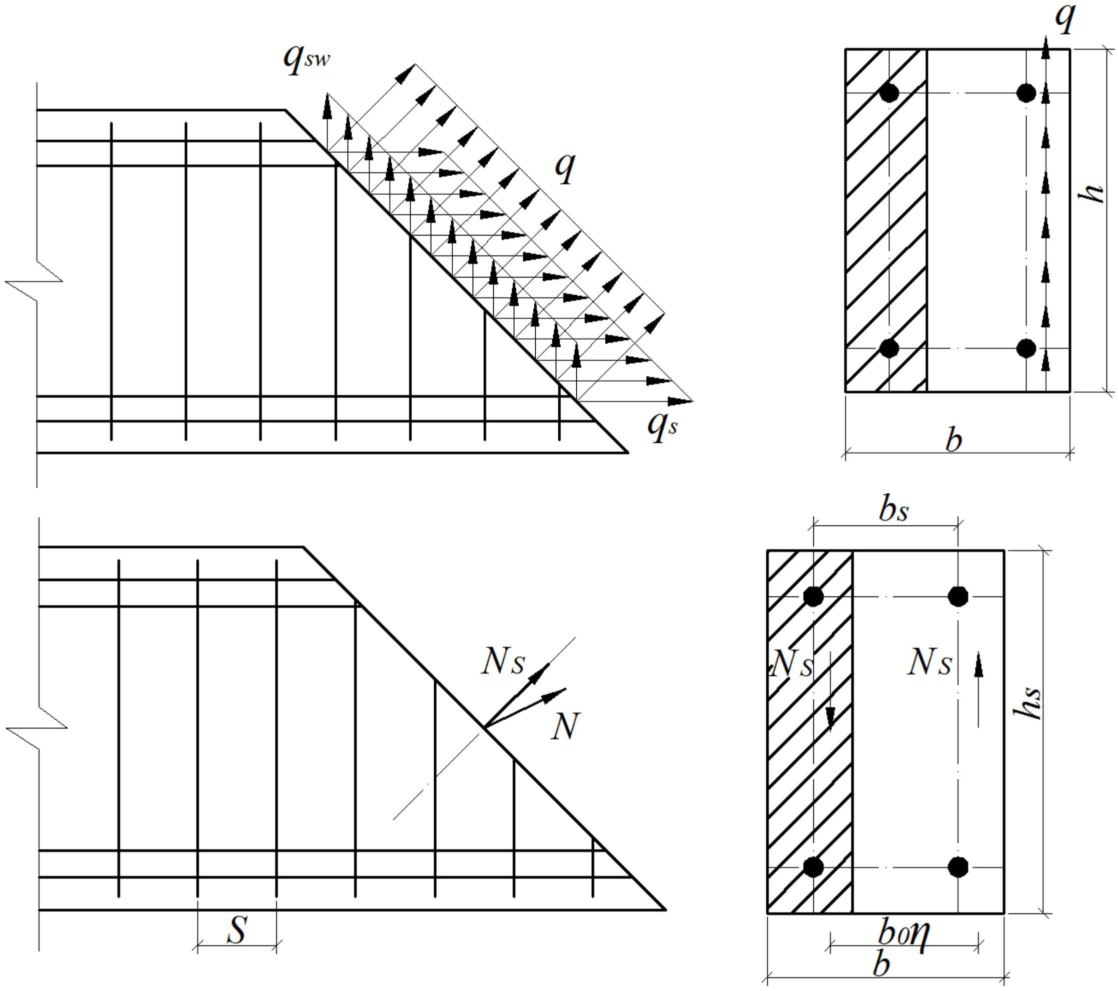


Рис. 1.9. Розрахункова схема, запропонована Д.Х. Касаєвим (а – силові інтенсивності армування; б – прикладення нормальних сил)

Коефіцієнт η було визначено експериментально, на основі обробки дослідних даних випробувань великого числа балок на кручення.

З врахуванням визначених значень η та N_s вираз (1.43) має видимеет вид

$$T = \frac{1{,}62}{1 + 2\alpha} q b_0 h_s \cos[45° - \arcsin(q_{sw}/q)] \cos[\arctan(q_{sw}/q)^2\, 45°], \quad (1.45)$$

де $\alpha = \sqrt{\alpha_s^2 + \alpha_{sw}^2}$; $\alpha_s = \frac{R_s A_{s,tot}}{R_b hb}$; $\alpha_{sw} = \frac{2R_{sw} A_{sw}}{R_b bS}$.

Тут α_s, α_{sw} – коефіцієнти поздовжнього та поперечного армування, що характеризують відношення запасів міцності перерізу на розтяг до запасів міцності на стиск в поздовжньому в поздовжньому та поперечному напрямках, що враховують вплив міцності сталі, бетону, ступеню поздовжнього та поперечного армування.

В.І. Колчунов [71, 72] запропонував двоблокову модель опору залізобетонного елементу дії згинального та крутного моментів, що враховують складний напружений стан стиснутого бетону, нормальні та дотичні зусилля в арматурі. При цьому підлягають розгляду три положення стиснутої зони: у верхньої грані, бічної і нижньої.

В.І. Колчунов пропонує визначати проекцію небезпечної похилої тріщини, як функцію багатьох змінних:

$$\begin{gathered} F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ + \lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{gathered} \tag{1.46}$$

Ідеї В.І. Колчунова отримали розвиток в роботі А.Г. Сафонова [113], який розробив алгоритм розрахунку залізобетонних елементів на згин з крученням, заснований на двоблочній моделі опору крученню.

Н.І. Карпенко [63…65] запропонував теорію деформування залізобетону з тріщинами, яка знайшла застосування і для розрахунку елементів, що працюють при крученні та крученні за згином. Ця теорія встановлює загальні залежності напружено-деформованого стану двовісно навантажених елементів при різних схемах армування, залежно від схем тріщиноутворення та на різних стадіях прикладення навантаження. В загальних рівняннях деформування елементів враховується взаємодія арматури та бетону на ділянках між тріщинами за рахунок сил зчеплення та сумісність осьових та тангенціальних переміщень арматурних стержнів різних напрямків в місцях перетину їх тріщинами.

Н.І. Карпенко виділив в залізобетонних просторово деформованих елементах не лише поздовжні зусилля, але й дотичні, що діють на рівні арматурних стержнів. В запропонованих ним залежностях дія дотичних зусиль в арматурних стержнях одного напрямку, що впливають на осьові напруження стержнів іншого напрямку, враховуються коефіцієнтами $\lambda_{ax} < 1$ та $\lambda_{ay} < 1$. Ці коефіцієнти отримані за емпіричними залежностями, і враховують здатність арматури передавати зусилля перпендикулярно до своєї осі, а також зачеплення берегів тріщин.

Остаточно залежності для визначення нормальних напружень в арматурі залізобетонного елементу з тріщинами, що піддається чистому крученню, мають вид

$$\sigma_{ax} = \frac{T\lambda_{ax}\operatorname{ctg}\alpha}{A_{sw}bh_x[1 + b_x h_n/(b_n h_x)]}; \qquad (1.47)$$

$$\sigma_{ay} = \frac{T\lambda_{ay}\operatorname{ctg}\alpha}{A_{sw}hb_x[1 + b_n h_x/(b_x h_n)]}; \qquad (1.48)$$

$$\sigma_{az} = \frac{T\lambda_{ax}(h + b)}{2A_s h_n b_x[1 + b_n h_x/(b_x h_n)]}, \qquad (1.49)$$

де A_{sw}, A_s – площа поперечного перерізу гілки хомута та всієї поздовжньої арматури, поставленої біля однієї грані, відповідно; $\sigma_{ax}, \sigma_{ay}, \sigma_{az}$ – нормальні напруження в горизонтальних та вертикальних гілках хомутів та в поздовжній арматурі; α – кут нахилу тріщин на гранях брусу; h, b – висота і ширина поперечного перерізу; h_x, b_x – відстань між гілками хомутів; h_n, b_n – відстань між осями поздовжніх стержнів.

Теорія Н.І. Карпенко перевірялась та підтвердилась експериментами Е.Г. Єлагіна [58], а її застосовність до елементів таврового перерізу досліджувала Т.П. Чистова [136].

З робіт іноземних вчених, присвячених дослідженню залізобетонних елементів, що зазнають, поряд з крученням, й інші види опору, відмітимо роботи

Г. Гезунда [169, 170]. Тут для розрахунку елементів на згин з крученням використовується схема руйнування, запропонована Н.Н. Лессіг.

Особливість теорії Г. Гезунда полягає в спробі оцінити опір дотичним зусиллям арматури в бетоні у випадку слабкого поперечного армування або за його відсутності при великих значеннях T/M.

В пропозиції крутильного руйнування елементу граничний крутний момент за Г. Гезундом визначається так:

$$M_{kp} = r_c \frac{R_p l_T}{5\sin\beta - \psi}\left(\frac{a_1}{\cos\beta} + \frac{a_2}{\sin\beta}\right)\left[\frac{2(h-2a_1)r_t^2}{S} + \sqrt{r_i^2}\right], \qquad (1.50)$$

де R_p – міцність бетону на розтяг; l_T – відстань між тріщинами (рис. 1.10).

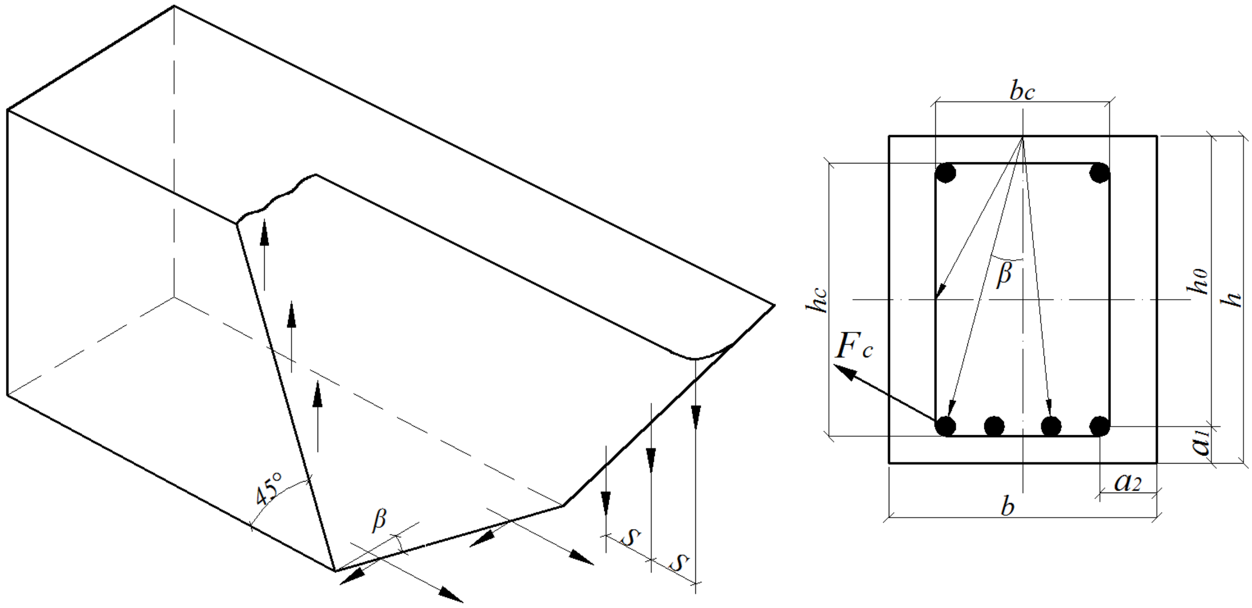


Рис. 1.10. Розрахункова схема при крученні зі згином, запропонована Г. Гезундом

Несуча здатність елементу з слабким поперечним армуванням або за його відсутності визначається як момент сил сколювання бетону відносно осі поздовжнього гарніру, що утворюється на грані, стиснутій від згину. Згідно з пропозиціями Г. Гезунда, руйнування бетону в результаті його сколювання може відбуватись за трьома схемами (рис. 1.11), тому граничне зусилля визначається як мінімальне значення, визначене з врахуванням розміщення пластичного шарніру та площини руйнування.

Г. Гезунд не обмежується розрахунком залізобетонного елементу за формулою (1.50), і, у випадку наявності поперечної арматури, пропонує перевіряти його несучу здатність з припущення руйнування в результаті текучості хомутів:

$$T = \frac{A_{sw}\sigma_{T,sw}}{u}(b - 2a_2)[(h - 2a_1) + h_0 \operatorname{ctg}\theta]. \tag{1.51}$$

Якщо ж руйнування відбувається від згину, несуча здатність елементу визначається за формулою

$$M_u = \frac{M_0}{1 + \psi\frac{h_c(h + b\,\mathrm{tg}\,\theta)}{b_c(h_c + h_0\,\mathrm{tg}\,\theta)}}. \tag{1.52}$$

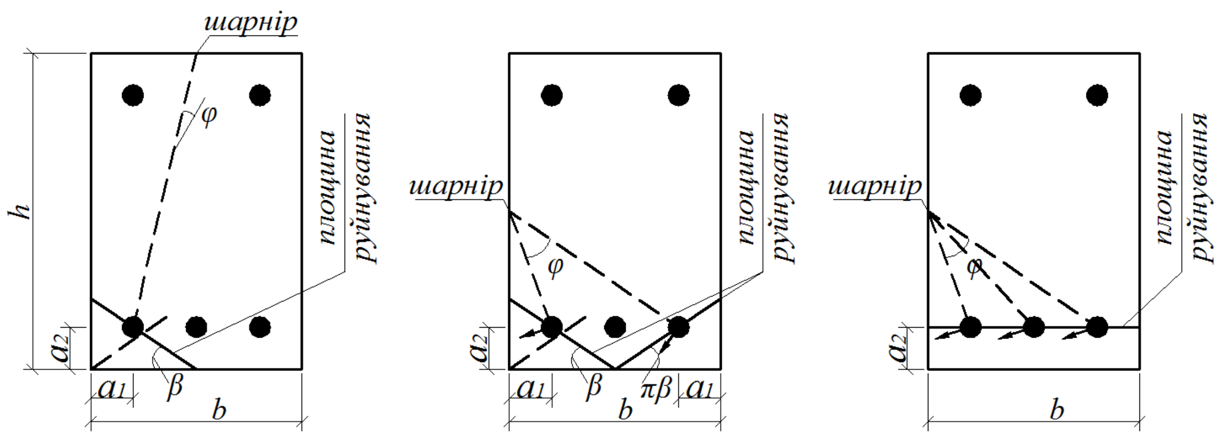


Рис. 1.11. Схеми руйнування за Г. Гезундом

Теоретичні результати Г. Гезунда, суттєво розходяться з експериментом. Це пояснюється тим, що в теорії Г. Гезунда враховується взаємодія зусиль лише в області малих значень відношення T/M. Схему руйнування Н.Н. Лессіг для елементів, що зазнають впливу згину з крученням, використовували також М. Коллінз [162, 163], К. Гуд та М. Хелмі [172], Р. Еванс та М. Каліл [168] та ін.

Дослідження М. Колінза мали на меті спрощення розрахункового апарату, запропонованого Н.Н. Лессіг, та отримання залежностей, більш зручних для практичного застосування. К. Гуд та М. Хелмі дослідили елементи порожнистого перерізу, Р. Еванс та М. Каліл – руйнування елементів до досягнення текучості поздовжньої та поперечної арматури.

Т. Хсу [175, 176, 177], на основі експериментальних досліджень чистого кручення балок прямокутного перерізу, запропонував емпіричні розрахункові залежності, що враховують марку бетону, кількість та співвідношення поздовжньої та поперечної арматури, співвідношення сторін поперечного перерізу.

Граничний крутний момент, що сприймається елементом, визначається як сума моментів від внутрішніх зусиль (рис. 1.12):

$$T = \frac{A_{sw}\sigma_{sw}b_w h_w}{2S} + \frac{P_c x_{ct}}{\sqrt{2}} + \frac{\nu A_{s,tot}\sigma_s x_{ct}}{2} + Q_{sx}h_s + Q_{sy}b_s. \tag{1.53}$$

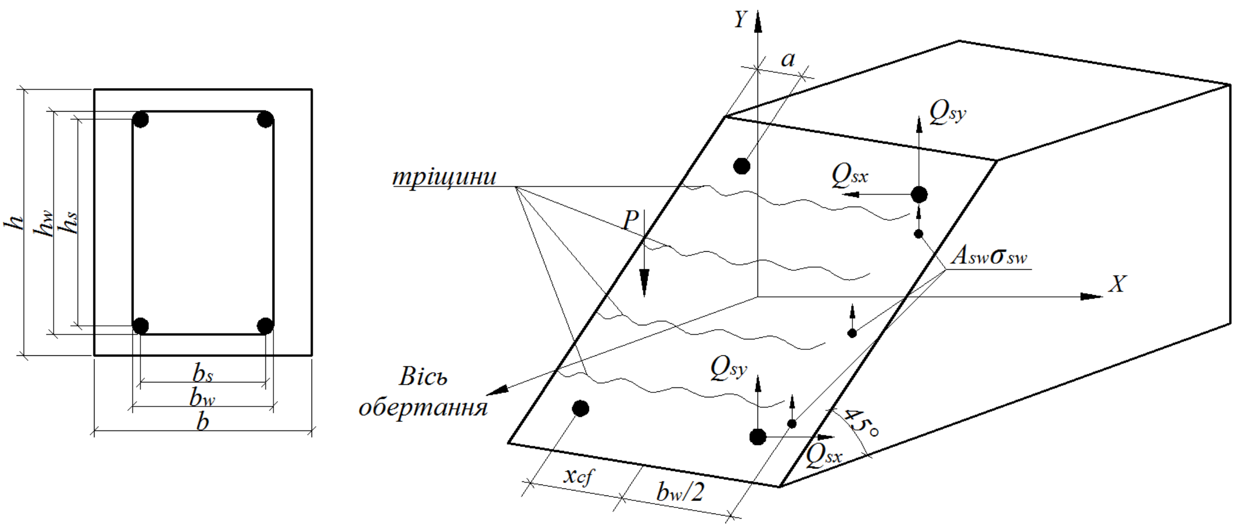


Рис. 1.12. Розрахункова схема Т. Хсу

Емпіричний метод виведення розрахункових залежностей Т. Хсу не дозволяє повною мірою виявити фізичне сторону розглянутого явища, чим і пояснюється значне (до 40 %) розходження результатів розрахунку з експериментом.

В [8] показано, що в перехресно-балкових системах при дії згину з крученням в балках можуть утворюватися лише нормальні і похилі тріщини, але і такі тріщини впливають не лише на згинальні, але і на крутильні жорсткості ребер, що підтверджується експериментальними дослідженнями. Встановлено також, що перерозподіл локального навантаження практично однаково залежить як від згинальної, так і від крутильної жорсткості окремих балок.

В роботах [1, 7, 9, 14, 15, 148, 150, 151, 153, 155] пропонується методика врахування кручення при розрахунку стержневих залізобетонних елементів. Зокрема, пропонується методика отримання діаграми «крутний момент – кут закручування» для стержневих залізобетонних елементів довільного поперечного перерізу. Методика розрахунку заснована на покроковому збільшенні відносного кута закручування. Дотичні напруження на кожному кроці визначаються безпосередньо з діаграми зсуву бетону. Потім визначають момент, створений цими напруженнями. Таким чином отримують точку діаграми. Розрахунок за таким методом пропонують вести до тих пір, поки крутний момент не почне зменшуватись, що свідчить про вичерпання несучої здатності елемента. Перевагою методу є те, що дотичні напруження визначаються безпосередньо з діаграми зсуву бетону. Також методика не передбачає ітеративності процесу, що суттєво спрощує розрахунки.

Тріщини в згинальних елементах виникають при виконанні умови

$$M > M_{crc}, \tag{1.54}$$

де $M_{crc} = W_{pl} R_{bt}$ – момент тріщиноутворення; M – діючий згинальний момент.

Жорсткість поперечного перерізу з врахуванням тріщиноутворення визначається за формулою [121]

$$B_g = E_b A_b h_0^2 \sqrt{\mu n_1} \frac{b_1}{1 + \beta_1 \varphi_{ti}},$$

де E_b – модуль пружності бетону; A_b – площа поперечного перерізу бетону; h_0 – розрахункова висота перерізу; $\mu = A_s/A_b$ – коефіцієнт армування перерізу; A_s – площа поперечного перерізу арматури; n_1 – відношення модулів пружності арматури та бетону; $b_1 = \beta_1 = 0{,}225$ – коефіцієнт; φ_{ti} – характеристика лінійної повзучості бетону.

Методика визначення згинальної жорсткості для балок з тріщинами добре відома. В її основі лежить визначення відносної висоти стиснутої зони перерізу $\xi = x/h_0$ ($h_0 = h - a$ – робоча висота перерізу, a – відстань від найбільш розтягнутого краю перерізу до рівнодіючої зусиль в арматурі).

В.І. Мурашев пропонує наступну формулу для визначення цієї величини [91]:

$$\xi = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha\varphi}, \tag{1.55}$$

де при короткочасній дії навантаження $\alpha = 2\mu\alpha_E$, при тривалій дії навантаження $\alpha = 7\mu\alpha_E$; $\mu = \frac{A_s}{bh_0}$ – коефіцієнт армування, $\alpha_E = \frac{E_s}{E_b}$ – відношення модулів пружності арматури і бетону. Коефіцієнт $\varphi = 1 - -\frac{0{,}7}{100\mu+1}$ виражає залежність між середньою висотою стиснутої зони x та висотою стиснутої зони в перерізі з тріщиною.

Інший варіант рекомендується Нормами [120]:

$$\xi = -\frac{1}{1{,}8 + \frac{1+5L}{10\mu\alpha_E}}; L = \frac{M}{bh_0^2 R_{bn}}, \tag{1.56}$$

де M – згинальний момент, b – ширина перерізу, R_{bn} – нормативний опір бетону для граничних станів другої групи.

Розглянемо методику визначення крутильної жорсткості, запропоновану О.Ф. Яременко та А.В. Ковровым [142, 143]. Нехай дотичні напруження та зусилля в перерізі з тріщиною розподілені так, як показано на рис. 1.13.

Дотичні напруження в арматурі та бетоні

$$\tau_s = \frac{M_{kp}}{A_s z_\tau}; \tau_b = \frac{M_{kp}}{A_b z_\tau}, \tag{1.57}$$

де z_τ – плече внутрішньої пари сил.

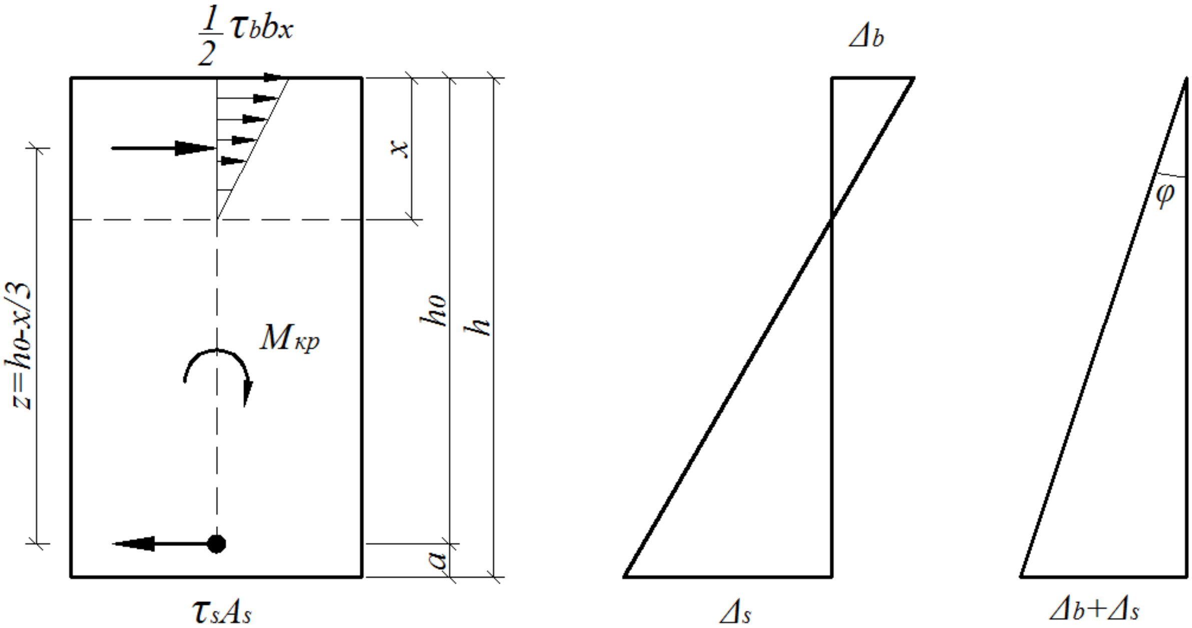


Рис. 1.13. Дотичні напруження та зусилля в перерізі з тріщиною

Відповідні лінійні переміщення

$$\Delta_s = \frac{\tau_s}{G_s \nu_{s\tau}}; \Delta_b = \frac{\tau_b}{G_b}, \tag{1.58}$$

де $\nu_{s\tau} = 8 + \frac{0{,}8}{4\mu+\xi}$ – коефіцієнт, що враховує нагельний ефект, тобто відпір бетону при роботі арматурних стержнів на зріз.

Крутильна жорсткість елементу з нормальними тріщинами

$$B_{kp} = G_s b h_0^3 \xi \left(1 - \frac{\xi}{3}\right) \frac{\mu \alpha_E \nu_{s\tau}}{1 + \mu \alpha_E \nu_{s\tau}}. \qquad (1.59)$$

Крутильна жорсткість елементу без тріщин

$$G_b I_T = G_b k_2 b^3 h_0. \qquad (1.60)$$

Тоді співвідношення жорсткостей

$$k_T = \frac{G_b I_T}{B_{kp}} = \frac{k_2 b^2 (1 + \mu \alpha_E \nu_{s\tau})}{h_0^2 \xi \left(1 - \frac{\xi}{3}\right) \mu \alpha_E \nu_{s\tau}} \leq 1. \qquad (1.61)$$

Експериментальні дослідження залізобетонних балок при чистому згині з крученням виконав Ю.В. Чиненков [134]. Балки мали переріз 20х30 см та довжину 3,5 м; відстань від грані балки до центрів ваги поздовжньої арматури – 3,5 см. Поздовжня арматура – 4ø20. Поперечна арматура: каркаси – 23 балки, замкнені хомути – 13 балок. Вивчався вплив співвідношення крутного та згинального моментів на міцність та деформативність балок. Кубикова міцність бетону варіювалась.

Співставлення розрахункових та експериментальних даних показано на рис. 1.14 (кути закручування балок другої серії; пунктиром показані розрахункові криві).

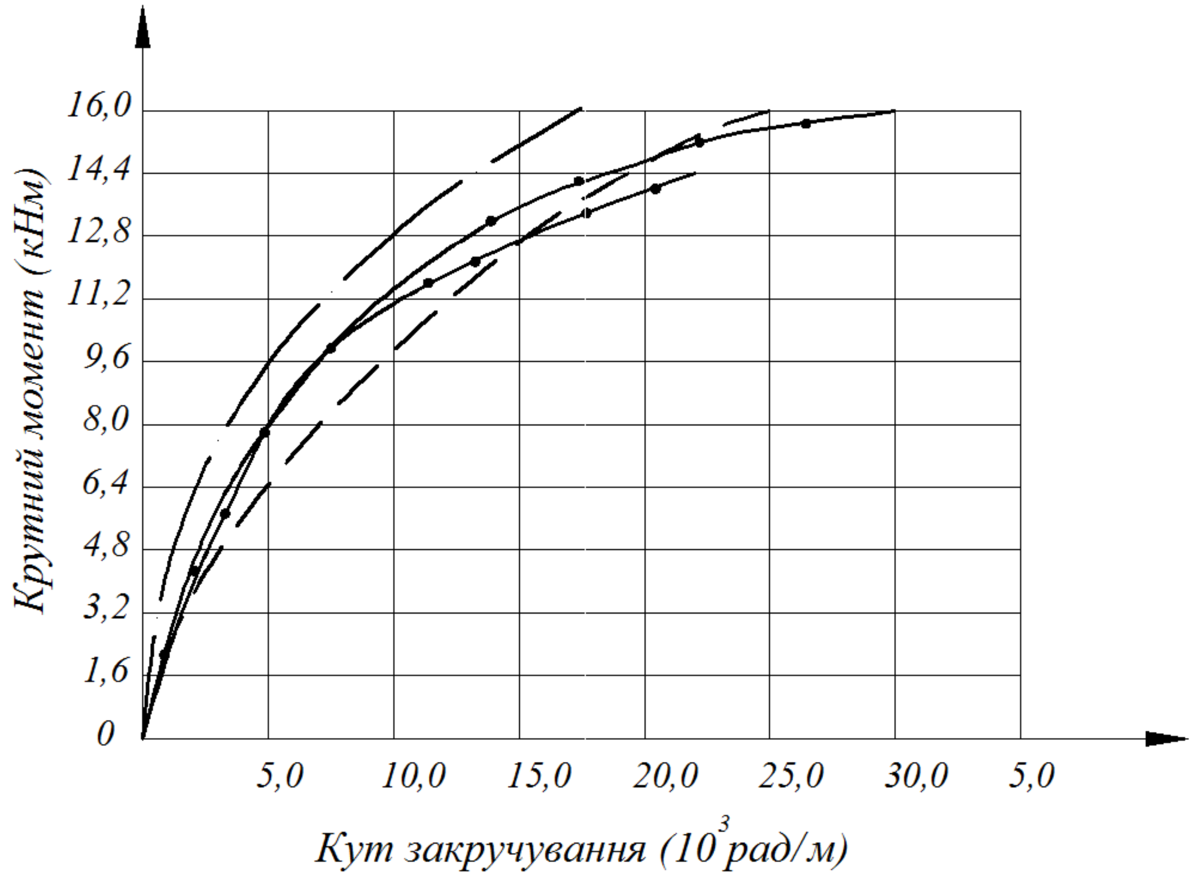


Рис. 1.14. Результати дослідів Ю.В. Чиненкова

1.6. Висновки за розділом

1. На основі виконаного огляду робіт за темою дисертації виявлено ряд методик розрахунку ортогональних перехресно-балкових систем. Методи, запропоновані С.В. Симеоновим, П.Ф. Папковичем та А.І. Сєгалєм, є громіздкими та незручними для практичного застосування. Чисельно-аналітичний метод стержневої апроксимації, запропонований Т.Н. Азізовим, дозволяє розраховувати перекриття та перехресно-балкові системи, однак в числі його недоліків слід відмітити складність виконання розрахунків за наявності отворів в конструкції, відмінності граничних умов спирання балок від прийнятих в його методиці.

2. В перехресно-балкових системах при дії згину з крученням в балках можуть утворюватись лише нормальні та похилі тріщини, але й такі тріщини впливають не лише на згинальні, але і на крутильні жорсткості ребер, що підтверджується експериментальними дослідженнями. Встановлено також, що

перерозподіл локального навантаження практично однаково залежить як від згинальної, так і від крутильної жорсткості окремих балок.

3. На основі проведеного аналізу джерел за темою дисертації виявлена необхідність проведення експериментальних досліджень конструкції залізобетонної перехресно-балкової системи.

4. У розглянутих джерелах відсутня методика застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів до розрахунку перехресно-балкових систем.

5. Пропозиції з врахування процесів тріщиноутворення під час розрахунку залізобетонних елементів, що зазнають згину з крученням потребують подальшого вдосконалення.

6. Для перевірки результатів дисертаційного дослідження необхідно розробити комп’ютерну програму, що реалізує запропоновану розрахункову модель деформування залізобетонних перехресно-балкових систем.

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХРЕСНО-БАЛКОВИХ СИСТЕМ

2.1. Порядок нумерації вузлів та елементів перехресно-балкових систем

Для визначення напружено-деформованого стану перехресно-балкових систем із застосуванням чисельно-аналітичного методу граничних елементів, пропонується прийняти глобальну лівогвинтову систему координат з початком в лівому ближньому вузлі конструкції.

Нумерацію вузлів перехресно-балкових систем приймаємо від початку глобальної системи координат, при цьому в першу чергу нумеруються вузли в напрямку осі $0Y$, потім в напрямку осі $0X$.

Нумерація елементів виконується в тому ж порядку. Спочатку від початку глобальної системи координат нумеруються стержні, паралельні осі $0Y$, потім – паралельні осі $0X$.

Порядок нумерації вузлів та елементів наведено на на рис. 2.1.

Кожному елементу назначається локальна лівогвинтова система координат з початком у вузлі з меншим порядковим номером, вісь $0X$ локальної системи координат елемента при цьому спрямована вздовж елементу.

Напрямки осей локальних систем координат елементів наведено на рис. 2.2.

2.2. Формування матриць, що входять в рівняння деформування

Для системи, що складається з ряду елементів, вектори граничних параметрів та зовнішнього навантаження, що входять в рівняння (1.22), мають наступний вигляд:

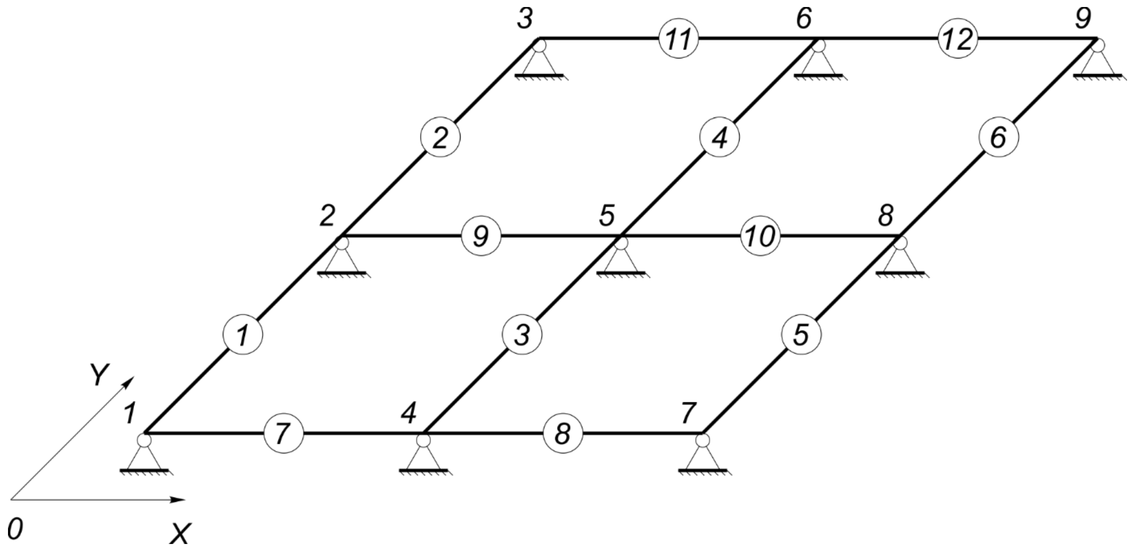


Рис. 2.1. Порядок нумерації вузлів та елементів

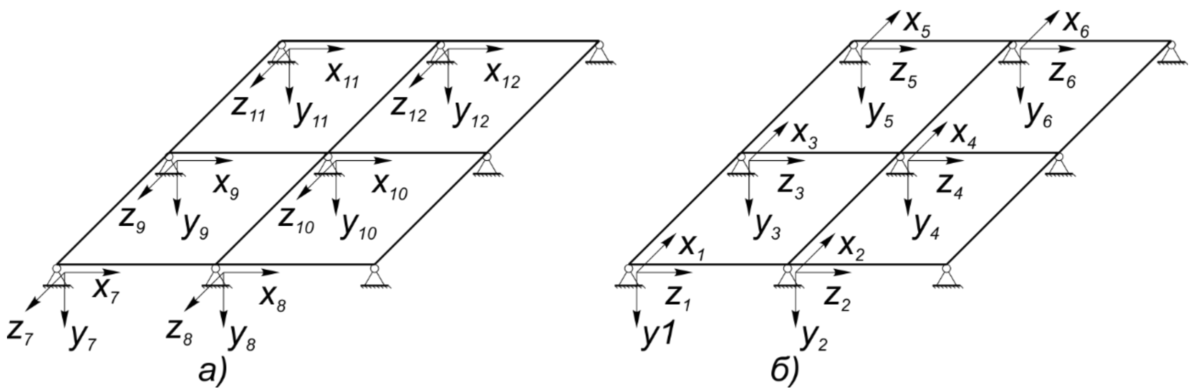


Рис. 2.2. Напрямки осей локальних систем координат для елементів в напрямку $0X$ (а); елементів в напрямку $0Y$ (б)

$$Y(l_i)=\begin{vmatrix} EI\nu(l_i)\\ EI\varphi(l_i)\\ M(l_i)\\ Q(l_i)\\ GI_{kp}\theta(l_i)\\ M_x(l_i)\end{vmatrix};X(0)=\begin{vmatrix} EI\nu(0)\\ EI\varphi(0)\\ M(0)\\ Q(0)\\ GI_{kp}\theta(0)\\ M_x(0)\end{vmatrix};B(l_i)=\begin{vmatrix} B_1(l_i)\\ B_2(l_i)\\ B_3(l_i)\\ B_4(l_i)\\ B_5(l_i)\\ B_6(l_i)\end{vmatrix}. \qquad (2.1)$$

Елементи вектору зовнішнього навантаження формуються за допомогою методу початкових параметрів відповідно до рівнянь (1.24), (1.25).

Матриця коефіцієнтів для кожного окремого елементу системи перехресних балок $\bar{A}^*$ має наступний вигляд:

$$\bar{A}^{*}=\begin{vmatrix}1 & l_i & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

Для перехресно-балкових систем, що складаються із m елементів, формується система, що складається із $6m$ рівнянь. При цьому вектори граничних параметрів та зовнішнього навантаження складаються із m послідовно записаних відповідних векторів (2.1), а в загальну матрицю коефіцієнтів $\bar{A}(l_i)$ записуються послідовно по головній діагоналі матриці (2.2), інші комірки заповнюються нульовими значеннями.

2.3. Граничні умови, рівняння рівноваги та сумісності переміщень

Для виконання перетворень за (1.23), необхідно розглянути граничні умови, що визначаються з умов закріплення, рівняння рівноваги та сумісності переміщень в перерізах, що примикають до вузлів.

В першу чергу розглядаються умови закріплення та відповідні їм граничні умови. При шарнірному закріпленні перехресно-балкових систем в перерізах елементів, що примикають до вузлів, виникають згинальні та крутні моменти, поперечні сили, кутові переміщення. Вертикальні лінійні переміщення відсутні (рис. 2.3).

Вертикальна опорна реакція, що виникає в опорі, визначається різницею поперечних сил, що виникають в перерізах елементів, що примикають до даного вузла:

$$R_i = Q_{ya} + Q_{yd} - Q_{yc} - Q_{yb}. \tag{2.3}$$

Відповідно до граничних умов, за наявності опори у вузлі, в векторі початкових параметрів $\vec{X}(0)$ і векторі кінцевих параметрів $\vec{Y}(l_i)$ обнуляються граничні параметри вертикальних переміщень, а в матриці коефіцієнтів обнуляються стовпчики, номери яких відповідають номерам параметрів, що обнуляються:

$$\vec{Y}(l_i) = \begin{vmatrix} EI\nu(l_i) = 0 \\ EI\varphi(l_i) \\ M(l_i) \\ Q(l_i) \\ GI_{kp}\theta(l_i) \\ M_x(l_i) \end{vmatrix}; \vec{X}(0) = \begin{vmatrix} EI\nu(0) = 0 \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \\ GI_{kp}\theta(0) \\ M_x(0) \end{vmatrix}; \tag{2.4}$$

$$\bar{A}^* = \begin{vmatrix} 0 & l_i & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{2.5}$$

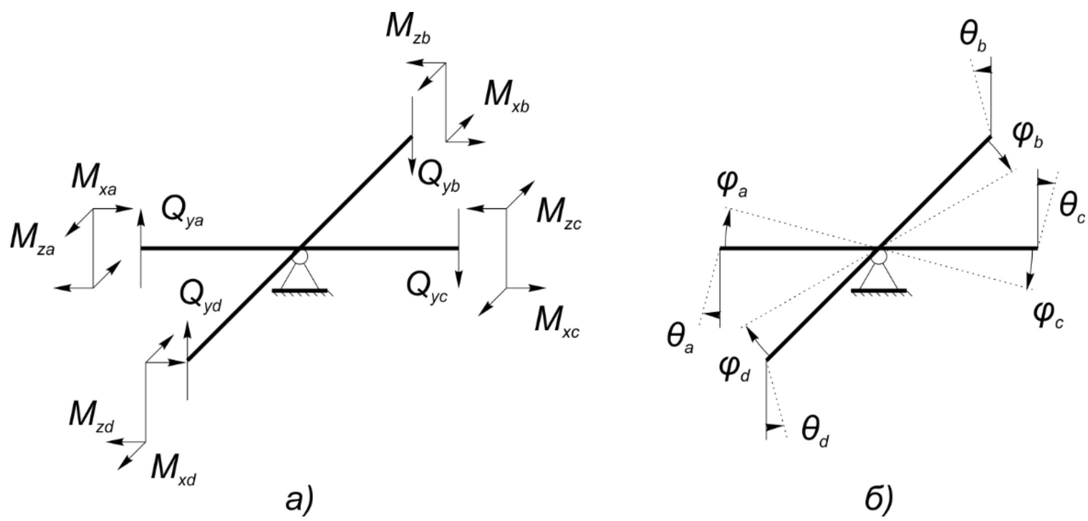


Рис. 2.3. Зусилля (а) та переміщення (б), що виникають в перерізах елементів, що примикають до опорного вузла

Оскільки система елементів, об’єднаних в перехресно-балкову систему, повинна знаходитись в рівновазі, то й окремі вузли будуть знаходитись в рівновазі. При цьому статичні граничні параметри будуть задовольняти рівнянням рівноваги вузлів.

Поперечні сили, що виникають в перерізах, що примикають до вузла, в якому з’єднуються чотири елементи, наведені на рис. 2.4.

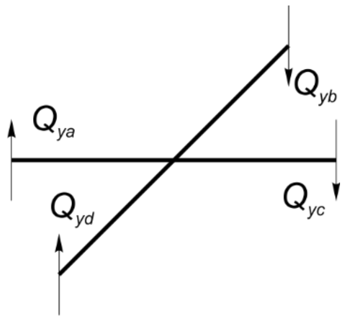


Рис. 2.4. Поперечні сили, що виникають в перерізах, що примикають до вузла

Складаючи рівняння рівноваги в глобальній системі координат, для даного випадку отримаємо:

$$\sum Y = 0: Q_{ya} - Q_{yb} - Q_{yc} + Q_{yd} = 0. \quad (2.6)$$

Згинальні та крутні моменти, що виникають в перерізах, що примикають до вузла, наведені на рис. 2.5.

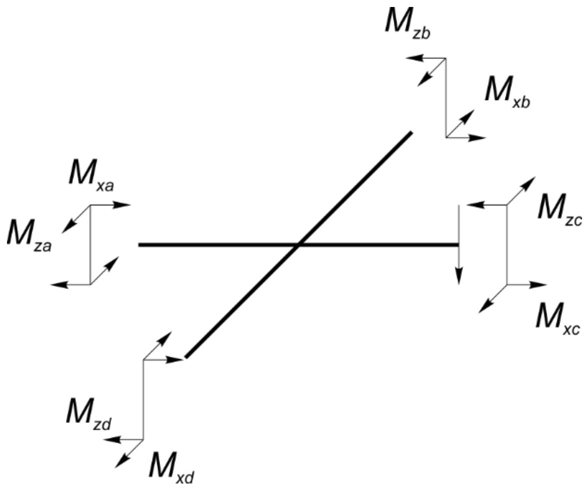


Рис. 2.5. Моменти, що виникають в перерізах, що примикають до вузла

Співвідношення між моментами, що виникають в перерізах, що примикають до вузла, отримаємо з рівняння рівноваги вузла відносно осей глобальної системи координат:

$$\sum m_x = 0: \; -M_{xa} - M_{zb} + M_{xc} + M_{zd} = 0;$$
$$\sum m_z = 0: M_{za} - M_{xb} - M_{zc} + M_{xd} = 0; \tag{2.7}$$

Для встановлення сумісності переміщень, розглянемо картину деформованого стану стержнів, що примикають до вузла.

Для жорсткого вузла, в якому з'єднані чотири елементи, картина деформування представлена на рис. 2.6.

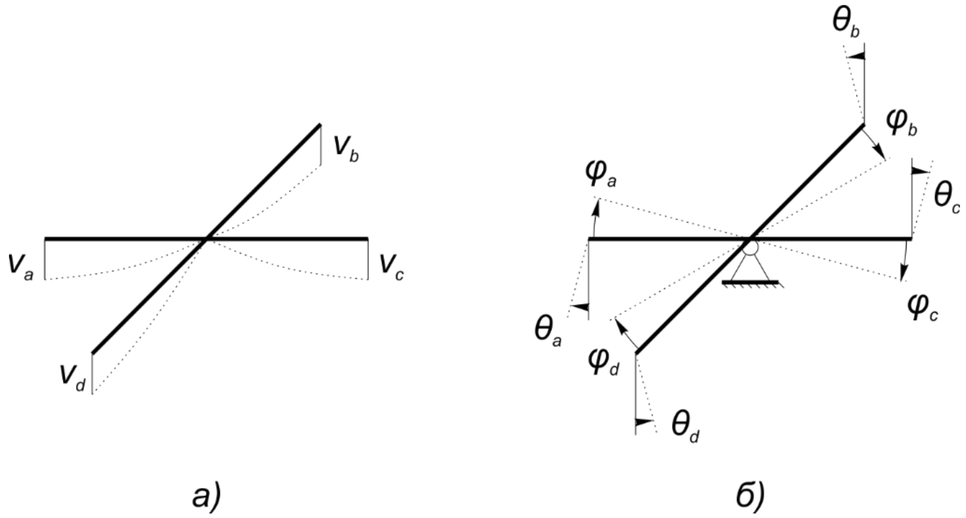


Рис. 2.6. Лінійні (а) та кутові (б) переміщення перерізів, що примикають до вузла

Відповідно до рис. 2.6, а, зв'язок між лінійними переміщеннями перерізів, що примикають до вузла, встановлюються залежністю:

$$\nu_a = \nu_b = \nu_c = \nu_d. \tag{2.8}$$

Виходячи з рис. 2.6, б, зв'язок між кутами повороту та кутами закручування перерізів, що примикають до вузла, встановлюються залежностями:

$$\begin{gathered}\varphi_a = \varphi_c = -\theta_b = -\theta_d;\\ \theta_a = \theta_c = \varphi_b = \varphi_d.\end{gathered} \tag{2.9}$$

2.4. Формування розв'язуючого рівняння чисельно-аналітичного методу граничних елементів

Для розрахунку перехресно-балкової системи з використанням чисельно-аналітичного методу граничних елементів, необхідно сформувати та розв'язати розв'язуюче рівняння (1.23).

Розв'язуюче рівняння (1.23) формується в наступному порядку [44]:

- записується матриця $\bar{A}(l_i)$, вектори $\vec{X}(0)$, $\overrightarrow{Y}(l_i)$ та $\vec{B}(l_i)$;
- розглядаються граничні елементи вектору початкових параметрів $\vec{X}(0)$, беручи до уваги умови закріплення, сумісність деформацій та переміщень, а також рівняння рівноваги. Якщо елемент вектору переміщень дорівнює нулю, обнуляємо стовпчик матриці $\bar{A}(l_i)$, номер якого дорівнює порядковому номеру елементу в векторі початкових параметрів. Якщо деякий елемент дорівнює іншому елементу вектору початкових параметрів, прирівнюємо елемент з більшим номером до нуля та обнуляємо стовпчик матриці $\bar{A}(l_i)$, номер якого дорівнює порядковому номеру обнуленого елементу в векторі початкових параметрів. Таким чином, зменшується кількість невідомих параметрів у векторі початкових параметрів.
- розглядаються граничні елементи у векторі кінцевих параметрів $\vec{Y}(l_i)$. Записуємо рівняння рівноваги, сумісності переміщень, а також умови закріплення. При розгляді елементів в порядку зростання порядкового номеру, якщо елемент з меншим номером дорівнює елементу з більшим номером, то елемент з більшим номером вважається невідомим.

- переносяться невідомі вектору кінцевих параметрів $\vec{Y}(l_i)$ на нульові місця вектору початкових параметрів $\vec{X}(0)$. При цьому в матрицю коефіцієнтів $\bar{A}(l_i)$ вносяться компенсуючі елементи, що дорівнюють «-1» в комірку, яка знаходиться на перетині рядка з номером невідомого у векторі кінцевих параметрів $\vec{Y}(l_i)$ та стовпчика х номером того ж невідомого вже у векторі початкових параметрів $\vec{X}(0)$. Після такого переносу вектор початкових параметрів $\vec{X}(0)$ перетворюється на вектор невідомих $\vec{X}^*$.
- виходячи із записаних раніше рівнянь рівноваги, вносимо в матрицю коефіцієнтів $\bar{A}(l_i)$ компенсуючі елементи, що дорівнюють коефіцієнтам при доданках в рівнянні, взятих з протилежним знаком намісце перетину рядка з номером елемента в векторі кінцевих параметрів $\vec{Y}(l_i)$ та стовпчиків, що відповідають номерам доданків у векторі невідомих $\vec{X}^*$.
- виходячи із записаних раніше рівнянь сумісності деформацій, вносимо до матриці коефіцієнтів $\bar{A}(l_i)$ компенсуючі елементи, що дорівнюють коефіцієнтам при доданках у рівнянні, взятим з протилежним знаком, на місце перетину рядка з номером елементу у векторі кінцевих параметрів $\vec{Y}(l_i)$ та стовпчиків, що відповідають номерам доданків у векторі невідомих $\vec{X}^*$. Слід зазначити, що при рівності кутів повороту та закручування, а також лінійних переміщень, в рівняння (2.4) відповідні параметри входять з жорсткостями. Тому компенсуючі елементи для таких параметрів слід домножувати на співвідношення [70]:

$$N_{ij} = \frac{E_i I_i}{E_j I_j};\ R_{ij} = \frac{G_i I_{kpi}}{G_j I_{kpj}};\ S_{ij} = \frac{G_i I_{kpi}}{E_j I_j};\ T_{ij} = \frac{E_i I_i}{G_j I_{kpj}}, \tag{2.10}$$

де ii – номер граничного елементу, для граничних параметрів якого складаються рівняння сумісності переміщень; j – номер елементу, з граничними параметрами якого зв’язуються граничні параметри поточного елементу.

Таким чином, на відміну від прийнятих раніше способів формування компонентів розв’язуючого рівняння чисельно-аналітичного методу граничних елементів, що полягають у побудові аналітичних функцій при формуванні загальних матриць коефіцієнтів та векторів з частинних матриць та векторів, запропоновано універсальний алгоритм прямого формування вказаних компонентів для плоских ортогональних стержневих систем. Перевагами методу є простота його алгоритмізації при програмуванні, легкість його розвитку для просторових та/або неортогональних систем, універсальність, можливість врахування зміни жорсткості та утворення тріщин.

Серед недоліків способу слід відмітити наявність вимог з нумерації вузлів та елементів, що входять до складу розрахункової схеми та неможливість розширення способу для розрахунку пластин та об’ємних тіл.

2.5. Приклад розрахунку перехресно-балкової системи

Розглянемо розрахунок перехресно-балкової системи, що має по два прогони в поздовжньому та поперечному напрямках, за допомогою чисельно-аналітичного методу граничних елементів. Розрахункова схема з прикладеними навантаженнями показана на рис. 2.7.

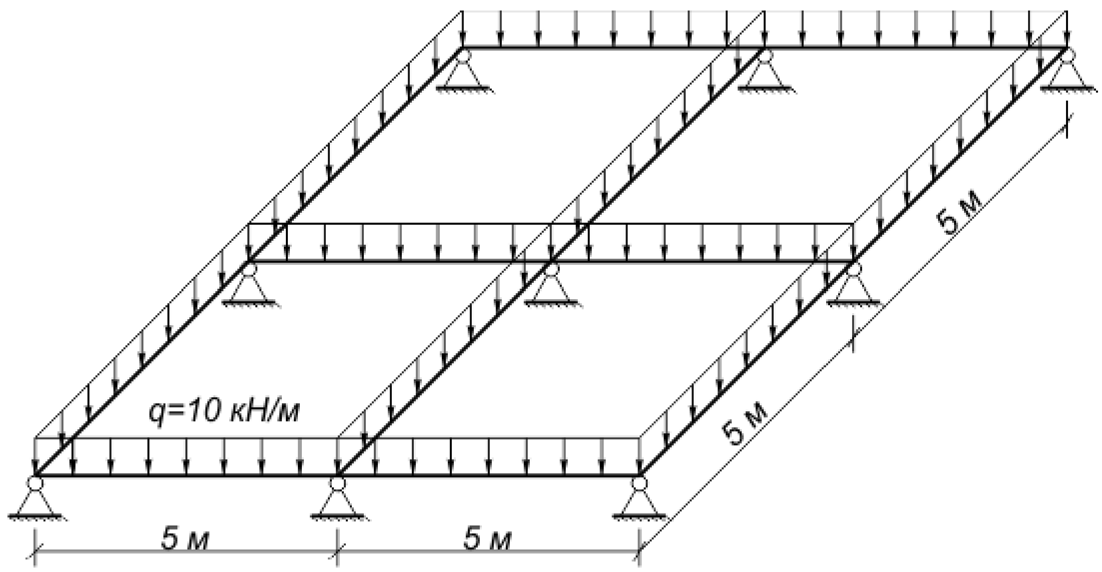


Рис. 2.7. Розрахункова схема перехресно-балкової системи

Першою чергою виконується нумерація вузлів та елементів. Схема з пронумерованими вузлами та елементами наведена на рис. 2.1.

Система рівнянь деформування чисельно-аналітичного методу граничних елементів має вид

$$\vec{Y}(l_i) = \bar{A}(l_i)\vec{X}(0) + \vec{B}(l_i).$$

Оскільки система складається із 12 стержнів, то кількість рівнянь деформування чисельно-аналітичного методу граничних елементів складає 12×6 = 72. Вектори $\vec{Y}(l_i)$, $\vec{X}(0)$ та $\vec{B}(l_i)$ до виконання перетворень, складатимуться з 72 рядків кожен, при цьому в них будуть повторюватись наступні шість елементів для кожного відповідного стержня системи:

$$\vec{Y}(l) = \begin{vmatrix} EI\nu_i(l_i) \\ EI\varphi_i(l_i) \\ M_i(l_i) \\ Q_i(l_i) \\ GI_{kp}\theta_i(l_i) \\ M_{xi}(l_i) \end{vmatrix}; \vec{X}(0) = \begin{vmatrix} EI\nu_i(0) \\ EI\varphi_i(0) \\ M_i(0) \\ Q_i(0) \\ GI_{kp}\theta_i(0) \\ M_{xi}(0) \end{vmatrix}; \ \vec{B}(l) = \begin{vmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ B_{i3} \\ B_{i4} \\ B_{i5} \\ B_{i6} \end{vmatrix}. \qquad (2.11)$$

Матриця коефіцієнтів $\bar{A}(l_i)$ до перетворень матиме на своїй головній діагоналі шість елементів

$$\bar{A}(l_i) = \begin{vmatrix} 1 & l_i & -l_i^2/2 & -l_i^3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_i & -l_i^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (2.12)$$

при цьому решта елементів матриці дорівнюватимуть нулю.

Розглянемо почергово всі вузли та стержні, що з’єднуються в них, записуючи при цьому рівняння рівноваги та сумісності деформацій.

У вузлі 1 сходяться стержні 1 та 7. Також в цьому вузлі знаходиться опора. Рівняння рівноваги та сумісності деформацій для стержнів, що сходяться у вузлі, матимуть вид

$$\begin{gathered} \nu_1(0) = \nu_7(0) = 0; \\ \varphi_1(0) = \theta_7(0); \\ M_1(0) = M_{x7}(0); \\ Q_1(0), Q_7(0) - \text{невідомі}; \\ \theta_1(0) = -\varphi_7(0); \\ M_{x1}(0) = -M_7(0). \end{gathered} \tag{2.13}$$

У вузлі 2 сходяться стержні 1, 2 та 9. Також у цьому вузлі знаходиться опора. Рівняння рівноваги та сумісності деформацій для стержнів, що сходяться у вузлі, матимуть вигляд

$$\begin{gathered} \nu_1(l) = \nu_2(0) = \nu_9(0) = 0; \\ \varphi_1(l) = \varphi_2(0) = \theta_9(0); \\ M_1(l) = M_2(0) - M_{x9}(0); \\ Q_1(l), Q_2(0), Q_9(0) - \text{невідомі}; \\ \theta_1(l) = \theta_2(0) = -\varphi_9(0); \\ M_{x1}(l) = M_{x2}(0) + M_9(0). \end{gathered} \tag{2.14}$$

У вузлі 3 сходяться стержні 2 та 11. Також в цьому вузлі знаходиться опора. Рівняння рівноваги та сумісності деформацій для стержнів, що сходяться у вузлі, матимуть вид

$$\begin{gathered} \nu_2(l) = \nu_{11}(0) = 0; \\ \varphi_2(l) = \theta_{11}(0); \\ M_2(l) = -M_{x11}(0); \\ Q_2(l), Q_{11}(0) - \text{невідомі}; \\ \theta_2(l) = -\varphi_{11}(0); \\ M_{x2}(l) = M_{11}(0). \end{gathered} \tag{2.15}$$

У вузлі 4 сходяться стержні 3, 7, та 8. Також в цьому вузлі знаходиться опора. Рівняння рівноваги та сумісності деформацій для стержнів, що сходяться у вузлі, матимуть вид

$$\begin{gathered} \nu_3(0) = \nu_7(l) = \nu_8(0) = 0; \\ \varphi_3(0) = \theta_7(l) = \theta_8(0); \\ M_3(0) = -M_{x7}(l) + M_{x8}(0); \\ Q_3(0), Q_7(l), Q_8(0) - \text{невідомі}; \\ \theta_3(0) = -\varphi_7(l) = -\varphi_8(0); \\ M_{x3}(0) = M_7(l) - M_8(0). \end{gathered} \tag{2.16}$$

У вузлі 5 сходяться стердні 3, 4, 9 та 10. Також в цьому вузлі знаходиться опора. Рівняння рівноваги та сумісності деформацій для стержнів, що сходяться у вузлі, матимуть вид

$$\begin{gathered} \nu_3(l) = \nu_4(0) = \nu_9(l) = \nu_{10}(0) = 0; \\ \varphi_3(l) = \varphi_4(0) = \theta_9(l) = \theta_{10}(0); \\ M_3(l) = M_4(0) + M_{x9}(l) - M_{x10}(0); \\ Q_3(l), Q_4(0), Q_9(l), Q_{10}(0) - \text{невідомі}; \\ \theta_3(l) = \theta_4(0) = -\varphi_9(l) = -\varphi_{10}(0); \\ M_{x3}(l) = M_{x4}(l) - M_9(l) + M_{10}(0). \end{gathered} \tag{2.17}$$

У вузлі 6 сходяться стержні 4, 11 та 12. Також в цьому вузлі знаходиться опора. Рівняння рівноваги та сумісності деформацій для стержнів, що сходяться у вузлі, матимуть вид

$$\begin{gathered} \nu_4(l) = \nu_{11}(l) = \nu_{12}(0) = 0; \\ \varphi_4(l) = \theta_{11}(l) = \theta_{12}(0); \\ M_4(l) = M_{x11}(l) - M_{x12}(0); \\ Q_4(l), Q_{11}(l), Q_{12}(0) - \text{невідомі}; \\ \theta_4(l) = -\varphi_{11}(l) = -\varphi_{12}(0); \\ M_{x4}(l) = -M_{11}(l) + M_{12}(0). \end{gathered} \tag{2.18}$$

У вузлі 7 сходяться стержні 5 та 84. Також в цьому вузлі знаходиться опора. Рівняння рівноваги та сумісності деформацій для стержнів, що сходяться у вузлі, матимуть вид

$$\begin{gathered} \nu_5(l) = \nu_8(0) = 0; \\ \varphi_5(l) = -\theta_8(0); \\ M_5(l) = M_{x8}(0); \\ Q_5(l), Q_8(0) - \text{невідомі}; \\ \theta_5(l) = \varphi_8(0); \\ M_{x5}(l) = -M_8(0). \end{gathered} \tag{2.19}$$

У вузлі 8 сходяться стержні 5, 6 та 10. Також в цьому вузлі знаходиться опора. Рівняння рівноваги та сумісності деформацій для стержнів, що сходяться у вузлі, матимуть вид

$$\begin{gathered} \nu_5(l) = \nu_6(0) = \nu_{10}(l) = 0; \\ \varphi_5(l) = \varphi_6(0) = \theta_{10}(l); \\ M_5(l) = M_6(0) + M_{x10}(l); \\ Q_5(l), Q_6(0), Q_{10}(l) - \text{невідомі}; \\ \theta_5(l) = \theta_6(0) = -\varphi_{10}(l); \\ M_{x5}(l) = M_{x6}(0) - M_{10}(l). \end{gathered} \tag{2.20}$$

У вузлі 9 сходяться стержні 6 та 12. Також в цьому вузлі знаходиться опора. Рівняння рівноваги та сумісності деформацій для стержнів, що сходяться у вузлі, матимуть вид:

$$\begin{gathered} \nu_6(l) = \nu_{12}(l) = 0; \\ \varphi_6(l) = \theta_{12}(l); \\ M_6(l) = M_{x12}(l); \\ Q_6(l), Q_{12}(l) - \text{невідомі}; \\ \theta_6(l) = -\varphi_{12}(l); \\ M_{x6}(l) - M_{12}(l). \end{gathered} \tag{2.21}$$

Визначаємо кількість параметрів матриці $\vec{X}(0)$, що дорівнюють нулю. Розглядаємо (2.13…2.21). Всі вертикальні переміщення вузлів v_i дорівнюють нулю, відповідно, 12 елементів матриці $\vec{X}(0)$ дорівнюють нулю. В (2.13) згинальний та крутний моменти для початку стержня 7 можуть бути визначені через, відповідно, крутний та згинальний моменти початку стержня 1 та, відповідно, можуть бути прирівняні до нуля. Таким чином, ще два елементи дорівнюють нулю. В рівняннях (2.13), (2.14), (2.17), що розглядають сумісність переміщень, значення кутів повороту та закручування для стержнів з великим порядковим номером можуть бути виражені через кути повороту та кути закручування стержнів з меншим порядковим номером. Прирівнюючи їх до нуля, визначаємо іще 6 елементів, що дорівнюють нулю. Таким чином, 20 елементів в матриці $\vec{X}(0)$ дорівнюють нулю. Це елементи з порядковими номерами 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 47, 49, 50, 53, 55, 56, 59, 61 та 67.

Визначаємо невідомі граничні параметри матриці $\vec{Y}(l)$. В першу чергу – це 12 невідомих поперечних сил в кінці елементів.

Розглядаючи рівняння (2.13…2.21), визначаємо граничні параметри на кінцях стержнів, які не можуть бути виражені лише за допомогою граничних параметрів на початках стержнів. Такими параметрами в рівнянні (2.17) є залежні один від одного $M_3(l)$ та $M_{x9}(l)$, а також $M_9(l)$ та $M_{x3}(l)$. Виражаючи елементи з більшим порядковим номером через елементи з меншим порядковим номером, отримуємо 6 додаткових невідомих вектору кінцевих параметрів $\vec{Y}(l)$:

$$M_3(l), M_{x3}(l), M_4(l), M_{x4}(l), M_5(l), M_{x5}(l), M_6(l), M_{x6}(l), \varphi_6(l), \theta_6(l).$$

Таким чином, 20 невідомих вектору кінцевих параметрів $\vec{Y}(l)$, які послідовно переносяться на позиції елементів, які дорівнюють нулю, вектору початкових параметрів $\vec{X}(0)$.

Після виконання перетворень, вектор $\vec{X}^*$ набуває виду, наведеного у таблиці 2.1 (показані номери рядків вектору та їх вміст):

Вектор навантаження $\vec{B}(l)$ формується відповідно до рівнянь (1.24), (1.25).

Одночасно із виконанням викладених вище дій, виконуються перетворення матриці коефіцієнтів $\bar{A}(l_i)$. Першою чергою в матриці коефіцієнтів обнуляються стовпчики, номери яких співпадають з номерами елементів матриці початкових параметрів $\vec{X}(0)$, що дорівнюють нулю. Так, прирівнюються нулю стовпчики 1, 7, 13 і т.д.

Таблиця 2.1

Вектор $\vec{X}^*$

1	$Q_1(l)$	13	$M_3(l)$	25	$M_{x3}(l)$	37	$Q_4(l)$	49	$GI_k\theta_6(l)$	61	$Q_{11}(l)$
2	$EI\varphi_1(0)$	14	$EI\varphi_3(0)$	26	$EI\varphi_5(0)$	38	$M_{x4}(l)$	50	$M_{x6}(l)$	62	$EI\varphi_{11}(0)$
3	$M_1(0)$	15	$M_3(0)$	27	$M_5(0)$	39	$M_5(l)$	51	$M_9(0)$	63	$M_{11}(0)$
4	$Q_1(0)$	16	$Q_3(0)$	28	$Q_5(0)$	40	$Q_7(0)$	52	$Q_9(0)$	64	$Q_{11}(0)$
5	$GI_k\theta_1(0)$	17	$GI_k\theta_3(0)$	29	$GI_k\theta_5(0)$	41	$Q_5(l)$	53	$Q_7(l)$	65	$GI_k\theta_{11}(0)$
6	$M_{x1}(0)$	18	$M_{x3}(0)$	30	$M_{x5}(0)$	42	$M_{x5}(l)$	54	$M_{x9}(0)$	66	$M_{x11}(0)$
7	$Q_2(l)$	19	$Q_3(l)$	31	$M_4(l)$	43	$EI\varphi_6(l)$	55	$Q_8(l)$	67	$Q_{12}(l)$
8	$EI\varphi_2(0)$	20	$EI\varphi_4(0)$	32	$EI\varphi_6(0)$	44	$M_6(l)$	56	$Q_9(l)$	68	$EI\varphi_{12}(0)$
9	$M_2(0)$	21	$M_4(0)$	33	$M_6(0)$	45	$M_8(0)$	57	$M_{10}(0)$	69	$M_{12}(0)$
10	$Q_2(0)$	22	$Q_4(0)$	34	$Q_6(0)$	46	$Q_8(0)$	58	$Q_{10}(0)$	70	$Q_{12}(0)$
11	$GI_k\theta_2(0)$	23	$GI_k\theta_4(0)$	35	$GI_k\theta_6(0)$	47	$Q_6(l)$	59	$Q_{10}(l)$	71	$GI_k\theta_{12}(0)$
12	$M_{x2}(0)$	24	$M_{x4}(0)$	36	$M_{x6}(0)$	48	$M_{x8}(0)$	60	$M_{x10}(0)$	72	$M_{x12}(0)$

Далі, використовуючи рівняння (2.13…2.21), в яких розглядається рівновага, за умови, що у вузлі сходяться два стержні, при цьому сходяться початками, і, виражаючи елемент з більшим порядковим номером через елемент з меншим порядковим номером, вносимо компенсуючі елементи в усі рівняння, і відповідно, до матриці коефіцієнтів, де зустрічаються елементи з більшим порядковим номером. Наприклад в рівнянні (2.13):

$$M_1(0) = M_{x7}(0);$$
$$M_{x1}(0) = -M_7(0).$$

Отже, необхідно замінити всі входження невідомого $M_{x7}(0)$ на $M_1(0)$, та $M_7(0)$ на $-M_{x1}(0)$. Оскільки елементи $M_{x1}(0)$ та $M_1(0)$ знаходяться у векторі початкових параметрів $\vec{X}(0)$ на 6 та 3 місцях відповідно (3.31), а елементи $M_{x7}(0)$ та $M_7(0)$ на 42 та 39 місцях, то переносимо вміст стовпчика 42 в стовпчик 3 з тими ж знаками, що й стовпчика 39 в стовпчик 6, домноживши кожен елемент на -1:

№ стовпчика / № рядка	3	№ стовпчика / № рядка	6
41	l_7	37	$l^2/2$
42	1	38	l_7
		39	-1

(2.22)

У випадку розгляду сумісності деформацій, враховуємо жорсткості стержнів, що сходяться у вузлі відповідно до (2.10).

При виконанні переносу невідомих граничних параметрів із вектору кінцевих параметрів $\vec{Y}(l)$ в вектор початкових параметрів $\vec{X}(0)$, вводимо компенсуючий елемент -1 в матрицю коефіцієнтів $\bar{A}(l_i)$ на перетині рядка з номером позиції елементу, що переноситься, в матриці кінцевих параметрів та стовпчика з номером позиції елементу, що дорівнює нулю, в матриці початкових параметрів. Наприклад, при переносі першого невідомого $Q_1(l)$ на місце першого елементу, що дорівнює нулю, $EI\nu_1(0)$, вводимо компенсуючий елемент -1 до матриці коефіцієнтів $\bar{A}(l_i)$ на перетині 4 рядка (номер позиції елементу $Q_1(l)$ у векторі кінцевих параметрів) та 1 стовпчика (номер позиції елементу $EI\nu_1(0) = 0$ у векторі початкових параметрів).

Під час розгляду сумісності деформацій та рівноваги в рівняннях (2.13…2.21), в матрицю $\bar{A}(l_i)$ вводяться компенсуючі елементи відповідно до викладеного вище порядку.

В результаті ланцюжка перетворень формується матриця $\bar{A}^*$, що має яскраво виражену головну діагональ та виділені з неї елементи, що відповідають особливим граничним умовам, накладеним на елементи розрахункової схеми.

Розв'язуючи основне рівняння чисельно-аналітичного методу граничних елементів

$$\overline{A^*}\overrightarrow{X^*} = -\vec{B}(l_i)$$

визначаємо невідомі граничні параметри, що входять до вектору X^*.

Розрахунок було проведено за допомогою програми, розробленої в системі комп'ютерної математики MATLAB. На рис. 2.8 наведено епюру згинальних моментів

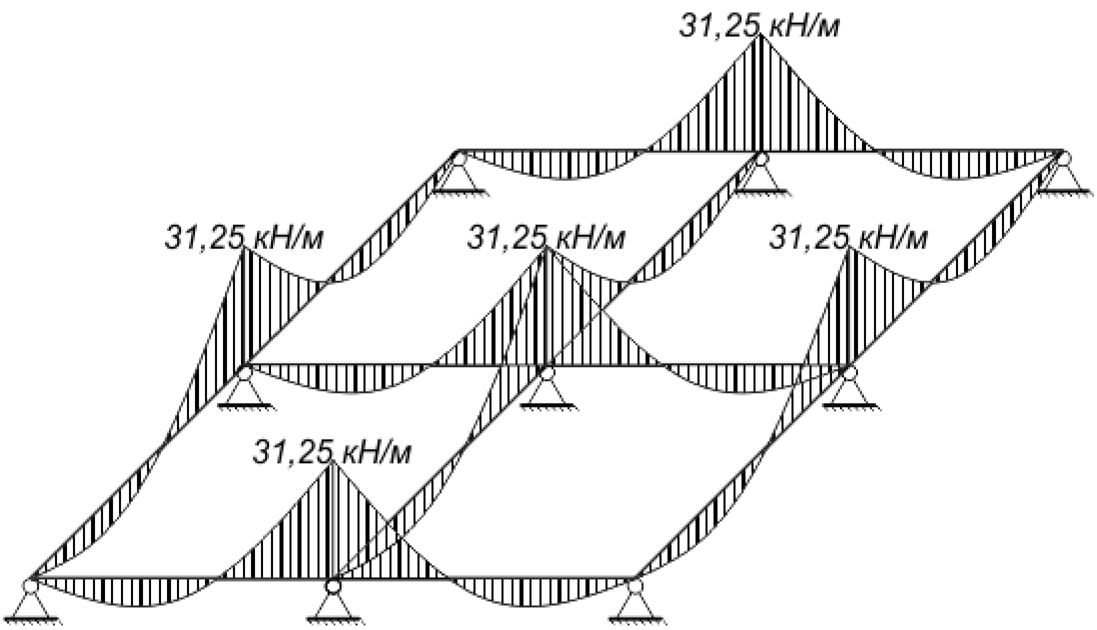


Рис. 2.8. Епюра згинальних моментів M_0

Виконано розрахунок перехресно-балкової системи, розрахункова схема якої наведена на рис. 2.7, в програмному комплексі *ANSYS R17.1*. Порівняння результатів наведено в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Порівняння значень згинальних моментів,
що виникають в перерізах перехресно-балкової системи

№ елементу	№ перерізу	Розрахунок ЧА МГЕ	Розрахунок *ANSYS R17.1*	Δ,%
1	1	0	0	0
	3	-35,25	-35,25	0
7	1	0	0	0
	3	-35,25	-35,25	0
Примітка: Переріз 1 знаходиться в початку елементу, 3 – в кінці елементу				

Порівняння результатів розрахунку показує їх повну збіжність. Таким чином запропонований підхід до формування розв'язуючого рівняння чисельно-аналітичного методу граничних елементів є коректним та дозволяє правильно формувати згадані рівняння для розрахунку перехресно-балкових систем.

2.6. Висновки за розділом

1. Запропонована методика застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів до розрахунку перехресно-балкових систем.

2. Запропонований універсальний алгоритм прямого формування компонентів розв'язуючого рівняння чисельно-аналітичного методу граничних елементів для плоских ортогональних стержневих систем, перевагами якого є простота алгоритмізації при програмуванні, легкість розвитку для просторових та/або неортогональних систем, універсальність, можливість врахування зміни жорсткості та утворення тріщин.

3. Недоліками запропонованого способу є: наявність вимог щодо нумерації вузлів та елементів, що входять до складу розрахункової схеми і неможливість розширення способу для розрахунку пластин та об’ємних тіл.

4. Порівняння результатів розрахунку перехресно-балкової системи, отриманих із застосуванням чисельно-аналітичного методу граничних елементів, з результатами розрахунків в *ANSYS R17.1* в пружній стадії, показало їх збіжність.

РОЗДІЛ 3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ РОБОТИ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ПЕРЕХРЕСНО-БАЛКОВИХ СИСТЕМ

3.1. Характеристики експериментальних моделей

Експериментальні перехресно-балкові системи запроектовані відповідно до вимог діючих нормативних документів з врахуванням рекомендацій іноземних норм та правил та передового світового досвіду. Бетонна суміш, що застосовувалась при виготовленні конструкцій, виготовлялась безпосердньо у примішенні формування дослідних конструкцій із співвідношенням компонентів Ц:П:Щ = 1:1,78:2,631 при В/Ц = 0,41 як для залізобетонної перехресно-балкової системи, так і для зразків бетону для визначення його фізико-механічних характеристик. Експериментальні моделі виготовлялись в попередньо змащеній емульсолом розбірній опалубці, розробленій та виготовленій на кафедрі будівельної механіки. Перехресно-балкові моделі виготовлялись в одній опалубці послідовно. Ущільнення бетонної суміші при укладанні виконувалось за допомогою глибинного вібратора, що дозволяло рівномірно розподілити бетон у опалубці та позбутися пустот, що могли утворитись при бетонуванні. Формовка конструкції виконувалась в приміщеннях лабораторії кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури. Загальний вид моделі перехресно-балкової системи, підготовленої до випробувань, показаний на рис. 3.6.

Разом із моделями перехресно-балкових систем виготовлялись контрольні зразки призм та кубів для визначення фізико-механічних характеристик бетону. Експериментальні моделі та контрольні зразки після розпалублення тверднули в однакових температурно-вологісних умовах протягом 28 діб при температурі 16…20^{o}.

Для визначення фізико-механічних характеристик бетону експериментальних зразків в кожній серії було випробувано по шість контрольних кубів розмірами 100х100х100 мм та по три призми розмірами 100х100х400 мм (рис. 3.1, 3.2), виготовлених при формуванні залізобетонних перехресно-балкових систем. Методи виготовлення, відбору зразків, обладнання та прилади відповідають вимогам ДСТУ Б В.2.7-217:2009. Випробування контрольних зразків виконані за ДСТУ Б В.2.7-214:2009 «Бетони. Методи визначення міцності за контрольними зразками» [55, 56]. Розміри зразків, їх виготовлення та випробування для визначення міцності на стиск відповідають також європейським та американським нормам [144, 157…159].

Рис. 3.1. Зразки куби та призми

Випробування контрольних зразків виконувалось на гідравлічному пресі лабораторії кафедри будівельної механіки. Гідравлічний прес пройшов повірку та тарування. Руйнуюче навантаження фіксувалось за допомогою манометра на пресі з точністю 0,1 тс.

За результатами випробувань контрольних зразків бетону на 28 добу встановлено, що бетон експериментальних конструкцій відповідає класу С20/25 за міцністю на стиск (табл. 3.1).

3.2. Експериментальні конструкції. Випробувальна установка. Методика випробувань та прилади

3.2.1. Експериментальні конструкції

З метою визначення особливостей роботи перехресно-балкових систем, була розроблена та реалізована програма експериментальних досліджень залізобетонних елементів при статичних навантаженнях. Дана програма передбачає випробування конструкцій при різних режимах навантаження.

Рис. 3.2. Визначення призмової міцності

Для реалізації представленої програми були запроектовані та виготовлені залізобетонні експериментальні конструкції. Вибір розмірів конструкції, класу арматурної сталі, класу бетону за міцністю, кроку та діаметру арматурних стержнів визначається параметрами наявного технологічного оснащення, задачами дослідження та особливостями навантажувального обладнання.

Таблиця 3.1

Результати випробувань контрольних зразків кубів та призм

№ п/п	Вид зразка	Міцність $f_{ck,cube}$ або $f_{ck,prism}$, МПа
1	Куб	31
2	Куб	30
3	Куб	32
4	Куб	31,1
5	Призма	23,5
6	Призма	24
7	Призма	23,1
8	Призма	23

Геометричні характеристики конструкцій показані на рис. 3.3. Схема армування перехресно-балкової системи показана на рис. 3.4.

Проектування експериментальних конструкцій виконано за принципом геометричної подібності схем армування, співвідношення розмірів поперечного перерізу реальним конструкціям відповідно до діючих норм [53, 54]. Захисний шар бетону, класи арматури та бетону відповідають діючим нормам. Матеріали для виготовлення арматурного каркасу та бетонної суміші постачалися з необхідними супроводжуючими документами, що підтверджують їх якість. Опалубка для виготовлення конструкції виготовлялася з наявних матеріалів.

Експериментальні конструкції являють собою залізобетонні перехресно-балкові системи, що складаються із чотирьох попарно взаємно перпендикулярних балок, розміщених на відстані 500 мм від краю конструкції. Балки прямокутного перерізу з розмірами b x h = 60 x 120 мм та довжиною 2000 мм кожна. Армовані експериментальні конструкції поздовжньою арматурою класу А400С [57] діаметром 8 мм в нижній зоні (два стержні в кожній балці). Приопорні зони армуються додатково двома стержнями арматури класу А400С діаметром 8 мм довжиною 470 мм у верхній зоні з перев’язкою з нижньою арматурою хомутами з проволоки в’язальної Вр-І, діаметром 3 мм. Товщина захисного шару складає 15 мм. Товщина захисного шару прийнята відповідно до рекомендацій діючих Тіло експериментальної конструкції виконано з бетону класу С20/25. Каркас дослідної перехресно-балкової системи показано на рис. 3.5.

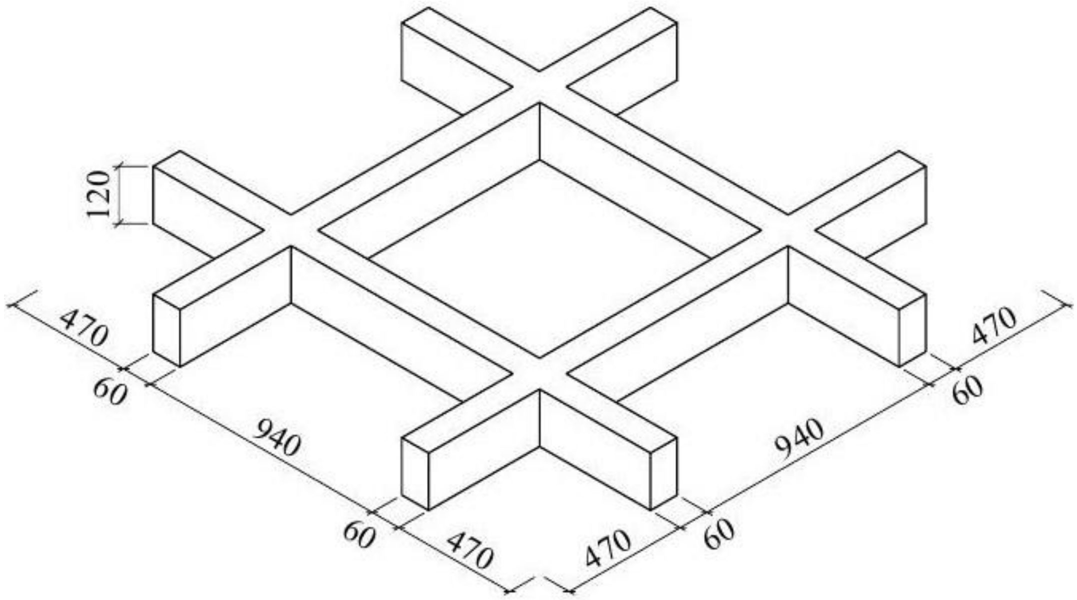


Рис. 3.3. Геометричні характеристики експериментальної конструкції

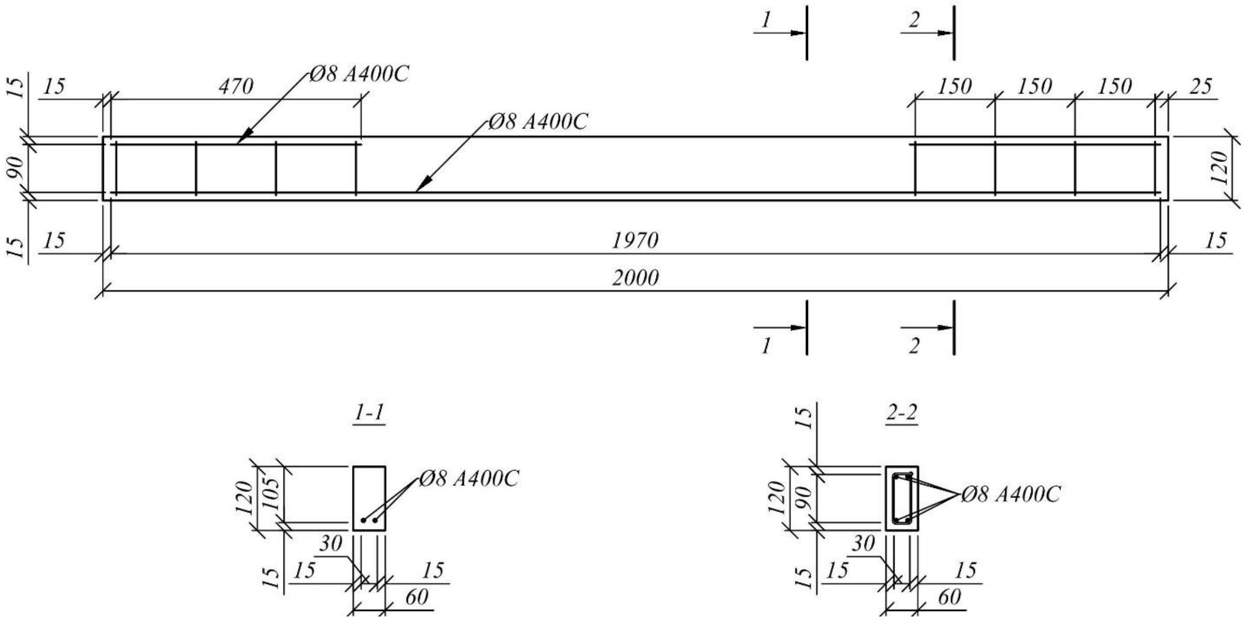


Рис. 3.4. Схема армування балки

Рис. 3.5. Каркас дослідної перехресно-балкової системи

Рис. 3.6. Загальний вид готової перехресно-балкової системи

3.2.2. Стенд для випробувань. Вимірювальні прилади

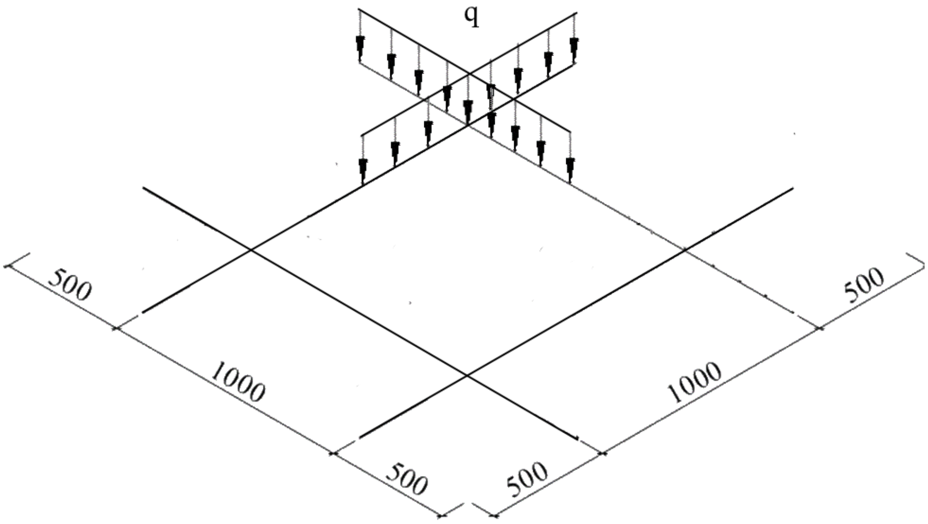
Схема навантаження експериментальної конструкції показана на рис. 3.7.

Для проведення експериментальних досліджень перехресно-балкових систем було запроектовано та зібрано стенд для випробувань.

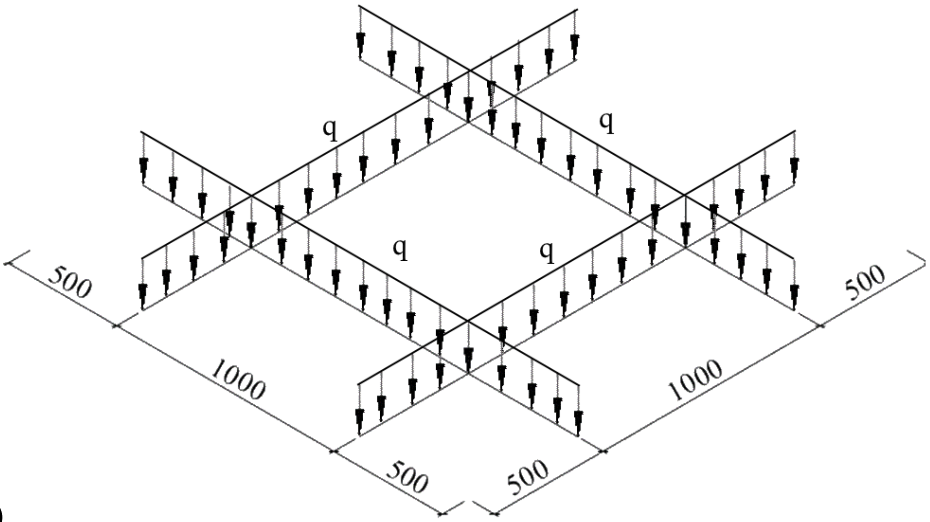
Стенд для випробувань залізобетонних перехресно-балкових систем на дію статичного навантаження (рис. 3.8) зібраний у випробувальній лабораторії кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури. Для цього на висоті 1,6 м над рівнем підлоги була закріплена прямокутна металева рама *1*, зварена із швелерів №20У. Розміри рами в плані складали 2 х 2 м, що дозволяє сперти на неї перехресно-балкову систему *2* на величину 60 мм (ширину полиці). Схема випробування конструкції відповідала роботі перехресно-балкової системи з шарнірним закріпленням. На перехрестя балок були встановлені прокладочні металеві пластинки *3*, на котрі встановлювали два швелери *4* №10У, посилені ребрами жорсткості. Навантаження на зразок створювали за допомогою гідравлічного домкрату на 100 кН *6*, який упирали через швелер в плити перекриття, а іншим кінцем – в двотавр *5*, який передавав навантаження через швелери та прокладочні пластинки безпосередньо на конструкцію *2*.

Деформації в бетоні вимірювали за допомогою тензометричних датчиків з базою 50 мм, наклеєних на бічні поверхні конструкції в середній досліджуваній зоні. Тензометричні датчики, що наклеювались на бетон, розміщувались в напрямку дії напружень в стиснутій та розтягнутій зонах.

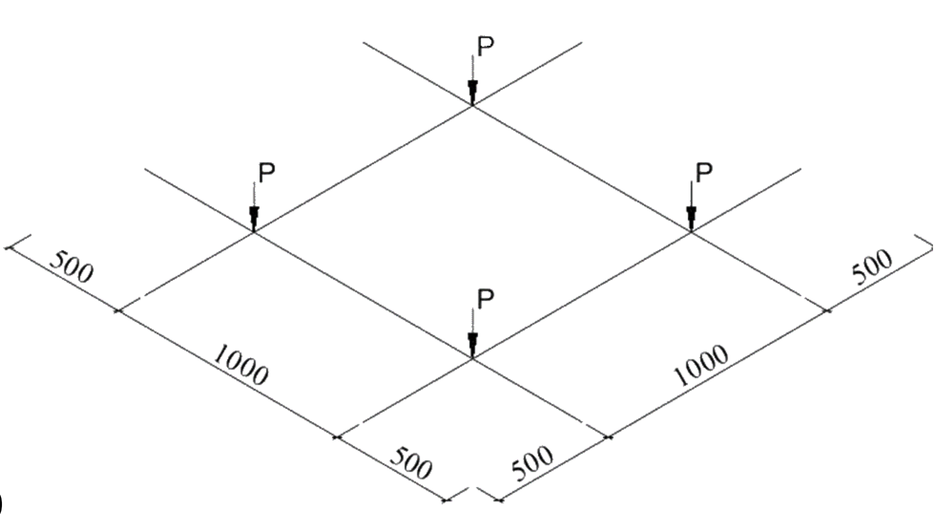
Для визначення вертикальних переміщень досліджуваної конструкції, використовувались три прогиноміри 6ПАО та один індикатор годинникового типу ІЧ-10 з ціною поділки 0,01 мм. Прогиноміри кріпились на станинах, не зв’язаних із досліджуваною конструкцією та стендом для випробувань за допомогою струбцин, переміщення конструкції передавались на вал прогиноміру за допомогою сталевої струни з підвішеним вантажем. Індикатор годинникового типу кріпився на станині, не зв’язаній із досліджуваною конструкцією та стендом для випробувань. Вертикальні переміщення конструкції передавались безпосередньо на шток індикатору годинникового типу.



а)



б)



в)

Рис. 3.7. Розрахункові схеми випробувань

а) 1 етап I серія; б) 2 етап I серія; в) всі наступні випробування

Також із внутрішньої сторони конструкції встановлювались індикатори годинникового типу ІЧ-10 в розтягнутій та стиснутій зонах бетону для визначення деформацій конструкції. Індикатори годинникового типу встановлювались шляхом кріплення до опор, наклеєним безпосередньо на тіло конструкції.

Схема розміщення прогиномірів та індикаторів годинникового типу наведена на рис. 3.9…3.11. Місця встановлення прогиномірів на рисунках відмічені цифрами з виносками, місця встановлення індикаторів годинникового типу позначено цифрами відповідно в кружечках та прямокутниках. При цьому прилад, номер якого вказано першим, розміщувався в стиснутій зоні, а той, номер якого вказано другим – в розтягнутій.

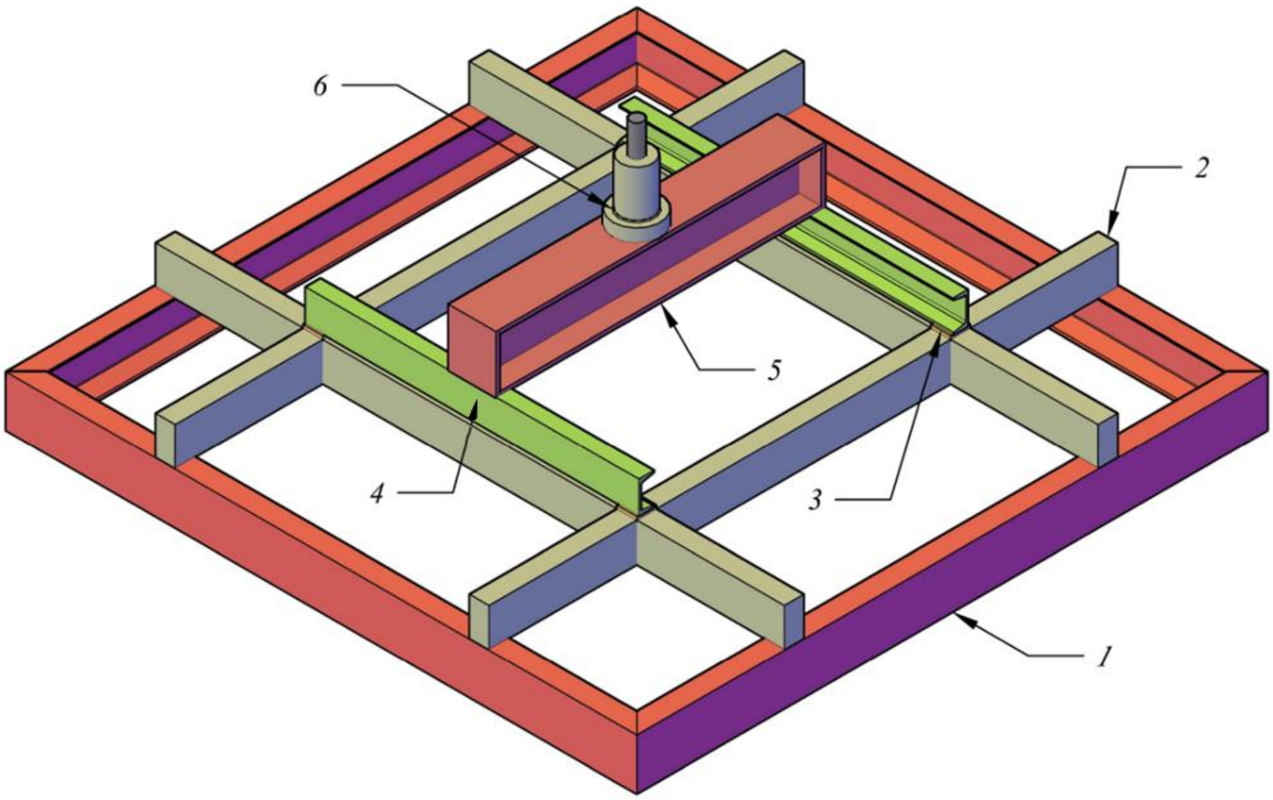


Рис. 3.8. Стенд для випробувань перехресно-балкових систем:
1. Опорна рама. 2. Експериментальна конструкція. 3. Стальні навантажувальні пластинки. 4. Розподільні швелери. 5. Розподільний двотавр. 6. Домкрат

3.2.3. Результати експериментів

Випробування всіх зразків проводилось шляхом ступінчатого навантаження за допомогою домкрата, однак в кожному експерименті були незначні особливості, описані нижче.

Випробування І серії перехресно-балкової системи, виконаної із залізобетону проводились в три етапи. На першому етапі виконувалось навантаження перехресно-балкової системи на перетині осей 2 та Б за допомогою металевих брусків різної ваги. Починаючи з навантаження в 0,838 кН, навантаження витримувалось по 10 хвилин, покази з приладів знімались в момент прикладення навантаження та після десяти хвилин. Максимальне навантаження склало 2,445 кН. Після прикладення максимального навантаження, перехресно-балкова система поступово розвантажувалась зодночасним зняттям показів на кожному кроці розвантаження. Покази вимірювальних приладів наведені в табл. 1 Додатку А.

На другому етапі виконувалось нерівномірне навантаження балок перехресно-балкової системи за допомогою металевих брусків різної ваги. Навантаження в 0,552 кН прикладалося на балку, розміщену по осі 2 в межах осей Б та В, збільшення навантаження до 1,112 кН відбувалось по балці по осі 3 в межах осей Б та В, до 1,483 кН – по балці по осі В в межах осей 2 та 3. В подальшому всі балки перехресно-балкової системи завантажувались рівномірно. Максимальне навантаження, прикладене до перехресно-балкової системи, склало 6,534 кН. Покази вимірювальних приладів наведені в табл. 2 Додатку А.

На третьому етапі навантаження виконувалось за допомогою стенду, описаного в п. 3.2.2. Навантаження виконувалось за допомогою гідравлічного домкрату з тарованим манометром з ціною поділки 0,1 кН, максимальним навантаженням в 100 кН, виробництва компанії Tecnotest (Італія). Після прикладення навантажень 23 кН, 26 кН, 29 кН та 32 кН, виконувалась їх витримка протягом 10 хвилин. В цих випадках покази з вимірювальних приладів знімались при досягненні заданого навантаження та після витримки її протягом 10 хвилин. Руйнуюче навантаження склало 61,5 кН. Покази вимірювальних приладів наведені в табл. 3, 4 Додатку А.

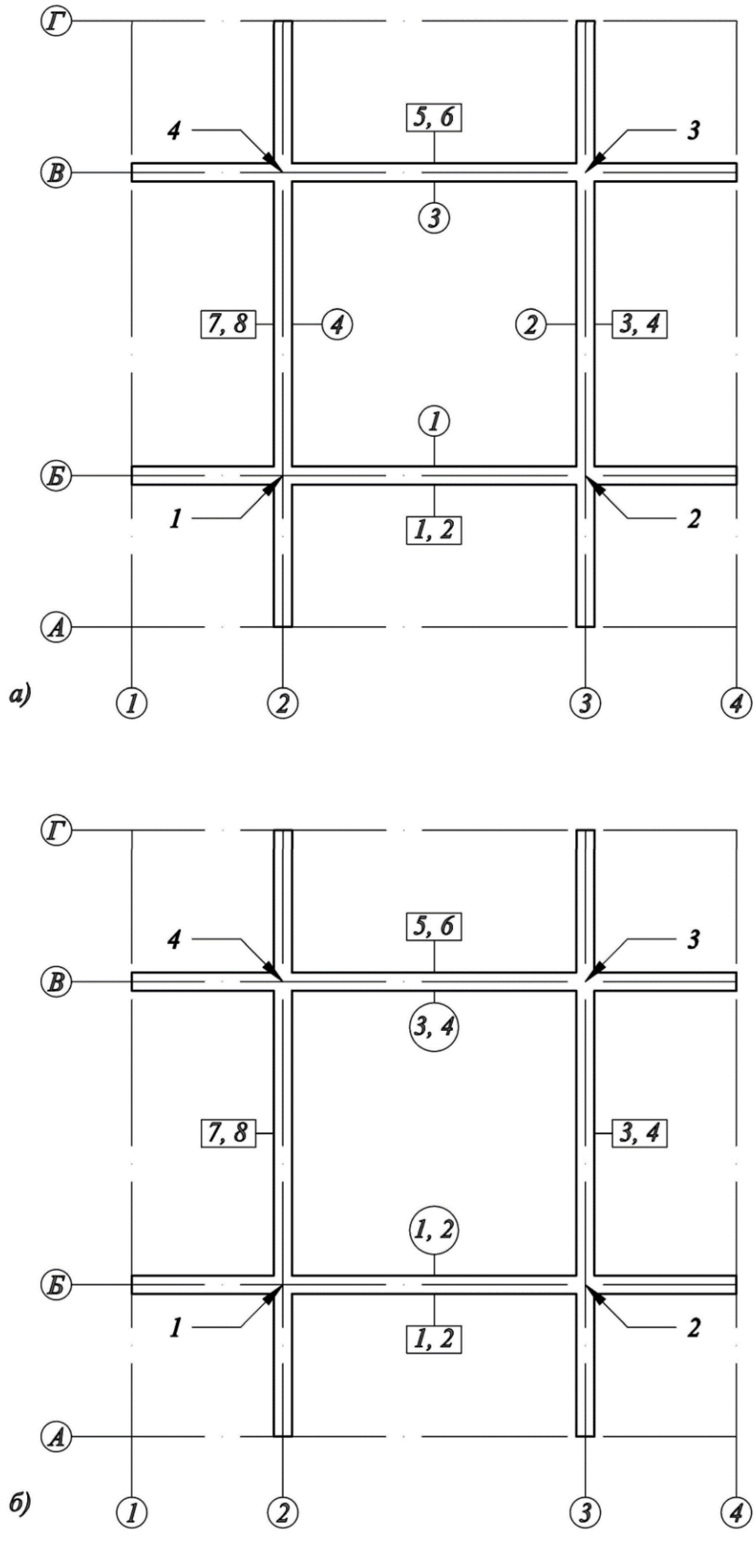


Рис. 3.9. Схема розміщення вимірювальних приладів на I серії перехресно-балкових систем

а) на першому та другому етапі випробувань; б) на третьому етапі випробувань.

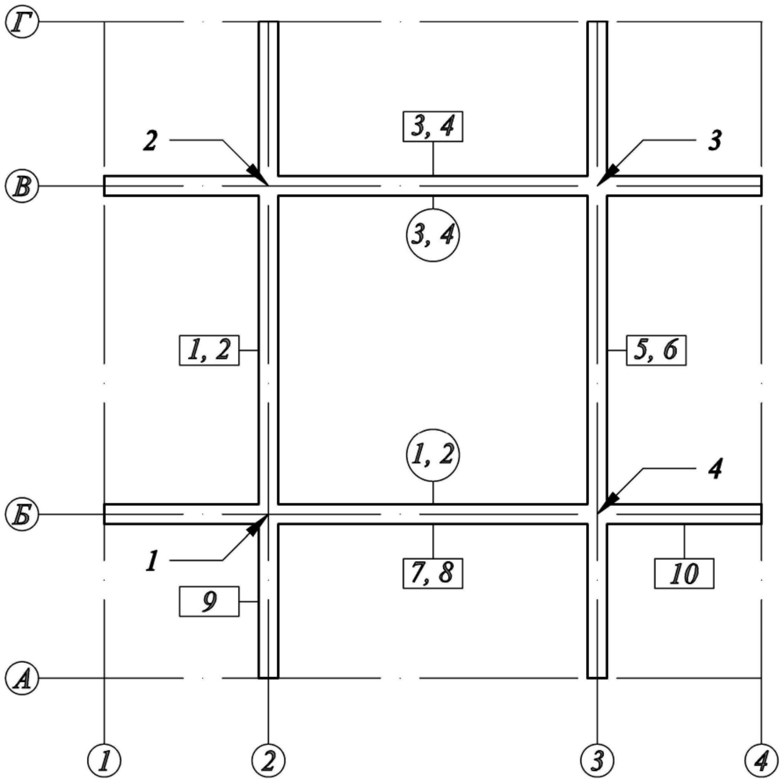


Рис. 3.10. Схема розміщення приладів на ІІ серії перехресно-балкових систем

Рис. 3.11. Схема розміщення приладів на ІІІ серії перехресно-балкових систем

Випробування II серії перехресно-балкової системи проводились за допомогою стенду, описаного в п. 3.2.2. Навантаження виконувалось за допомогою гідравлічного домкрату з тарованим манометром з ціною поділки 0,1 кН, максимальним навантаженням в 100 кН, виробництва компанії Tecnotest (Італія). Навантаження прикладалось ступінчато з кроком 2,5 кН. Руйнуюче навантаження склало 41,5 кН. Покази вимірювальних приладів наведені в табл. 5, 6 Додатку А.

Випробування III серії перехресно-балкової системи виконувалось аналогічно до випробувань першої та другої серій із застосуванням стенду, описаного в п. 3.2.2. Навантаження виконувалось за допомогою гідравлічного домкрату з тарованим манометром з ціною поділки 0,1 кН, максимальним навантаженням в 100 кН, виробництва компанії Tecnotest (Італія).

В процесі випробувань, на 15 етапі навантаження модель перехресно-балкової системи була повністю розвантажена. Після зняття навантаження величиною 24 кН та витримки протягом п’яти хвилин, були зняті покази з прогиномірів. Остаточні деформації склали до 1,81 мм.

Подальші випробування проводились аж до навантаження в 60 кН (35 етап завантаження), після чого вона була знижена до 24 кН.

Після відновлення випробувань, навантаження на III серію перехресно-балкової системи було доведено до рівня 70 кН (43 етап навантаження), знову знижена до нуля. Залишкові деформації на момент відновлення випробувань складали до 7 мм.

Після продовження випробувань, навантаження довели до 75,5 кН, при цьому спостерігалось руйнування перехресно-балкової системи за нормальними перерізами в середині кожної із складових балок.

В роботі також досліджено три випадки розміщення асиметричного навантаження. В першому випадку в точці 1 (рис. 3.12) прикладена зосереджена сила F=35 кН (далі – варіант I).

В другому випадку в точках 1 та 2 прикладені зосереджені сили F = 17,5 кН кожна (варіант II), і в третьому випадку зосереджені сили прикладені в точках 1, 2, 3, 4, причому в точках 1 та 2 прикладені сили величиною 11,67 кН, а в точках 3 та 4 – 5,83 кН (варіант III).

Отримані результати наведені в таблиці 3.2.

3.3. Аналіз результатів експериментальних досліджень напружено-деформованого стану конструкцій перехресно-балкових систем. Утворення, розвиток та розкриття тріщин

За результатами експериментальних досліджень залізобетонних перехресно-балкових систем при статичному впливі були визначені схеми руйнування та деформування, прогини, руйнуюче навантаження.

За даними, отриманими протягом проведення експериментальних досліджень залізобетонних перехресно-балкових систем, наведеним в таблицях 1…8 Додатку А, були побудовані графіки залежності прогинів від навантажень, прикладених до перехресно-балкових систем відповідних серій (рис. 3.13…3.15).

Проведення випробувань супроводжувалось фотофіксацією поверхні досліджуваних перехресно-балкових систем з метою визначення процесу їх тріщиноутворення.

На першому та другому етапах випробувань I серії перехресно-балкових систем процесу тріщиноутворення зафіксовано не було. В процесі навантаження дослідних конструкцій не було виявлено утворення, розвитку та розкриття тріщин.

На третьому етапі випробувань I серії перехресно-балкових систем при статичному навантаженні перші тріщини в прогоновій частині почали утворюватися при навантаженні в 35 кН, що складає 0,6 від руйнуючої. Утворилися 11 тріщин на бічній грані, нормальних по відношенню до нижньої грані конструкції. Ширина розкриття тріщин при цьому склала 0,1 мм.

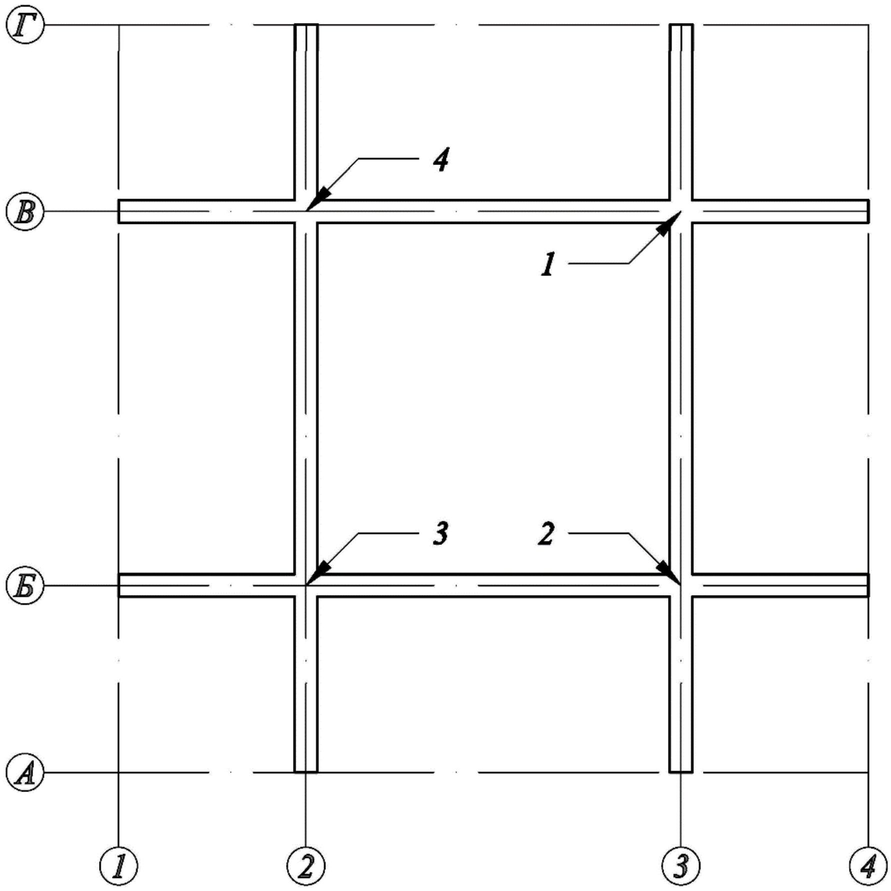


Рис. 3.12. Розміщення точок прикладення асиметричного навантаження

При подальшому збільшенні навантаження до 39 кН утворилося 3 тріщини на додачу до тих, що утворилися раніше. Ширина розкриття тріщини №5, яка була вибрана з метою контролю ширини розкриття, склала 0,15 мм.

При навантаженні 44 кН на досліджуваній конструкції було виявлено 18 тріщин, при цьому ширина розкриття тріщини №5 склала 0,2 мм.

Після досягнення навантаження в 48 кН, що складає 0,78 від руйнуючого, було зафіксовано утворення 23 тріщин. Максимальна ширина розкриття тріщини склала 0,2 мм.

При досягненні руйнуючого навантаження відбулося крихке руйнування бетону в опорній зоні балки по осі 2 межах осей В та Г. Руйнування відбулось за похилою тріщиною, яка викликала сколювання частини бетонної конструкції перехресно-балкової конструкції.

Таблиця 3.2

Прогини при асиметричному навантаженні

№№ точок	Прогини, мм
Варіант I	
1	0,001
2	0,004
3	0,004
4	0,001
5	0,001
6	0,006
Варіант II	
1	0,002
2	0,001
3	0,003
4	0,001
5	0,001
6	0,003
Варіант III	
1	0,002
2	0,001
3	0,002
4	0,001
5	0,001
6	0,002

При випробуванні II серії перехресно-балкових систем перші тріщини почали утворюватися при навантаженні 20 кН, що складає 0,5 від руйнуючого. В цей момент утворилось 5 тріщин, ширина розкриття тріщини №2, що утворилась на балці, розміщеній по осі В, склала 0,4 мм.

При послідовному збільшенні навантаження на конструкцію утворювались нові тріщини. Так, при навантаженні в 22,5 кН було зафіксовано утворення 7 тріщин, при навантаженні в 25 кН кількість тріщин склала 12 шт. При навантаженні в 27,5 кН (0,66 від руйнуючого) утворилось 3 додаткових тріщини, ширина розкриття тріщини №2 склала 1 мм.

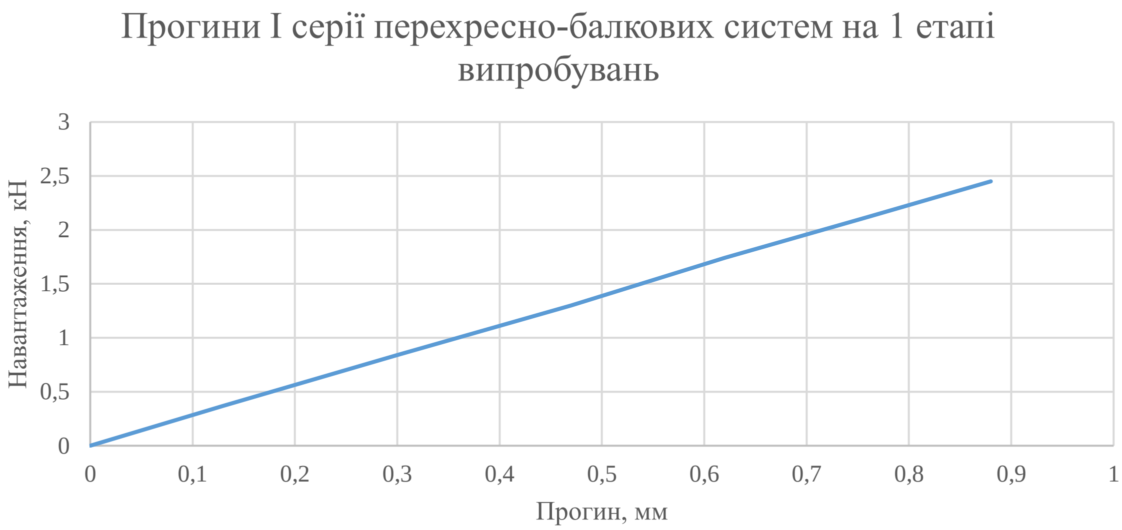
При навантаженнях в 30 кН та 32,5 кН було зафіксовано 19 та 23 тріщини відповідно.

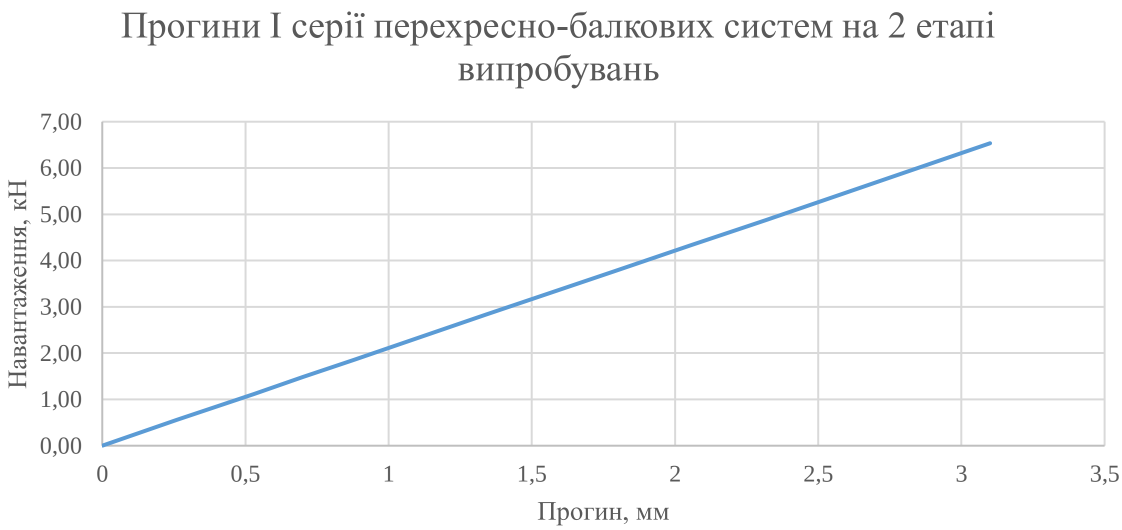
При навантаженні в 0,9 від руйнуючого (37,5 кН), ширина розкриття тріщини №10 склала 3 мм, тріщини №2 – 1,5 мм.

В процесі послідовного навантаження експериментальної конструкції, починаючи з навантаження в 17,5 кН (0,5 від руйнуючого) та до руйнування спостерігалась картина поступового тріщиноутворення та розкриття тріщин. При цьому зусилля в перехресно-балковій системі перерозподілялись і в роботу включалися нові елементи перехресно-балкової системи, про що свідчить процес поступового утворення тріщин на різних частинах балки, який корелюється з етапами навантаження дослідного зразка. Так, перша тріщина виникла і почала розкриватися в прогоновій частині балки, розміщеної по осі В. Після цього процес тріщиноутворення змістився на балку по осі 3. Після виникнення тріщини на балці, розміщеній по осі 3, процес тріщиноутворення послідовно перемістивсяспочатку на балку на осі 2, а після цього – на балку на осі Б. В результаті руйнування відбулося практично одночасно в чотирьох прогонах, що свідчить про достатню однорідність перехресно-балкової конструкції, а також про рівномірне прикладення навантаження на стенді для випробувань.

При випробуваннях ІІІ серії залізобетонних перехресно-балкових систем утворення перших 6 тріщин було зафіксовано при навантаженні в 22 кН, що складає 0,3 від руйнуючого.

Ширина розкриття тріщини №13 почала фіксуватися починаючи з навантаження в 28 кН. На момент прикладення навантаження в 36 кН, коли було зафіксовано утворення 18 тріщин, ширина розкриття тріщини №13 не змінилась.





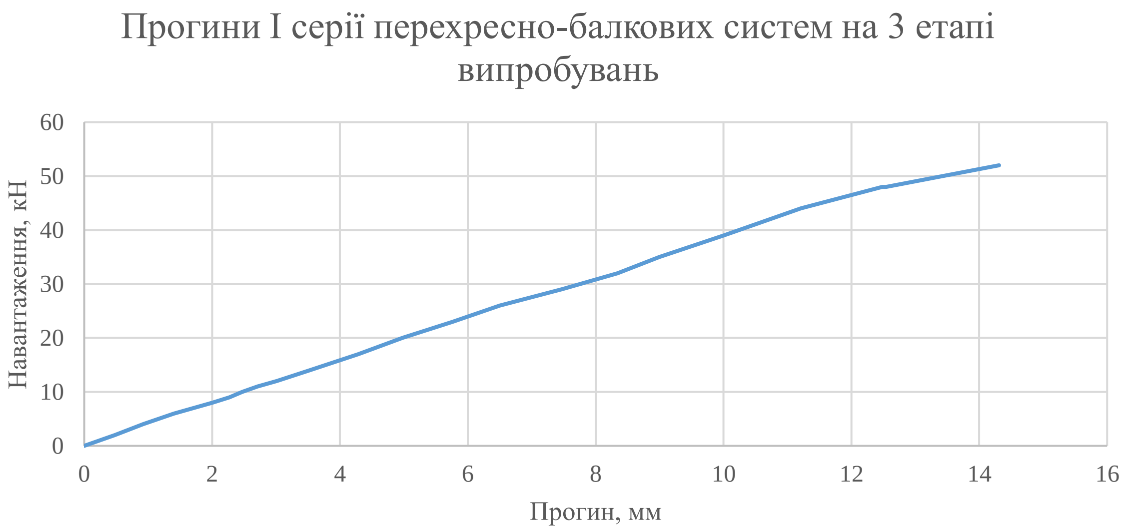


Рис. 3.13. Графіки залежності прогинів від навантаження для І серії перехресно-балкових систем

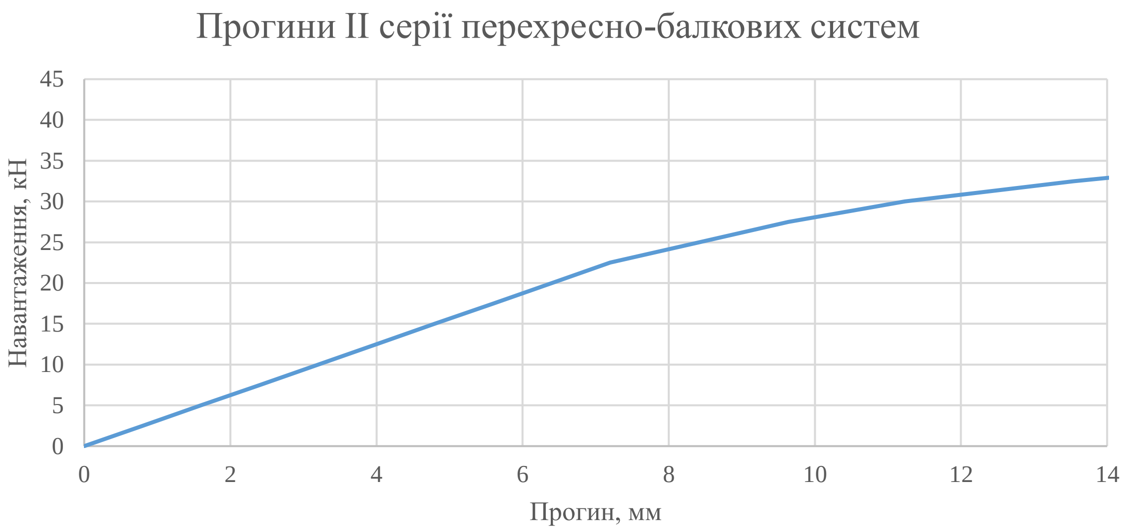


Рис. 3.14. Графік залежності прогинів від навантаження для II серії перехресно-балкових систем

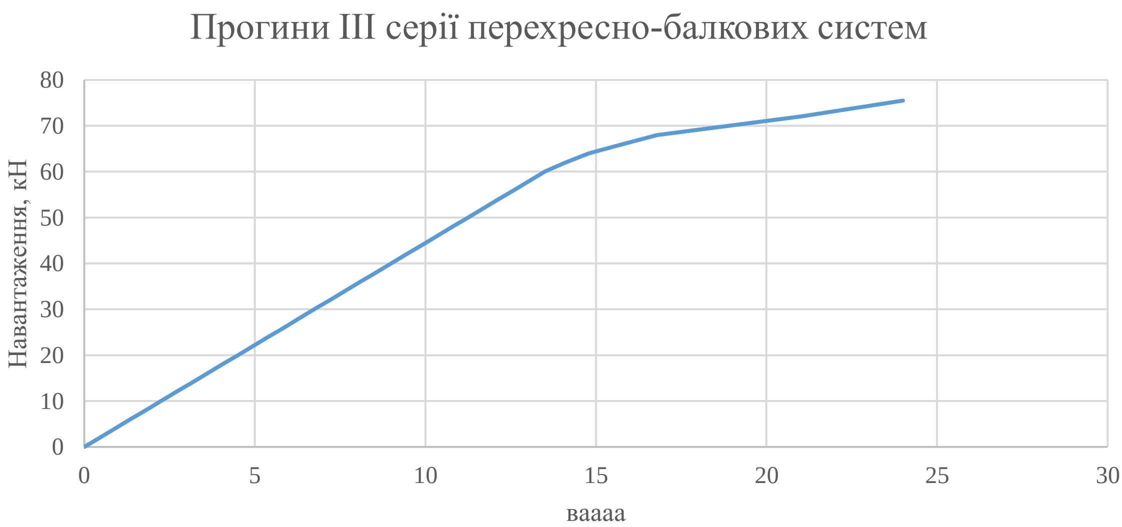


Рис. 3.15. Графік залежності прогинів від навантаження для III серії перехресно-балкових систем

В процесі подальшого навантаження та виконання циклів навантаження-розвантаження, кількість тріщин склала до 41 при величині навантаження в 70 кН (0,93 від руйнуючого). При цьому ширина розкриття тріщин змінювалась незначно і склала до 0,1 мм. Очевидно, що процеси трішиноутворення відбувались в основному в тілі конструкції без прояву тріщин на її поверхні.

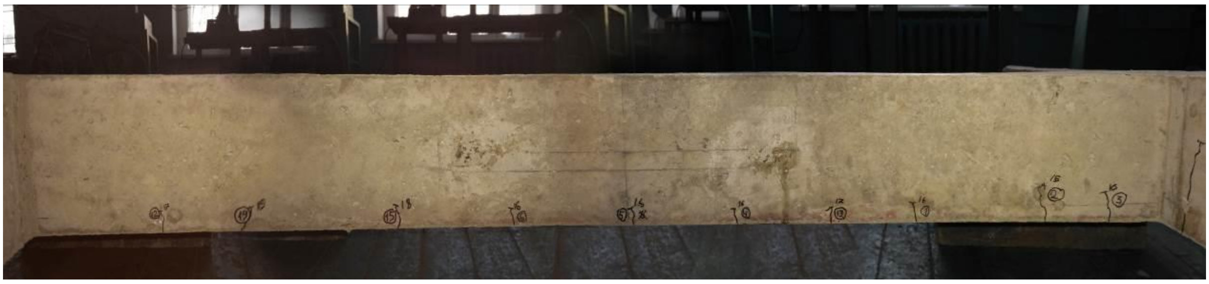
На момент руйнування конструкції (навантаження 71,5 кН), кількість тріщин склала 47 штук. Максимальна ширина розкриття тріщини склала 1 мм (тріщина №20). Після демонтажу гідравлічного пресу було відмічено закриття трьох тріщин.

Фотографії тріщиноутворення на експериментальних балках наведені на рис. 3.16…3.18.

3.4. Висновки за розділом

1. Проведені серії експериментальних досліджень конструкцій залізобетонних перехресно-балкових систем при дії симетричного та асиметричного навантажень з метою апробації запропонованої методики розрахунку перехресно-балкових систем.
2. Тріщиноутворення в досліджених конструкціях починалось з навантаження 0,6 від руйнуючого.
3. Ширина розкриття тріщин в процесі випробувань не перевищувала 3 мм.
4. В ході проведення експериментів спостерігалась картина тріщиноутворення та розкриття тріщин, що свідчить про рівномірний перерозподіл зусиль в тілі експериментальних конструкцій.

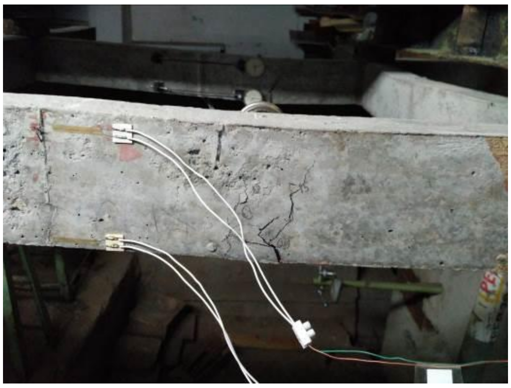

а)


б)


в)


г)

Рис. 3.16. Тріщиноутворення перехресно-балкової конструкції І серії
а) балка по осі 2; б) балка по осі Б; в) балка по осі 3; г) балка по осі В

а) 

б) 

в) 

г) 

Рис. 3.17. Тріщиноутворення перехресно-балкової конструкції II серії

а) балка по осі 2; б) балка по осі Б; в) балка по осі 3; г) балка по осі В

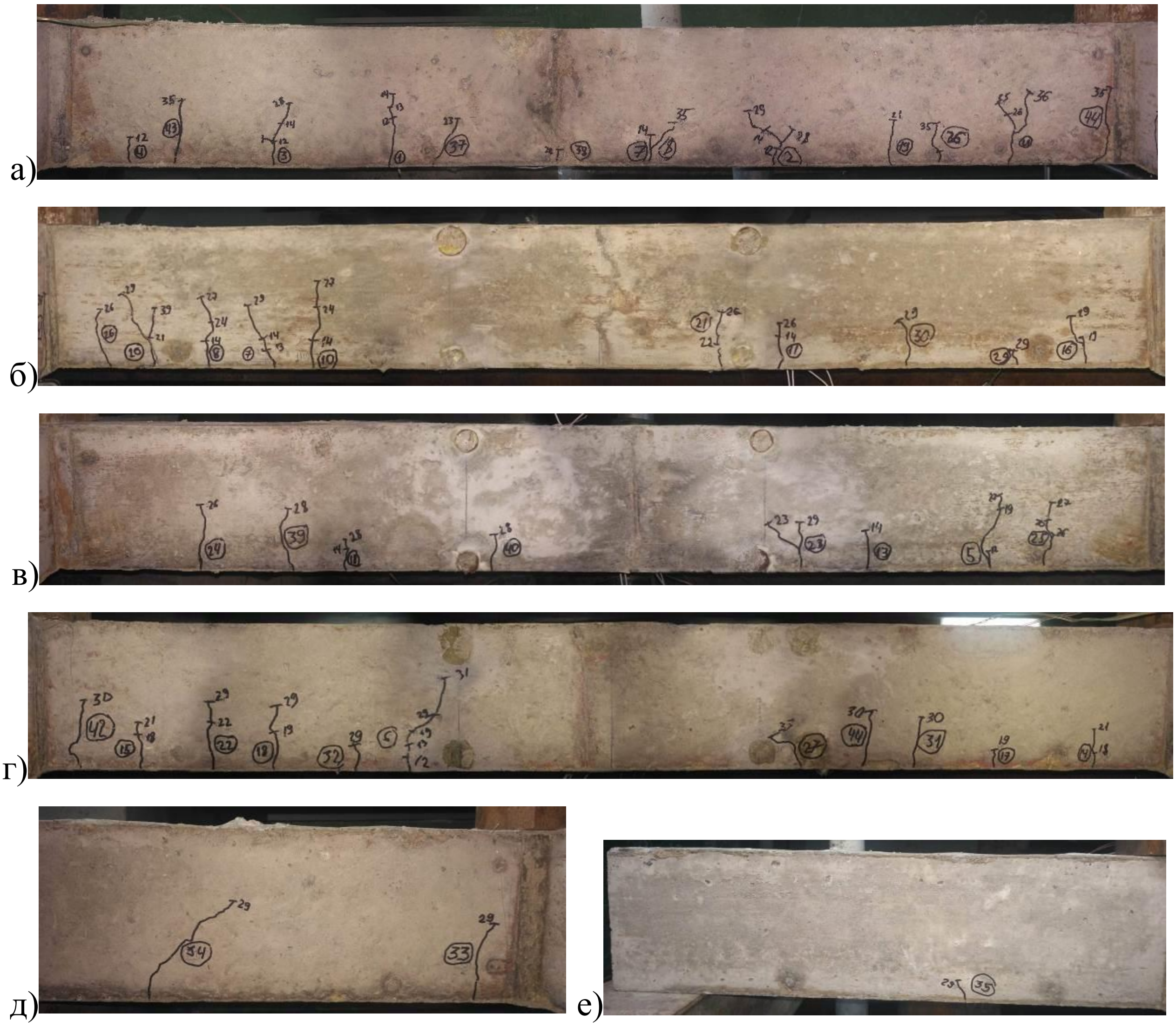


Рис. 3.18. Тріщиноутворення перехресно-балкової конструкції ІІІ серії

а) балка по осі 2; б) балка по осі Б; в) балка по осі 3; г) балка по осі В; д) балка по осі 2, в осях А-Б; е) балка по осі А в осях 1-2

РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЕРЕХРЕСНО-БАЛКОВИХСИСТЕМ

4.1. Формування розрахункової моделі деформування залізобетонних перехресно-балкових систем з вразуванням тріщиноутворення.

4.1.1. Компоненти розрахункової моделі

В роботі розрахункова модель деформування залізобетонних перехресно-балкових систем з врахуванням тірщиноутворення грунтується на:

– застосуванні чисельно-аналітичного методу граничних елементів;
– використанні моделі деформування залізобетонних згинальних елементів з врахуванням процесів тріщиноутворення;
– вдосконаленої моделі деформування при крученні залізобетонних згинальних елементів з нормальними тріщинами.

Це дозволяє враховувати кручення та тріщиноутворенні при розрахунку залізобетонних перехресно-балкових систем та

4.1.2. Програма розрахунку перехресно-балкових систем, заснована на використанні чисельно-аналітичного методу граничних елементів

На основі запропонованої в Розділі 2 методики застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів до розрахунку перехресно-балкових систем, розроблено алгоритм, блок-схема якого наведена в Додатку Б. Алгоритм відображає результати дослідницької роботи та може бути використаний для створення разрахункових комп’ютерних програм на будь-яких мовах програмування.

На основі наведеного алгоритму, розроблена програма *CrossBeam* в системі комп’ютерної математики MATLAB. Текст програми наведено в Додатку В.

Програма дозволяє розраховувати перехресно-балкові системи ортогональної конфігурації як з регулярною, так і з нерегулярною структурою. Спочатку задаються пружні характеристики матеріалу. Існує також можливість коригувати характеристики матеріалів.

Розроблено інтерфейс програми, який дозволяє вводити дані в інтерактивному режимі.

Основне меню програми *CrossBeam* наведено на рис. 4.1.

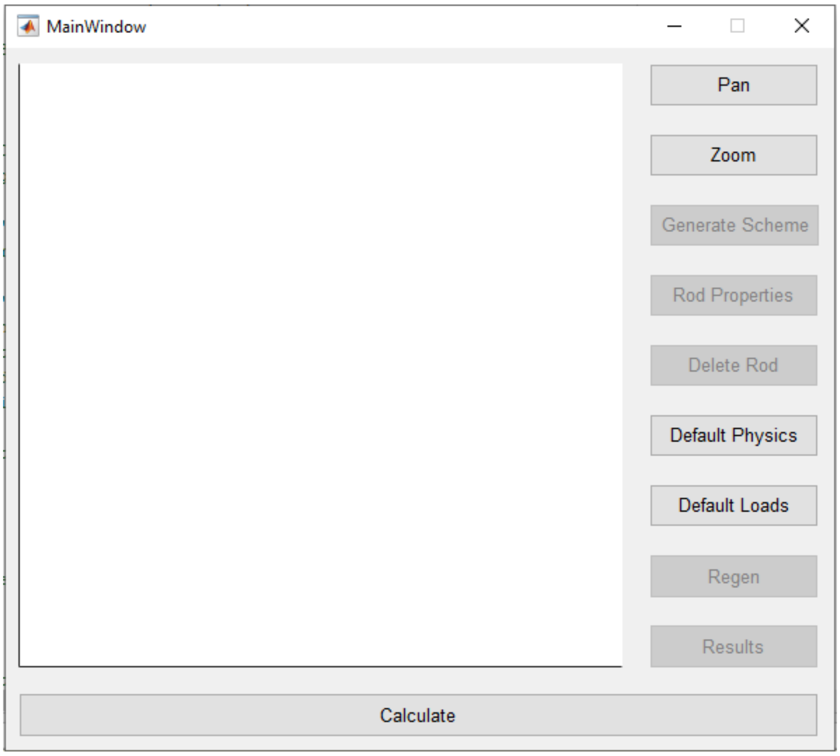


Рис. 4.1. Основне меню програми *CrossBeam*

Програма дозволяє задати фізичні (модуль пружності, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона) та геометричні характеристики (висота та гирина перерізу) елементів перехресно-балкової системи та навантаження (згинальний момент, зосереджена поперечна сила, розподілене навантаження, крутний момент, розподілений крутний момент), прикладені до них (рис. 4.2).

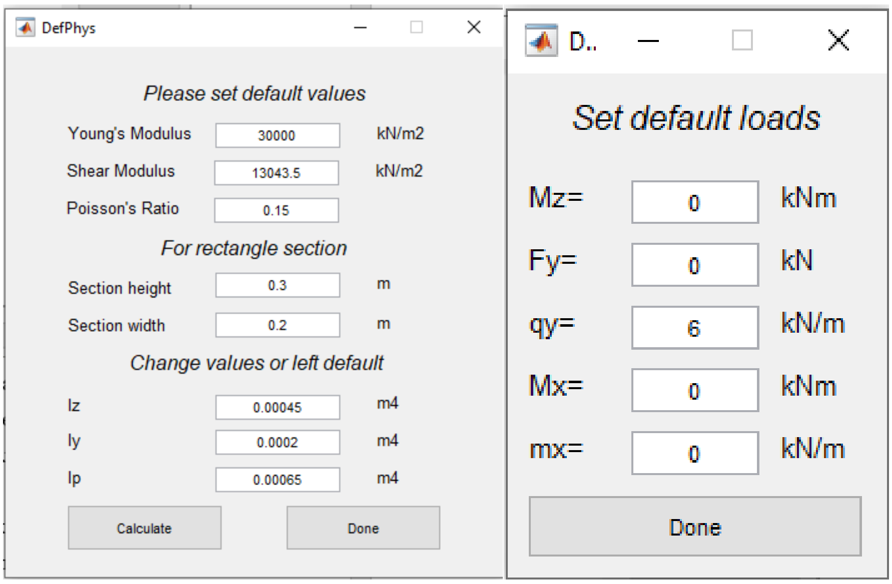


Рис. 4.2. Задання фізичних характеристик та навантажень

Під час підготовки розрахункової схеми, задані значення можна змінювати.

Для створення розрахункової схеми застосовуються кнопки *Generate Scheme*, *Rod Properties* та *Delete Rod*, що дозволяють керувати кількістю та місцем розташування стержнів, їх спиранням, навантаженнями та фізичними характеристиками. Створена розрахункова схема відображається в основному вікні програми (рис. 4.3).

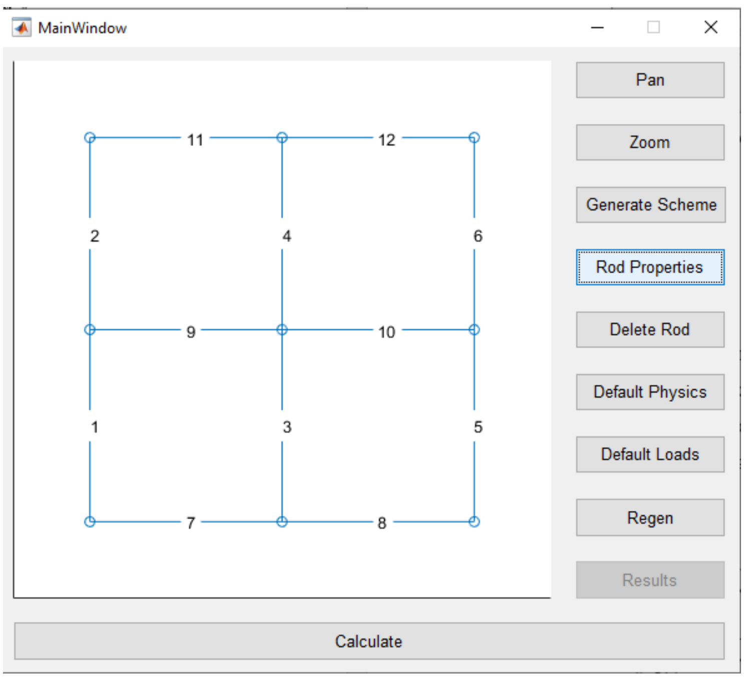


Рис. 4.3. Відображення розрахункової схеми у вікні програми

Після підготовки розрахункової схеми та задання навантажень розразунок виконується натисканням на кнопку *Calculate*. З результатами роботи програми можна ознайомитись у вікні результатів (рис. 4.4), натиснувши на кнопку *Results*, яка стає активною після виконання розрахунку.

4.2. Модель деформування залізобетонних згинальних елементів з врахуванням процесів тріщиноутворення

Існує достатньо велика кількість пропозицій для визначення згинальних жорсткостей з врахуванням реальних діаграм деформування бетону та арматури.

В роботі приймається практичний спосіб визначення жорсткості залізобетонних згинальних елементів при короткочасній дії навантаження, запропонований О.Ф. Яременко, А.В. Ковровим [142].

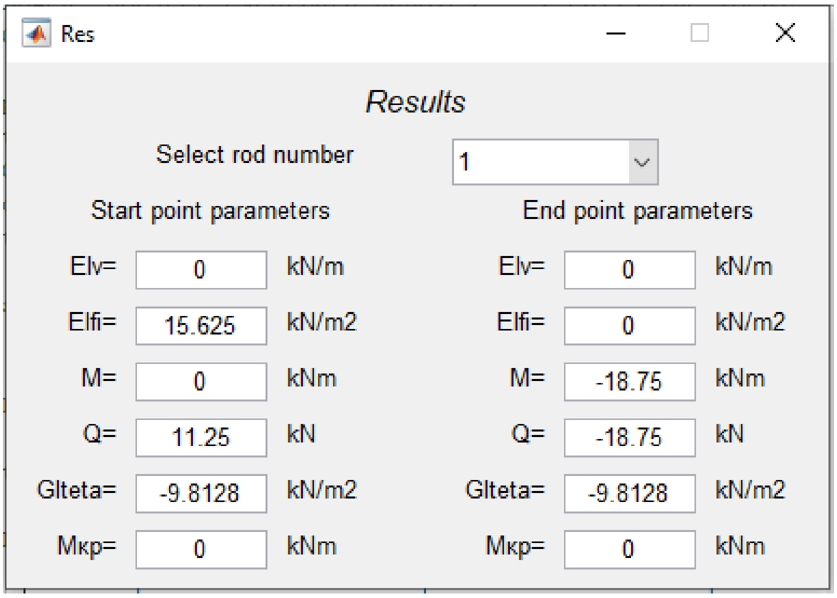


Рис. 4.4. Вікно результатів розрахунку

Виділяються дві стадії деформування залізобетонних згинальних елементів:

– без тріщин (в тому випадку, якщо виконується умова $M < M_{crc}$);

– з нормальними тріщинами (при $M > M_{crc}$).

Тут M_{crc} – згинальний момент тріщиноутворення, який може бути визначний наступним чином:

$$M_{crc} = W_{pl} R_{bt}^{\text{н}}, \tag{4.1}$$

де W_{pl} – пружнопластичний момент опору перерізу;

$R_{bt}^{\text{н}}$ – нормативний опір бетону на розтяг.

В стадії деформування без тріщин жорсткість визначають за формулою:

$$B = E_{b1} I_{red}, \tag{4.2}$$

де E_{b1} – модуль деформації бетону, який дорівнює, при короткостроковій дії навантаження

$$E_{b1} = 0{,}85 E_b; \tag{4.3}$$

I_{red} – момент інерції наведеного перерізу елементу.

При утворенні тріщин ($M = M_{crc}$) кривизна елемента зростає скачкоподібно – при незмінному значенні згинального моменту змінюється жорсткість.

При короткочасній дії навантаження згинальна жорсткість в стадії роботи з нормальними тріщинами (при $M > M_{crc}$) пропонується визначати за формулою:

$$B_g = E_b A_b h_0^2 \sqrt{\mu n_1} K, \tag{4.4}$$

де A_b – площа поперечного перерізу балки;

h_0 – розрахункова висота перерізу;

$\mu = A_s / A_b$ – коефіцієнт армування перерізу;

A_s – площа поперечного перерізу арматури;

$n_1 = E_s/E_b$ – відношення модулів пружності арматури та бетону. Коефіцієнт K визначається наступним чином:

$$K = b_1 + b_2 \left(\frac{M_{crc}}{M}\right)^2. \tag{4.5}$$

Для елементу, що має прямокутний поперечний переріз, приймаються наступні значення коефіцієнтів: $b_1 = 0{,}159$, $b_2 = 0{,}074$.

При граничному значенні згинального моменту ($M = M_u$) кривизна може зростати при постійному значенні згинального моменту (в перерізі утворюється пластичний шарнір). Значення M_u можна визначити з рівнянь граничної рівноваги.

На рис. 4.5 представлена діаграма деформування згинальних залізобетонних елементів «згинальний момент-кривизна», побудована виходячи з наведених пропозицій.

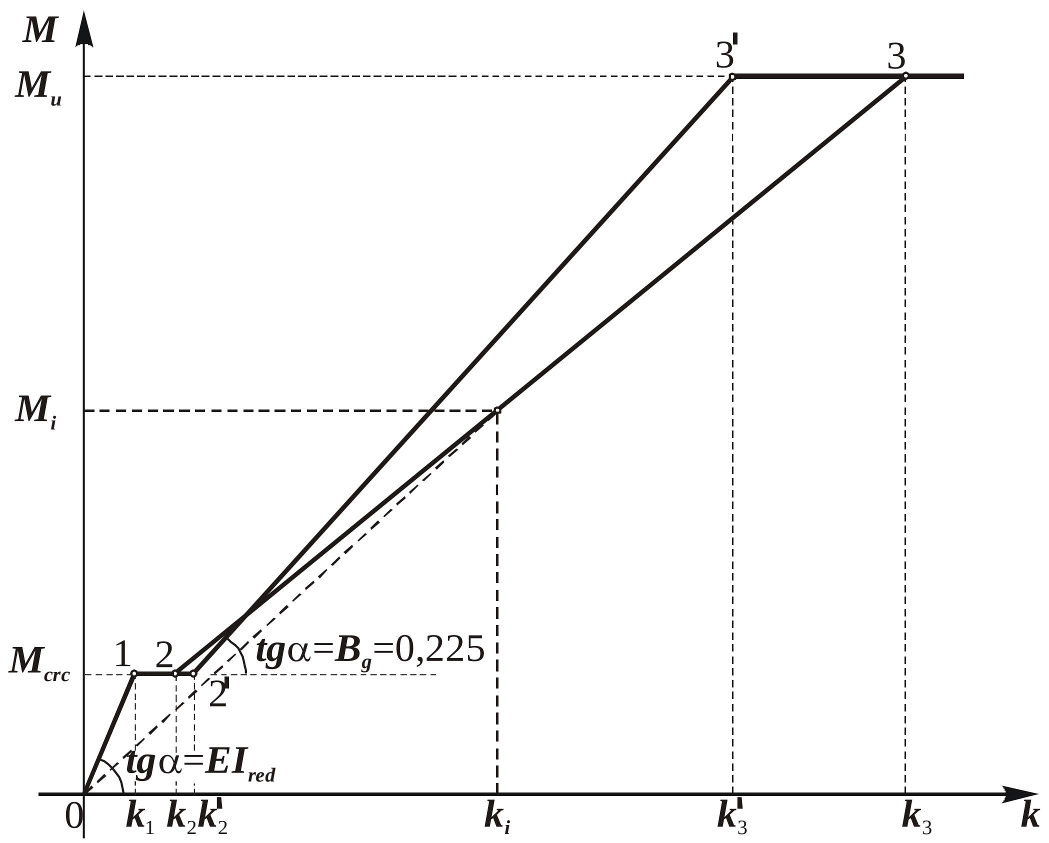


Рис. 4.5. Діаграма деформування згинального залізобетонного елементу

На діаграмі прямолінійна ділянка *0 - 1* відповідає пружній роботі перерізу. При цьому жорсткіть перерізу B постійна та визначається за формулою (4.2). Як видно на рис. 4.5, жорсткість на цій ділянці геометрично інтерпретується як тангенс кута нахилу діаграми до осі кривизн.

Ділянка *1 - 2* відповідає інтенсивному тріщиноутворенню, при якому без збільшення згинальних моментів збільшується кривизна.

Кривизна перерізів знаходиться в межах $k_1 < k_i < k_2$. Жорсткість на цій ділянці дорівнює

$$B_g = \frac{M_{crc}}{k_i}. \tag{4.6}$$

На ділянці *2 - 3* ($k_2 < k_i < k_3$) елемент працює з тріщинами.

Жорсткість перерізу B_g на цій ділянці змінна і визначається як січний модуль і визначається за формулою (4.4). На ділянці жорсткість інтерпретується як січний модуль і геометрично дорівнює тангенсу кута між віссю кривизн та променем, проведеним з початку координат до відповідної точки діаграми (рис. 4.5).

Остання ділянка діаграми, при значенні згинальних моментів, що дорівнюють граничним M_u, відповідає утворенню в перерізі пластичного шарніру.

Граничні значення кривизн визначають наступним чином:

$$k_1 = \frac{M_{crc}}{E_b I_{red}}, k_2 = \frac{M_{crc}}{B_g}, k_3 = \frac{M_u}{B_g}. \tag{4.7}$$

В системі комп’ютерної математики MATLAB написана програма, що дозволяє створювати для подальших розрахунків масиви значень згинальних моментів і відповідних ним кривизн, визначених за викладеною методикою. Діаграма, побудована за цими значеннями, наведена на рис. 4.6.

4.3. Врахування зміни крутильної жорсткості при утворенні нормальних тріщин

На просторову роботу розглянутих у дисертації систем значно впливають як крутильна так і згинальна жорсткості їх окремих елементів. Відомо, що в залізобетонних елементах утворення різних тріщин значно впливає на зміну їх характеристик жорсткості [8, 42, 52, 62, 81, 128].

На сьогодні вплив різних тріщин на зміну згинальної жорсткості залізобетонних елементів вивчено достатньо повно. Більшість публікацій, що стосуються кручення в залізобетоні, присвячено вивченню міцності таких елементів. Існуючі методики визначення жорсткості на кручення [14, 74, 176, 181, 190] стосуються в основному залізобетонних елементів з просторовими (спіральними) тріщинами при дії згину з крученням, хоча експериментальними дослідженнями встановлено суттєвий вплив нормальних тріщин на крутильну жорсткість залізобетонних елементів [8, 42, 62]. Дослідженню крутильної жорсткості залізобетонних елементів з нормальними тріщинами присвячено роботи Т.Н. Азізова, Д.В. Кочкарьова [3, 4, 7, 123, 148]. В цих роботах показано, що задача визначення крутильної жорсткості залізобетонних елементів з нормальними тріщинами включає в себе три етапи. На першому етапі розсікається поздовжня арматура і визначається взаємне зміщення берегів нормальної тріщини. На другому етапі визначається нагельна сила з умови сумісності деформацій в місці розсічення арматури. Третій, заключний етап – це по суті визначення крутильної жорсткості елемента з відомими величинами нагельних сил в поздовжній арматурі. В цих роботах також сказано, що найбільш складною і відповідальною частиною розв’язку загальної задачі є перший етап, тобто визначення взаємного зміщення берегів нормальної тріщини з розсіченою арматурою. Це пов’язано з фактом, що дотичні напруження при передачі крутного моменту з одного блоку на інший, відокремлений тріщинами, відбувається лише через частину торцевого перерізу. На рис. 4.6 показано залізобетонний елемент з нормальними тріщинами, який зазнає дії крутного моменту.

Якщо, як було сказано вище, розрізати поздовжню арматуру, то крутний момент з блоку A на блок B буде передаватися через частину перерізу висотою $x = x_{crc}$, як показано на рис. 4.7.

Ця обставина призводить до неможливості застосування формул теорії пружності для визначення переміщень, оскільки в теорії кручення розв'язання всіх задач передбачає, що крутний момент передається через дотичні напруження, розподілені по всьому торцевому перерізу.

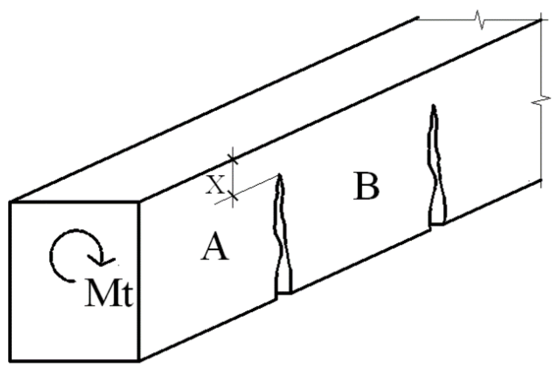


Рис. 4.6. Схема залізобетонного елементу з нормальними тріщинами, що зазнає впливу крутного моменту

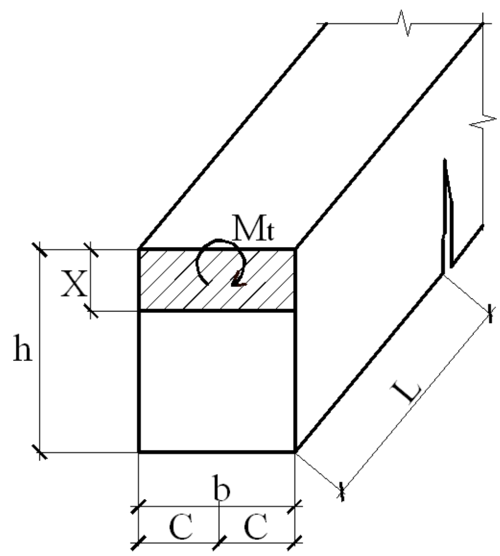


Рис. 4.7. Схема передачі крутного моменту з одного блоку на інший через стиснуту від згину зону бетону висоотою x

Моделювання за допомогою об'ємних елементів при використанні відомих програмних комплексів *ANSYS*, *Lira* та ін. є найбільш точним. Оскільки для визначення взаємного зміщення берегів нормальної тріщини з розсіченою арматурою слід змоделювати схему, складену з об'ємних скінчених елементів (рис. 4.8).

Однак, при розв'язку конкретних задач, коли розміри перерізу балок, висота нормальної трішини, відстань між тріщинами змінюються, таке моделювання вимагає кожен раз створення нової розрахункової моделі, що є досить складним і громіздким.

У зв'язку із цим в роботах [4, 147] було запропоновано використовувати апроксимаційні залежності взаємного переміщення берегів тріщини від геометричних параметрів балки.

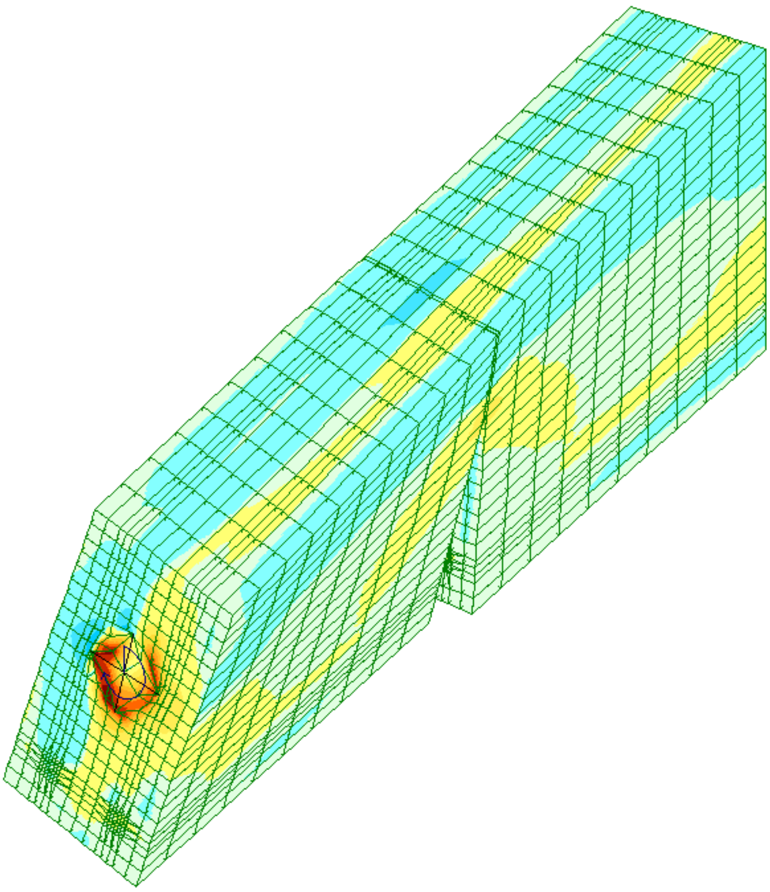


Рис. 4.8. Моделювання елементу з нормальною тріщиною об'ємними елементами

Так, в [147] зроблено припущення, що взаємне переміщення берегів тріщини Δ_{Mt} є чіткою функцією від висоти стиснутої зони, висоти та ширини перерізу балки і відстані між тріщинами:

$$\Delta_{Mt} = f(b, h, x_{crc}, l_{crc}) \qquad (4.8)$$

де b, h – відповідно ширина і висота перерізу елементу; x_{crc}, l_{crc} – відповідно висота стиснутої від згину зони та відстань між тріщинами.

Цей підхід достатньо добрий, однак для його реалізації слід провести велику кількість розрахунків із застосуванням об'ємних скінчених елементів. Так, якщо прийняти хоча б по п'ять варіантів кожної складової розмірів в формулі (1), отримаємо 3125 варіантів розрахунку, що, звичайно ж, є достатньо громіздкою задачею. Незважаючи на те, що п'яти варіантів для кожної складової достатньо мало.

Для спрощення задачі приймемо не абсолютні, а відносні одиниці для отримання апроксимаційних залежностей.

$$\Delta_{Mt} = f\left(\frac{x_{crc}}{h}, \frac{l_{crc}}{h}\right) \qquad (4.9)$$

Слід, однак, зазначити, що вираз (4.9) можна застосовувати з умовностями. Справа в тому, що при одному і тому ж співвідношенні x_{crc}/h та l_{crc}/h, величина взаємного зміщення берегів нормальної тріщини буде різною для різних розмірів балок. Це легко перевірити побудовою скінчено-елементних моделей. Водночас вираз (4.9) має лише дві змінні, що суттєво зменшує кількість розрахунків для отримання апроксимаційних залежностей (якщо знову прийняти по п'ять варіантів кожної змінної, то отримаємо 25 варіантів розрахунку).

Для можливості використання відносних залежностей типу (4.9) приймемо, що реальне взаємне зміщення в тріщині буде виражене формулою:

$$\Delta_{mt}^{b\times h} = \Delta_{mt}^{et} K_{\Delta} K_h \tag{4.10}$$

де $\Delta_{mt}^{b\times h}$ – взаємне зміщення берегів тріщини розглянутого елементу з розмірами перерізу $b \times h$; Δ_{mt}^{et} – взаємне зміщення берегів тріщини еталонного елементу. В якості еталонного елементу може бути взятий елемент з довільними розмірами перерізу, наприклад $b \times h = 150 \times 300$ мм. Коефіцієнти K_{Δ} та K_h є коефіцієнтами переходу від еталонних розмірів до поточних (тих, що розглядаються). Вони визначаються з виразів:

$$K_{\Delta} = \frac{\delta}{\delta_{et}} \tag{4.11}$$

$$K_h = \frac{h}{h_{et}} \tag{4.12}$$

У виразах (4.11) та (4.12) через δ та δ_{et} позначені відповідно переміщення суцільних балок (без тріщин) з розмірами відповідно розглянутого елементу та еталонного.

Інший підхід до спрощення задачі отримання апроксимаційних залежностей полягає в наступному. Численними дослідженнями встановлено, що залежність взаємного зміщення берегів нормальної тріщини від висоти цієї тріщини підпорядковується закону квадратної параболи. З іншого боку відомо, що в згинальних елементах висота стиснутої зони менше *0.15h* (де h – повна висота перерізу) практично не зустрічається. Тому ми можемо отримати залежність величини взаємного зміщення берегів тріщини для значення $x_{crc} = 0.15h$, а далі застосувати квадратну залежність. Вид цієї залежності наведено на рис. 4.9 для елементу з перерізом 150х300 мм.

Чисельними дослідженнями встановлено також, що при $h_{crc}/h = 0.5$, значення Δ_{Mt} складає приблизно п’яту частину від значення при $h_{crc}/h = 0.85$ (див. рис. 4.9). Знаючи значення Δ_{Mt} в точках $h_{crc}/h = 0.5$ та $h_{crc}/h = 0.85$ не складно розрахувати коефіцієнти a та b квадратної залежності.

$$\Delta_{Mt} = a\left(\frac{h_{crc}}{h}\right)^2 + b\frac{h_{crc}}{h} \tag{4.13}$$

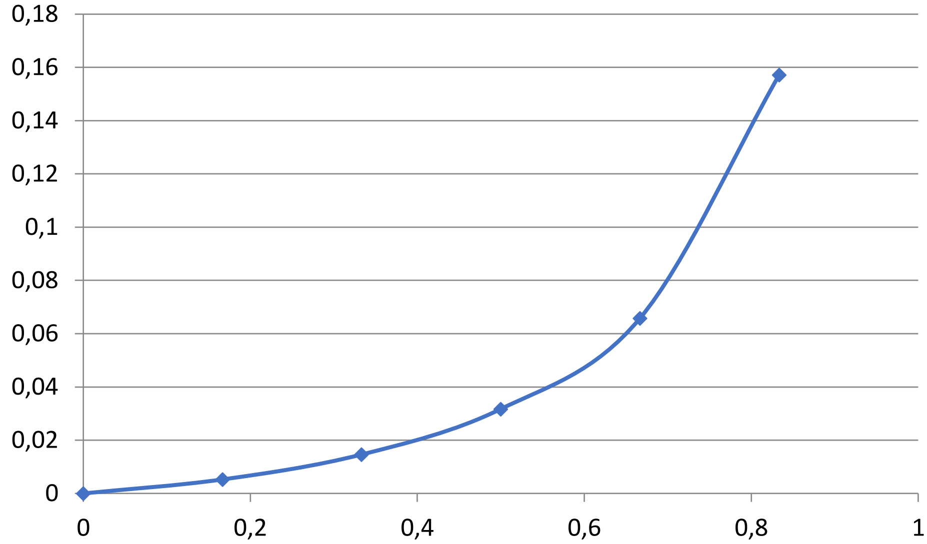


Рис. 4.9. Залежність взаємного зміщення берегів нормальної тріщини Δ_{Mt} (вертикальна вісь) від відносної висоти тріщини h_{crc}/h для балки $b \times h = 150 \times 300$ мм

Відомі умови для функції (4.12) будуть записані:

$$\text{при } \frac{h_{crc}}{h} = 0.85;\ \Delta_{Mt} = \Delta_{mt}^{et} \tag{4.14}$$

$$\text{при } \frac{h_{crc}}{h} = 0.5;\ \Delta_{Mt} = \Delta_{mt}^{et}/5 \tag{4.15}$$

З рис. 4.9 та виразу (4.13) видно, що якщо відома величина взаємного зміщення еталонного зразка при $h_{crc}/h = 0.85$ (h_{crc} – висота нормальної тріщини, дорівнює $h - x_{crc}$), то при будь-якому іншому значенні h_{crc} легко визначити взаємне зміщення за залежністю (4.13).

Значення еталонної величини Δ_{mt}^{et} в даному випадку слід визначати з апроксимаційної залежності:

$$\Delta_{mt}^{et} = f\left(\frac{b}{h}; \frac{l_{crc}}{h}\right) \qquad (4.16)$$

Яка більш достовірна, ніж залежність (4.9), оскільки тут фігурує ще й ширина перерізу елементу.

Для переходу до величини взаємного зміщення від еталонного до зразка реального розміру, слід використовувати формулу (4.10), де коефіцієнти K_Δ та K_h визначаються за (4.11) та (4.12).

Слід зазначити, що відносні величини були використані в роботі [3], де введено поняття середньої жорсткості. Схема розрахунку за [3] наведена на рис. 4.10.

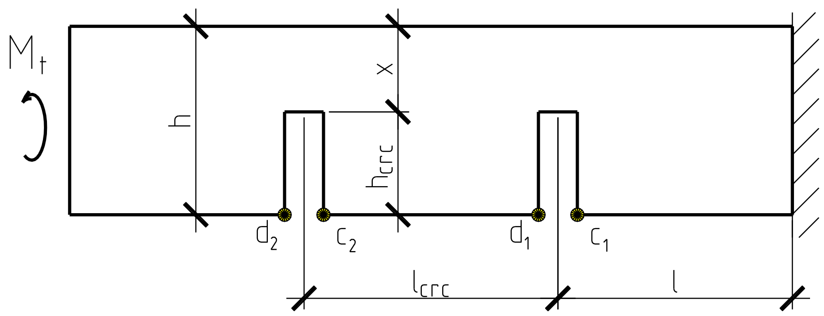


Рис. 4.10. Схема до визначення середньої жорсткості

При цьому, однак, визначаються не переміщення, а кут повороту, причому не безпосередньо в розглянутій тріщині (між точками c_1 та d_1 на рис. 4.10), а між точками c_1 та c_2. А кут повороту $\varphi_{c_1\_d_1}$ між точками c_1 та d_1 визначається як різниця між кутами $\varphi_{c_1\_c_2}$ та $\varphi_{d_1\_c_2}$, до того ж останній розраховується за формулами опору матеріалів. Таким чином, апроксимаційна залежність отримана для кута φ_{c_2}

$$\varphi_{c2} = \frac{M_t l_{crc}}{G \cdot J_m} \qquad (4.17)$$

де G – модуль зсуву матеріалу балки; J_m – середнє значення жорсткості на ділянці з нормальною тріщиною, яке визначається з виразу:

$$J_m = J_{tot}k + J_{crc}(1-k) \tag{4.18}$$

де J_{crc}, J_{tot} – відповідно момент інерції при крученні перерізу з висотою, що дорівнює висоті не тріснувшої зони над нормальною тріщиною, та перерізу з повною висотою елемента; $k < 1$ – коефіцієнт, отриманий з апроксимації даних чисельних розрахунків:

$$k = 0.062 + 0.047\frac{b}{h} + 0.776\frac{h_{crc}}{h} - 0.238\ln\left(\frac{h}{l_{crc}}\right). \tag{4.19}$$

Підсумовуючи різницю між двома підходами (запропонованими в цій дисертації та в [3]), відмітимо наступне. По перше, обчислення кутів повороту за (4.17…4.18) носить ту неточність, що цей кут не обчислюється безпосередньо в розглянутій тріщині, а є різницею між обчисленими за апроксимаційною формулою та кутом для цілого перерізу за відомими формулами опору матеріалів. І чим менше буде відстань між тріщинами, тим більшою буде помилка обчислень, отриманих за цією формулою. Це досить легко перевірити чисельними розрахунками із застосуванням об'ємних скінченних елементів. По друге, обчислюється не переміщення (яке і потрібне для визначення нагельних сил в поздовжній арматурі), а кут повороту. При цьому невідомо положення центра кручення, що не дає можливості правильно визначити шукане взаємне зміщення в тріщині.

З іншого боку, запропонована в цій дисертації методика також містить неточності через заміну апроксимаційної функції (4.8) функціями (4.9) та (4.13), з яких остання є більш точною, оскільки в ній присутні і ширина і висота перерізу елементу. Однак, формули (4.9) та (4.13) значно простіше отримати, ніж формулу (4.8). Якщо ж мова йде про розрахунок конкретного елементу, то формули (4.9) та (4.13) легко отримати і вони будуть практично точно відображати реальне переміщення в тріщині. Крім того, використання цих формул не потребує визначення центру кручення, оскільки визначається безпосердньо переміщення в тріщині.

Формули (4.9) та (4.13) слід отримувати не для кутових точок перерізу (точка O на рис. 4.11), а безпосередньо для точок розміщення арматури.

Це пов’язано із фактом, що при обчисленні взаємного зміщення берегів нормальної тріщини за данними чисельного розрахунку із застосуванням МСЕ або МГЕ, невідоме положення центру кручення. Це положення можна визначити з аналізу даних чисельного розрахунку, але і тоді його слід піддавати апроксимації. При відомому положенні центру кручення, якщо відомо переміщення точки O з радіусом до центру кручення R_0 завжди можна обчислити і переміщення точки, де знаходиться арматура із радіусом до центру кручення R_s (див. рис. 4.11).

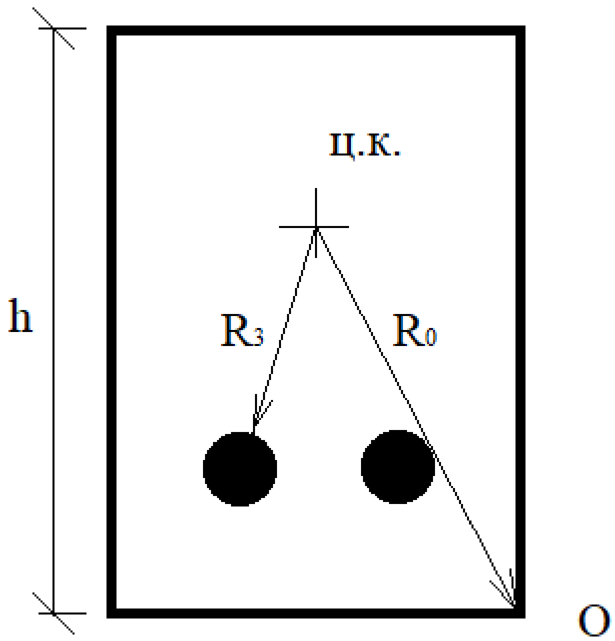


Рис 4.11. Схема для визначення точок, де необзідно обчислити взаємне зміщення

Після визначення взаємного зміщення берегів нормальної тріщини в точках розміщення поздовжньої арматури, нагельна сила в цій арматурі та крутильна жорсткість залізобетонного елементу з нормальними тріщинами може бути визначена за методикою [6, 148].

Створення бібліотеки апроксимаційних функцій (4.9) та (4.13) дозволяє суттєво спростити розв’язання багатьох задач визначення жорсткісних параметрів залізобетонних елементів з тріщинами, які можуть увійти як окремий блок в існуючі програмні комплекси. При розв’язанні конкретної задачі можна також отримати взаємне зміщення берегів нормальної тріщини безпосередньо в точках розміщення арматури з моделювання об’ємними скінченими елементами. При цьому результати розрахунку вже будуть не наближеними, а точними.

Крутильна жорсткість елементу з нормальними тріщинами може бути значно меншої меншою за жорсткість елементу без тріщин, і вона залежить як від відстані між тріщинами, висоти зони без тріщин, так і від діаметру поздовжньої арматури.

4.4. Розрахункова модель перехресно-балкової системи в *ANSYS 17.1*

Для виконання досліджень була прийнята універсальна програмна система скінченно-елементного аналізу, *ANSYS 17.1*.

При моделюванні перехресно-балкових систем використовувався програмний пакет *ANSYS Multiphysics* [59], який дозволяє розв’язувати широке коло задач в таких областях знань, як міцність, розповсюдження тепла, механіка рідини та газу, електроманетизм.

Програмний комплекс *ANSYS* поставчається із трьома різними інтерфейсами – класичним, *Workbench* та *AIM*. В даній роботі для дослідження роботи перехресно-балкових систем використовувався інтерфейс *Workbench* через його наочність та простоту для розуміння і застосування.

ANSYS Workbench являє собою єдину платформу, в яку інтегровані розрахункові додатки *ANSYS*. В ній забезпечуються двонаправлені параметричні зв’зяки з *CAD* системами, надаються інструменти для побудови сітки, керування багатодисциплінарним моделюванням та вбудовані інструменти оптимізації.

Нижче наведена методика створення твердотільної моделі перехресно-балкової залізобетонної системи, робота якої вивчалась експериментально, розрахункова схема та армування якої наведені на рис. 3.3, 3.4.

Моделювання в *ANSYS* було виконано із застосуванням об'ємних елементів, оскільки застосування стержневих скінченних елементів не дохволяє врахувати зміну жорсткості елемента при тріщиноутворенні. Далі наведено опис створення моделі залізобетонної перехресно-балкової системи в *ANSYS*, в якій бетон і арматура змодельовані роздільно з наступним накладенням обмежень, пов'язаних із сумісністю їх роботи.

Загальний вид проєкту в *ANSYS Workbench* представлений на рис. 4.12. В окремі компоненти системи винесені інженерні характеристики, які включають до себе фізичні властивості всіх використаних матеріалів, і геометрична модель, яка є загальною для залізобетонної перехресно-балкової системи.

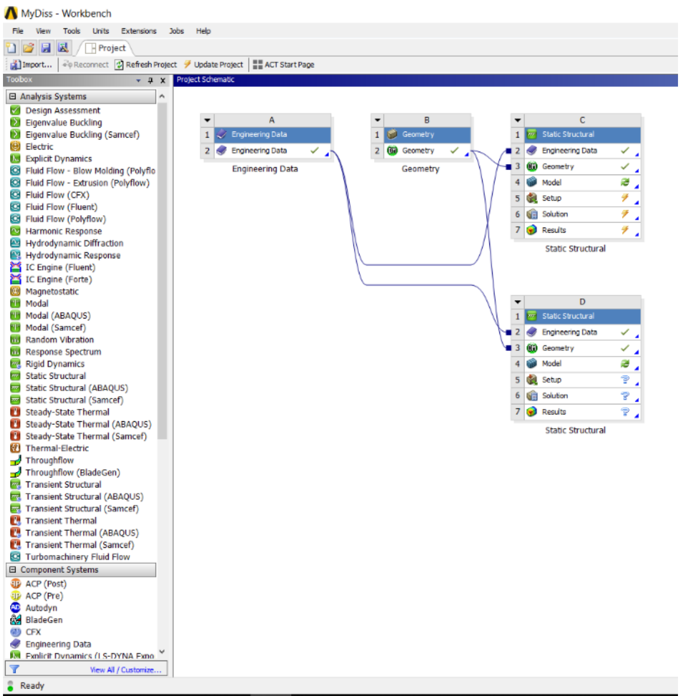


Рис. 4.12. Загальний вид проекту в *ANSYSWorkbench*

Фізичні характеристики матеріалів вводяться в компоненті *Engineering Data*. Необхідно створити два матеріали, котрі використовуватимуться в подальших розрахунках: *Plain Concrete* (звичайний бетон), з характеристиками:

$f_{ctk,0.95}$ = 2,5 МПа, f_{ck}= 20 МПа, E = 21000 МПа, μ = 0,2; *Structural Steel* (арматурна сталь), з характеристиками: f_{yk} = 400 МПа, $\sigma_{в}$ = 500 МПа, E_s = 210000 МПа, μ = 0,3.

Для побудови твердотільної моделі перехресно-балкової системи, в *CAD* системі *SpaceClaim,* виконується побудова її контуру (рис. 4.13), із використанням інструментів *Line* та *Rectangle* групи *Sketch*.

Для отримання об’ємної геометричної моделі застосовується команда *Pull* групи *Edit* за допомогою якої видавлюється контур перехресно-балкової системи на задану висоту – 120 мм. Після цього видаляється поверхня, що утворилась, яка не бере участі в подальших розрахунках (рис. 4.14).

Для розміщення арматурних стержнів в тілі бетону необхідно створити отвори. Для цього в торцевій грані однієї із балок за допомогою інструменту *Circle* будується коло діаметром 8 мм. Використовуючи інструмент *Move*, коло переноситься на його задану позицію. Наступним кроком коло видавлюється на повну довжину балки за допомогою команди *Pull*. Отриманий отвір копіюється за допомогою команди *Linear Pattern* на цю ж балку. Аналогічно будуються отвори в решті балок (рис. 4.15).

Готовій деталі надається ім’я Concrete для спрощения подальшої роботи з нею.

На наступному етапі моделюються арматурні стержні. Необхідно виділити всі кола, за допомогою яких були побудовані отвори в бетоні під арматуру. За допомогою команди Fill будуються поверхні за вибраними колами. Побудовані поверхні виділяються кожна окремо з використанням інструменту Pull, при вибраній опції I, та видавлюються вздовж відповідних балок.

Готовій деталі надається ім’я *Concrete* для спрощения подальшої роботи з нею.

На наступному етапі моделюються арматурні стержні. Необхідно виділити всі кола, за допомогою яких були побудовані отвори в бетоні під арматуру. За допомогою команди *Fill* будуються поверхні за вибраними колами.

Побудовані поверхні виділяються кожна окремо з використанням інструменту *Pull*, при вибраній опції *I*, та видавлюються вздовж відповідних балок.

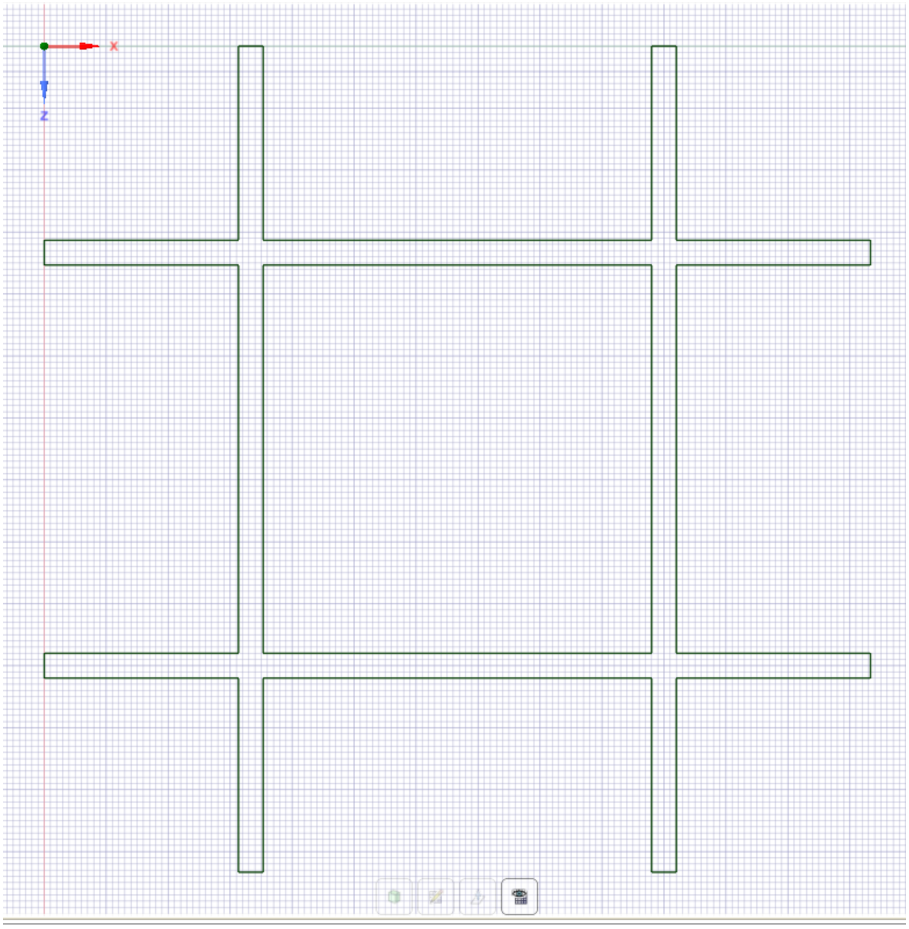


Рис. 4.13. Контур перехресно-балкової системи

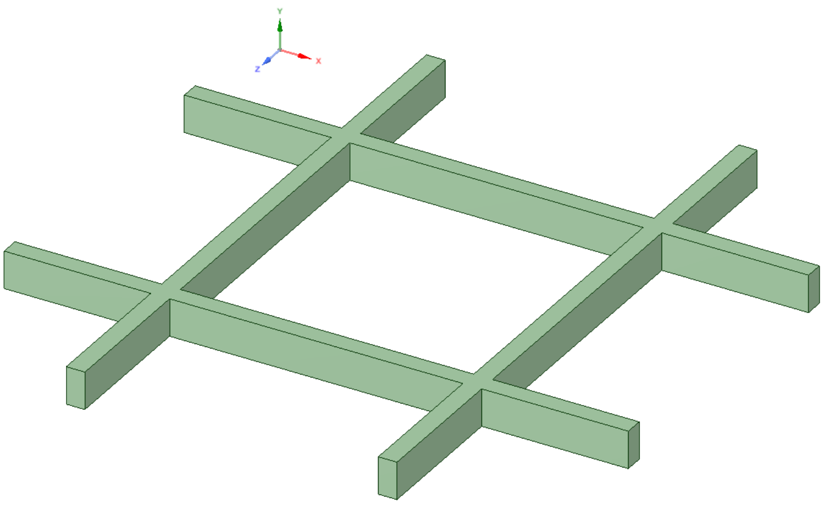


Рис. 4.14. Модель бетонної частини перехресно-балкової системи

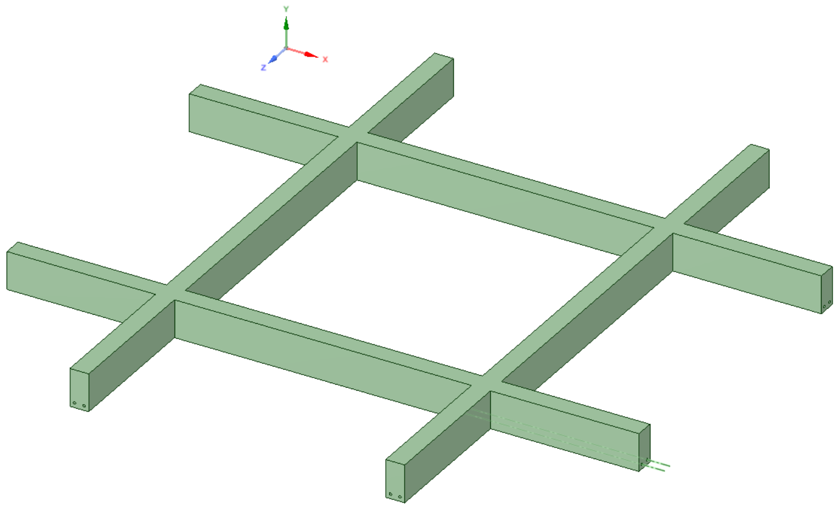


Рис. 4.15. Бетонна частина геометричної моделі перехресно-балкової системи

Арматурні стержні об’єднують в єдиний геометричний об’єкт командою *Combine*, вибираються елементи арматури для об’єднання в єдину частину геометричної моделі. По завершенню новій деталі надається ім’я *Rebar*.

За допомогою інструментів *Rectangle* та *Pull* моделюються пластинки розмірами 60х60х20 мм, що служать для передачі навантаження на перехресно-балкову систему, а також опорними зонами. Для відділення деталей від основної моделі, в дереві побудови моделі відключаються зміни бетонної частини балки, для цього в контекстному меню моделі бетону відмічається пункт *Lock*. Після створення, опорні пластинки перейменовуються в *Support*, а навантажувальні – в *Impactor*.

Отримана геометрична модель перехресно-балкової системи з арматурою, опорними майданчиками та навантажувальними майданчиками (рис. 4.16).

При закритті модуля *SpaceClaim* геометрична модель буде збережена автоматично.

При завантаженні модуля *Mechanical*, в першу чергу слід назначити елементам конструкції матеріали, характеристики яких раніше були створені в *Project Schematic* в компоненті *Engineering Data*. Для цього в дереві проєкту в гілці *Geometry* вибирається елемент *Concrete*, якому привласнюється матеріал

Plain Concrete. Для решти елементів геометричної моделі привласнюється матеріал *Structural Steel*.

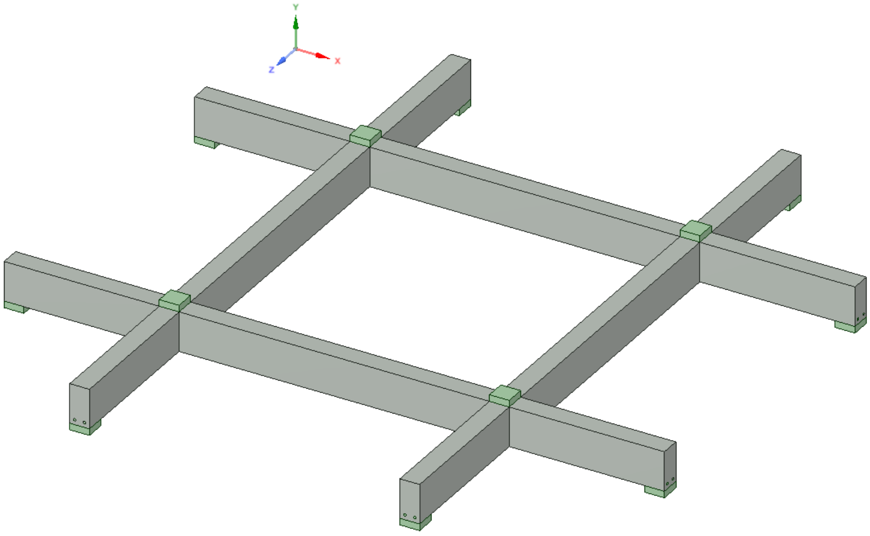


Рис. 4.16. Геометрична модель перехресно-балкової системи

В дереві проєкту в гілці *Connections* слід перевірити автоматично згенеровані контакти між елементами геометричної моделі. Поверхні дотичних елементів мають бути зв'язані між собою (*Bonded*). Після виділення всіх контактних пар, в пункті *Formulation* встановлюється параметр *MPC* (*Multi Point Constraints*).

Цей параметр в своєму формулюванні визначає з'єднані цільову та контактну поверхні за допомогою жорстких рівнянь обмеження з'єднань. Таким чином досягається зв'язність цільової та контактної поверхонь.

Метод *MPC* має наступні переваги:

– ступені свободи у вузлах на контактній та цільовій поверхнях прибираються рівняннями обмежень. Це зменшує розмір задачі;
– розрахунок контактної жорсткості не потрібен, оскільки жорстке з'єднання визначається рівняннями обмеження;
– враховуються поступальні та обертові ступені свободи;
– оскільки рівняння обмеження засновані на методі *MPC*, вони будуть оновлюватись при розрахунках з великими деформаціями.

Приклад контакту між опорою й тілом балки наведено на рис. 4.17.

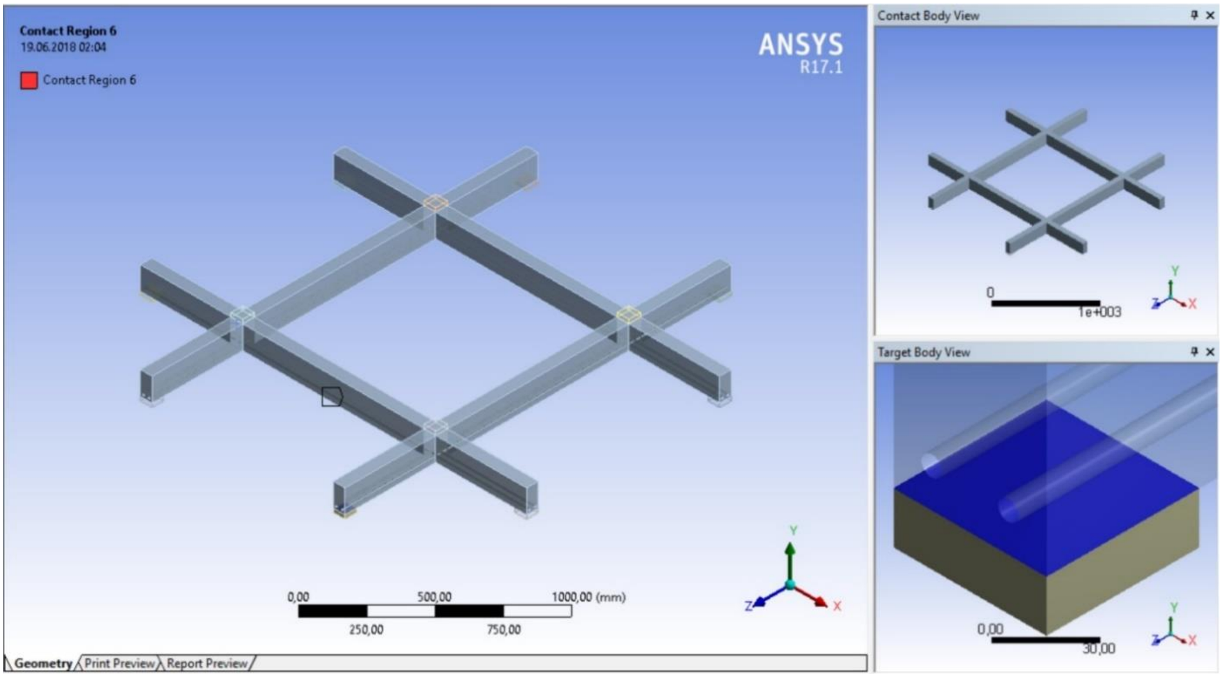


Рис. 4.17. Контакт між опорою і тілом балки

Наступним кроком в гілці *Mesh* задається розмір елементу, що дорівнює 15 мм та генерується сітка скінчених елементів. Сітка скінчених елементів наведена на рис. 4.18.

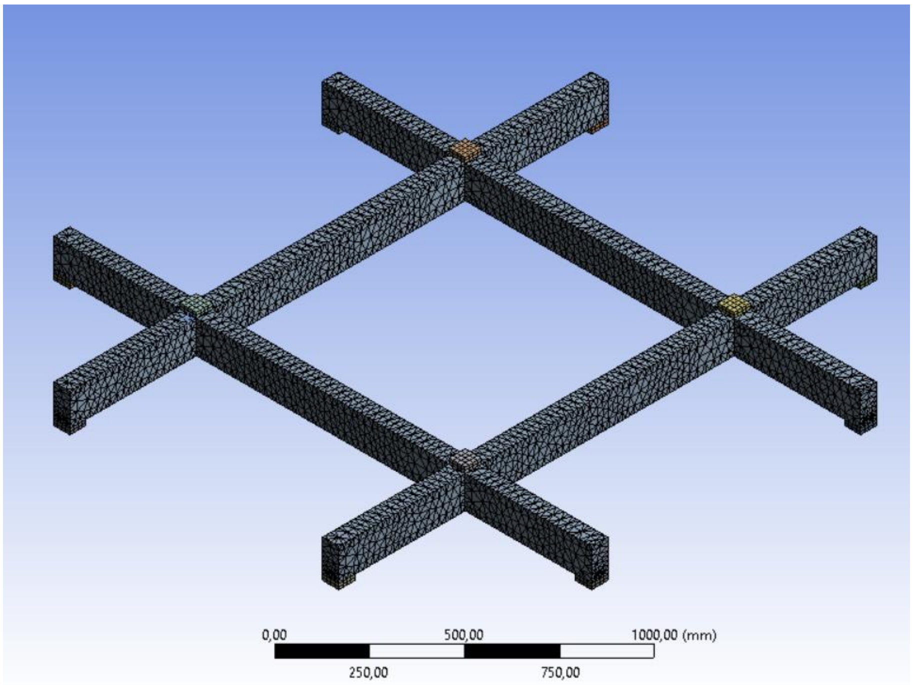


Рис. 4.18. Сітка скінчених елементів

В пункті *Analysis Settings* задаються 14 етапів навантаження. Встановлюється жорстке закладення (*Fixed Support*), шляхом послідовного вибору нижніх граней опорних пластинок. Навантаження прикладається у вигляді рівномірно розподіленого тиску на чотири верхні поверхні навантажувальних пластинок. Навантаження прикладається таким, що рівномірно збільшується за кроками навантаження, максимальна величина прикладеного навантаження становить 4,861 МПа (рис. 4.19).

В пункт *Solution* слід додати перелік результатів, які необхідно отримати по завершенні розрахунку: повні переміщення (*Total Deformations*), еквівалентні напруження за Мізесом (*Equivalent Stress*) та еквівалентні відносні деформації за Мізесом (*Equivalent Strain*), після чого виконується розрахунок.

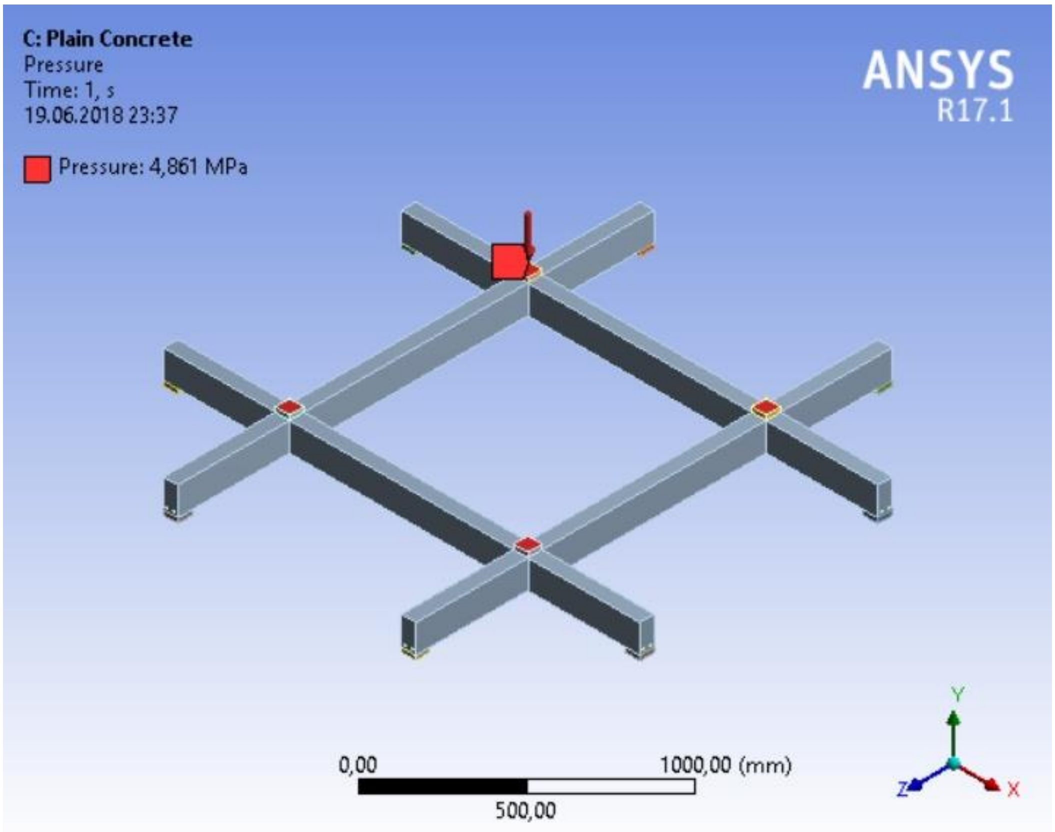


Рис. 4.19. Навантаження перехресно-балкової системи зосередженими силами в вузлах

Розрахунки виконувались у підпрограмі *Workbench*, в модулі *Static Structural*, що призначений для виконання статичного структурного аналізу, який дозволяє розрахувати переміщення, деформації, напруження, внутрішні зусилля, що виникають в конструкції під дією статичного навантаження.

Вибір типу об’ємних скінчених елементів, на які розбивається конструкція, відбувається автоматично елементами за замовчуванням. Так, для *ANSYS R17.1* такими елементами є *SOLID186*, тривимірні 20-вузлові твердотільні елементи вищого порядку, що проявляють квадратичну поведінку при зміщенні. Елементи визначаються 20-ма вузлами, що мають три ступені свободи на вузол: зміщення в напрямках осей *x, y, z*. Елементи підтримують пластичність, гіперпластичність, повзучість, жорсткість під напруженням, великі прогини та мають великі деформаційні можливості. Також володіють змішаним формулюванням для моделювання деформацій майже нестискуваних пружних матеріалів, а також повністю нестискуваних гіперпружних матеріалів.

Для описаної задачі цей елемент є досить точним способом моделювання напружено деформованого-стану залізобетонної перехресно-балкової системи, що зазнає згину з крученням.

4.5. Результати розрахунку перехресно-балкових систем методом скінчених елементів

Після виконання розрахунку у програмному комплексі *ANSYS R17.1* було отримано якісну та кількісну картину напружено-деформованого стану залізобетонної перехресно-балкової системи.

Програмний комплекс дозволяє отримати широкий спектр результатів механічного розрахунку задач. В нашому випадку було отримано деформовану схему, повні деформації, еквівалентні напруження та еквівалентні деформації залізобетонної перехресно-балкової системи. Ці результати наведені на рис. 4.20…4.23.

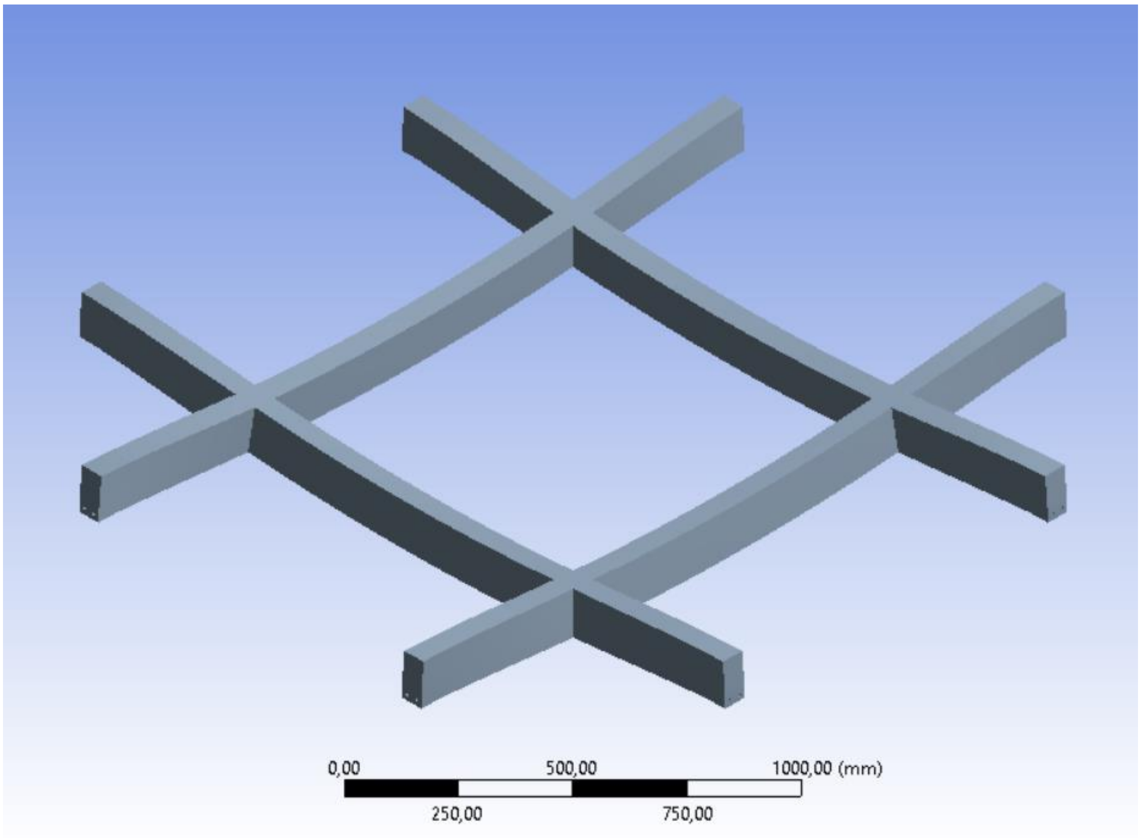


Рис. 4.20. Деформована схема залізобетонної перехресно-балкової системи

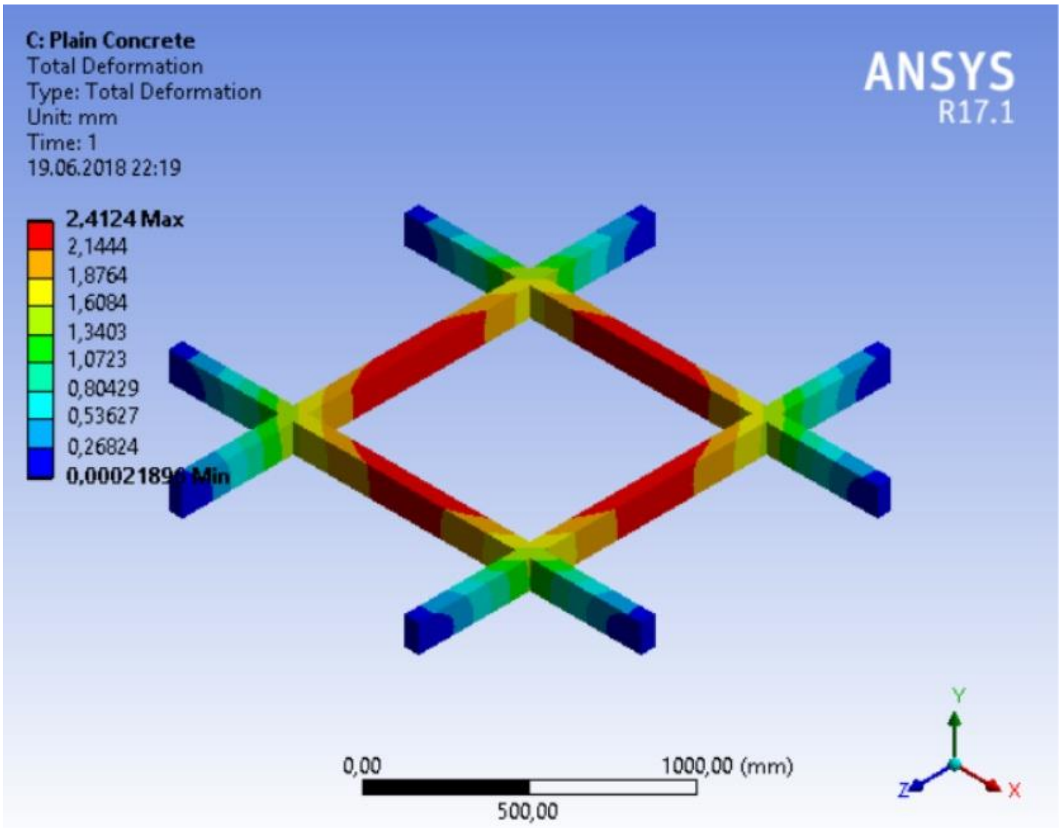


Рис. 4.21. Повні деформації залізобетонної перехресно-балкової системи

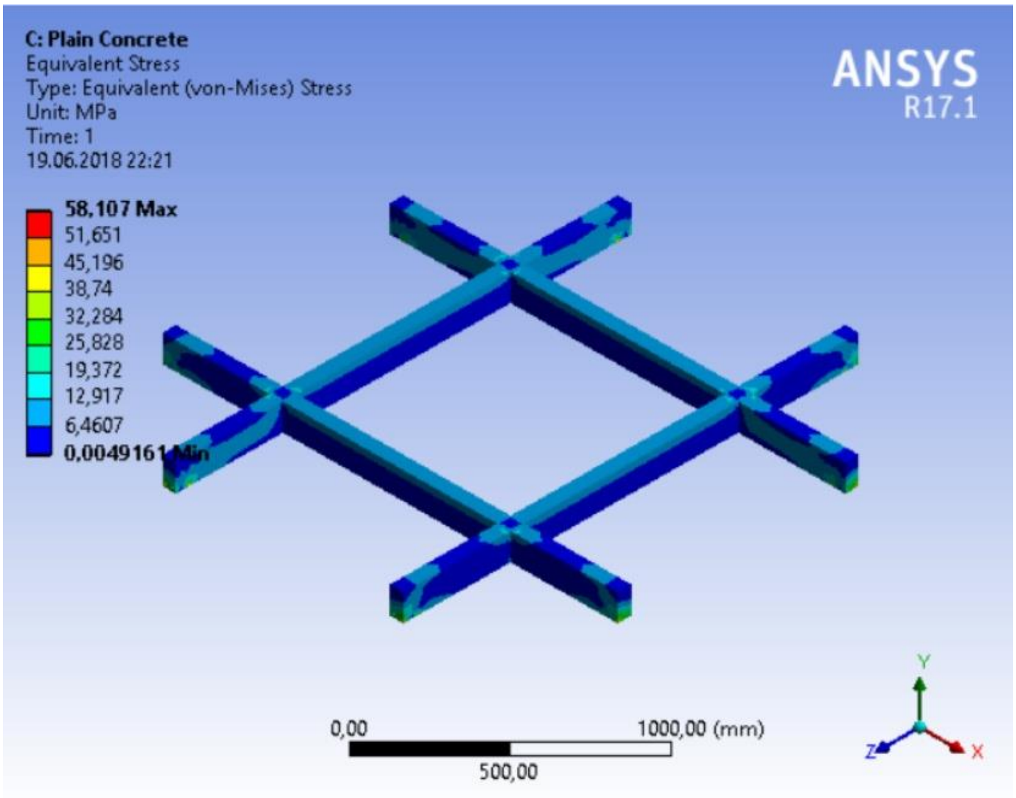


Рис. 4.22. Еквівалентні напруження в залізобетонній перехресно-балковій системі

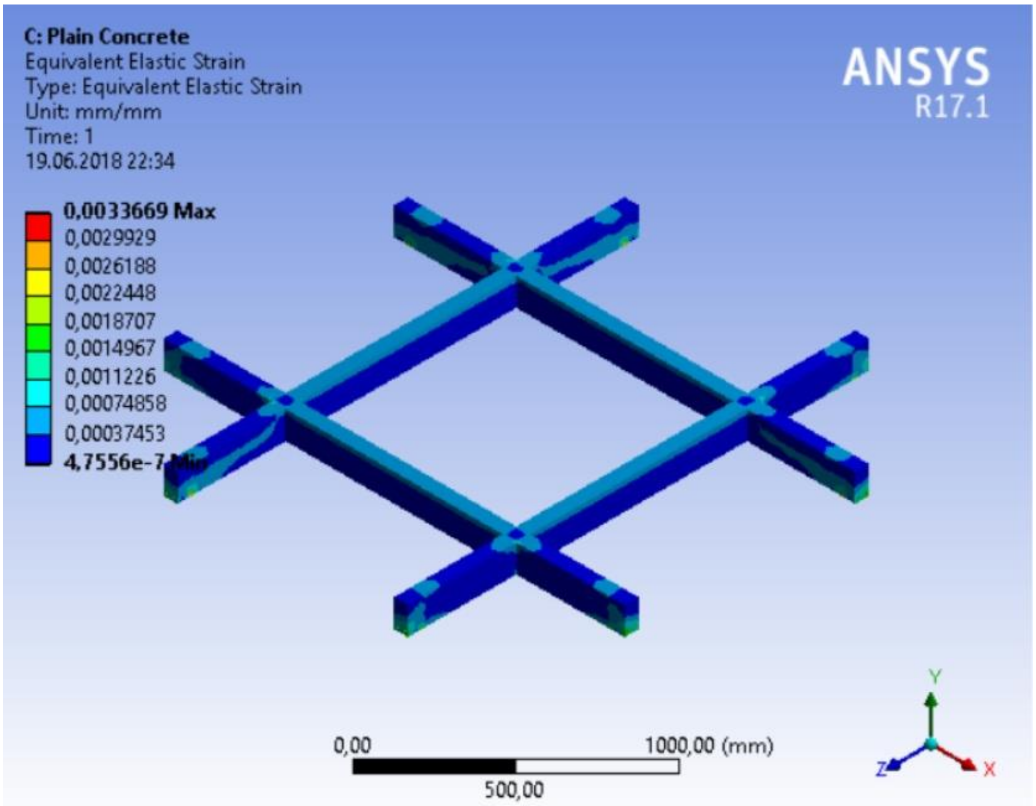


Рис. 4.23. Еквівалентні відносні деформації в залізобетонній перехресно-балковій системі

4.6. Порівняння результатів експериментальних досліджень з аналітичними та чисельними розрахунками

Напруження та прогини, визначені в ході проведення комплексних досліджень перехресно-балкової системи I серії, показаної на рис. 2.3, зведені в табл. 4.1. Відповідні значення для III серії наведені в табл. 4.2. Схема розміщення контрольних точок, в яких визначені напруження та прогини, в яких визначені напруження та прогини, показана на рис. 4.24. Результати, показані в табл. 4.1, відповідають навантаженню q = 35 кН/м^2, а в табл. 4.2 – навантаженню q = 22 кН/м^2, при якій в процесі випробувань почалось утворення тріщин.

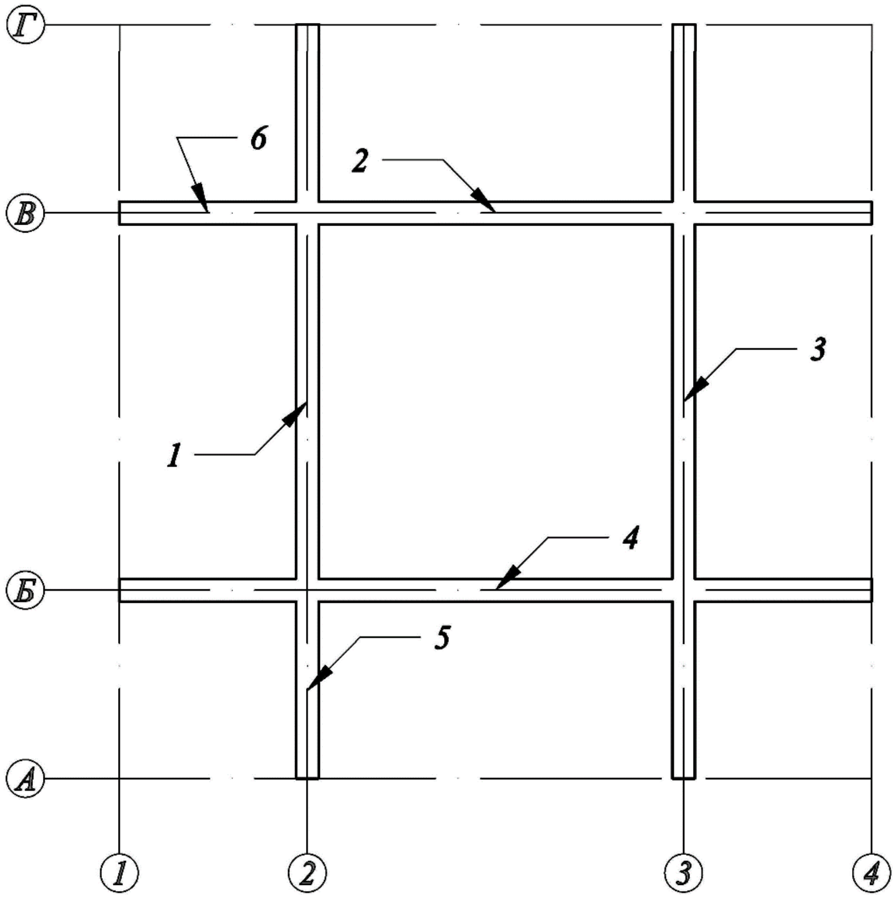


Рис. 4.24. Схема розміщення контрольних точок

Аналіз табл. 4.1 та 4.2 показує, що різниця між результатами розрахунків ЧА МГЕ та ANSYS R17.1 для залізобетонної перехресно-балкової системи складає до 9%. Різниця в результатах, отриманих з використанням ANSYS R17.1, та експериментальними даними складає до 17%. Розбіжність в результатах, отриманих за запропонованою розрахунковою моделлю та експериментальними даними складає до 7%.

Таким чином запропонована розрахункова модель досить точно відображає картину напружено-деформованого стану залізобетонних перехресно-балкових систем. Розбіжність у результатах розрахунку перехресно-балкових систем раніше розглянутими методами та з використанням моделі деформування і чисельно-аналітичного методу граничних елементів пояснюється уточненням безпосередньо розрахункової моделі та врахуванням кручення і тріщиноутворення у залізобетонних елементах перехресно-балкових систем.

Таблиця 4.1

Зведена таблиця напружень і прогинів, I серія перехресно-балкових систем

№№ точок	Експеримент	ЧА МГЕ		ANSYS R17.1	
	Прогини, мм	Напруження, МПа	Прогини, мм	Напряжения, МПа	Прогини, мм
1	8,357	16,699	7,736	15,277	7,024
2	8,217	16,699	7,736	15,277	7,024
3	8,287	16,699	7,736	15,277	7,024
4	8,147	16,699	7,736	15,277	7,024
5	2,386	22,021	2,259	20,195	7,027
6	2,406	22,021	2,259	20,195	7,027

Таблиця 4.2

Зведена таблиця напружень та прогинів, III серія перехресно-балкових систем

№№ точок	Експеримент	ЧА МГЕ		ANSYS R17.1	
	Прогини, мм	Напруження, МПа	Прогини, мм	Напруження, МПа	Прогини, мм
1	5,219	15,916	4,832	13,875	7,023
2	5,308	15,916	4,832	13,875	7,023
3	5,175	15,916	4,832	13,875	7,023
4	5,219	15,916	4,832	13,875	7,023
5	1,457	20,992	1,367	18,751	7,027
6	1,507	20,992	1,367	18,751	7,027

4.7. Висновки за розділом

1. Вдосконалені пропозиції з врахування процесів тріщиноутворення під час розрахунку залізобетонних елементів, що зазнають згину з крученням.

2. Розроблена комп’ютерна програма, що реалізує запропоновану розрахункову модель деформування залізобетонних перехресно-балкових систем.

3. Під час розрахунку чисельно-аналітичним методом граничних елементів врахована згинальна та крутильна жорсткості.

4. Розроблена модель залізобетонної перехресно-балкової системи в ANSYS R17.1 із застосуванням об’ємних елементів з метою врахування кручення та тріщиноутворення під час розрахунку перехресно-балкової системи.

5. Різниця між результатами розрахунків за запропонованою методикою та ANSYS R17.1 для залізобетонної перехресно-балкової системи складає до 9%.

6. Відмінність в результатах, отриманих з використанням ANSYS R17.1, та експериментальними даними, складає до 17%.

7. Розбіжності в результатах, отриманих за запропонованою розрахунковою моделлю, та експериментальними даними складають до 7%.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

1. Запропонована методика застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів до розрахунку перехресно-балкових систем, що легко піддається алгоритмізації, може бути адаптованою для розрахунку просторових та неортогональних систем, дозволяє використовувати будь-які моделі деформування та тріщиноутворення у залізобетонних стержневих елементів.

2. Створена розрахункова модель деформування залізобетонних перехресно-балкових систем з врахуванням тріщиноутворення на основі чисельно-аналітичного методу граничних елементів, яка дозволяє одночасно спростити розрахунок перехресно-балкових систем та підвищити його точність.

3. Вдосконалені пропозиції з врахування процесів тріщиноутворення під час розрахунку залізобетонних елементів, що зазнають згину з крученням. При цьому розроблена методика врахування згинальної та крутильної жорсткостей. Запропонована методика включає отримання інженерних формул, які з високою точністю відображають реальне переміщення в тріщині. Використання запропонованих залежностей не потребує визначення центру кручення, оскільки визначається безпосердньо переміщення в тріщині.

4. Проведені серії експериментальних досліджень конструкцій залізобетонних перехресно-балкових систем при дії симетричного та асиметричного навантажень з метою апробації запропонованої методики розрахунку перехресно-балкових систем. Досліджено картину тріщиноутворення та встановлено, що утворення тріщин в розглянутих конструкціях починалося з навантаження величиною 0,6 від руйнуючого.

5. Розроблена комп’ютерна програма, що реалізує запропоновану розрахункову модель деформування залізобетонних перехресно-балкових систем, дозволяє розраховувати залізобетонні перехресно-балкові системи довільної конфігурації з врахуванням запропонованої моделі деформування залізобетонних елементів та тріщиноутворення у них.

6. Різниця між результатами розрахунків за запропонованою методикою та ANSYS R17.1 для залізобетонної перехресно-балкової системи складає до 9%.

Відмінність в рузультатах, отриманих з використанням ANSYS R17.1, та експериментальними даними, складає до 17%. Розбіжності в результатах, отриманих за запропонованою розрахунковою моделлю, та експериментальними даними складає до 7%.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азизов Т.Н. Влияние кручения на работу сборных и монолитных плит / Т.Н. Азизов. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2007. – №26. – С. 3–9.

2. Азізов Т.Н. До розрахунку залізобетонних плит за допомогою стрижневої апроксимації / Т.Н. Азізов, Д.В. Кочкарьов. // Вісник національного університету водного господарства та природокористування. – 2019. – №4 (88). – С. 137–146.

3. Азизов Т.Н жесткость и прочность при кручении железобетонных стержней с нормальными трещинами / Т.Н. Азизов, Д.В. Кочкарев // Sciences of Europe. – 2020. – Vol 1, № 47. – С. 27-36.

4. Азизов, Т.Н. Использование аппроксимационных конечных элементов в расчетах конструкций / Т.Н. Азизов // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2010. – № 39, частина 1. – С. 4-9.

5. Азизов Т.Н. К расчету кесонных перекрытий с учетом пространственной работы / Т.Н. Азизов, Л.Г. Савченко. // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2007. – №15. – С. 90–95.

6. Азизов Т.Н. Крутильная жесткость железобетонных двутавровых балок с многорядным армированием при наличии нормальных трещин / Т.Н. Азизов, О.М. Орлова, Е.В. Нагайчук // Sciences of Europe. – 2019. – Vol 1, № 36. – Р. 35-39.

7. Азізов Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами / Т.Н. Азізов. // Дороги і мости. Збірник наукових праць.. – 2007. – №7. – С. 3–8.

8. Азизов Т. Н. Пространственная работа железобетонных перекрытий. Теория и методы расчета: дис. докт. техн. наук: 05.23.01 / Азизов Т.Н. – Полтава, 2006. – 406 с.

9. Азизов Т. Н. Прочность при кручении железобетонных элементов прямоугольного сечения с нормальными трещинами / Т. Н. Азизов, Н. Н.

Срибняк. // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2008. – №17. – С. 100–104.

10. Азизов Т.Н. Расчет балочных клеток при локальных нагрузках / Т.Н. Азизов. // Современные строительные конструкции из металла и древесины. Сборник научных трудов. – 2007. – №1. – С. 4–10.

11. Азизов Т.Н. Расчет железобетонных плит методом стержневой аппроксимации / Т.Н. Азизов. // Sciences of Europe. – 2019. – №45. – С. 3–7.

12. Азизов Т.Н. Расчет железобетонных перекрытий и пролетных строений мостов / Т.Н. Азизов, А.Я. Барашиков, В.С. Дорофеев. – Одесса, 2009. – 193 с.

13. Азизов Т.Н. Расчет металлических балочных клеток с учетом пространственной работы / Т.Н. Азизов, А.М. Гедзик. // Современные металлические и деревянные конструкции. Сборник трудов междунарожного симпозиума. – Брест, 2009. – С. 3–7.

14. Азизов Т.Н. Учет нелинейных свойств бетона при кручении железобетонных стержневых элементов // Sciences of Europa. – 2019. – № 35. – С. 19-22.

15. Азизов Т.Н. Экспериментальная методика определения крутильной жесткости элементов сборного железобетонного перекрытия с нормальными трещинами / Т.Н. Азизов, Н.Н. Голоднова. // Бетон и железобетон в Украине. – 2008. – №6. – С. 16–19.

16. Аргирис Дж. Матричная теория статики конструкций. Современные методы расчета статически неопределимых систем / Дж. Аргирис. – Ленинград: Судпромгиз, 1961. – 293 с.

17. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц / Дж. Аргирис. – Москва: Стройиздат, 1968. – 241 с.

18. Арясов Г.П. Свободные колебания перекрестных балок и вынужденные колебания при действии повторной прерывной нагрузки : автореф.

дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 01.02.03 "Строительная механика" / Арясов Г.П. – Днепропетровск, 1979. – 22 с.

19. Базоев О.К. Прочность приопорных участков железобетонных балок прямоугольного сечения, испытывающих интенсивное кручение: дис. канд. техн. наук: 05.23.01 / Базоев О.К. – Москва, 1983. – 264 с.

20. Байков В.Н. Влияние ядра сечения на деформативность железобетонного стержня прямоугольного поперечного сечения при кручении / В.Н. Байков, Э.Г. Елагин, В.А. Вернигор, А.И. Туров // Сопротивление железобетонных элементов силовым воздействиям – Ростов-на-Дону: РИСИ, 1985. – С. 42–48.

21. Байков В.Н. Железобетонные конструкции / В.Н. Байков, Э.Е. Сигалов. – Москва: Стройиздат, 1991. – 767 с.

22. Байков В.Н. Исследование железобетонных элементов, подверженных изгибу и кручению с учетом снижения предела текучести сложно напряженной арматуры / В.Н. Байков. // Известия вузов, разд. Строительство и архитектура. – 1975. – №1. – С. 11–17.

23. Байков В.Н. Исследование несущей способности железобетонных элементов прямоугольного сечения при совместном действии изгиба и кручения / В.Н. Байков, В.И. Фомичев. // Изв. вузов. Сер. строительство и архитектура. – 1975. – №2. – С. 19–25.

24. Бамбура А.М. Визначення ширини розкриття тріщин в залізобетонних конструкціях згідно з новими нормативними документами України / А.М. Бамбура, І.Р. Сазонова, Л.Г. Канюка. // Строительство. Материаловедение. Машиностроение.. – 2011. – №61. – С. 28–32.

25. Бамбура А.Н. Диаграмма «напряжения-деформации» для бетона при центральном сжатии / А.Н. Бамбура // Сб. «Вопросы, прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона» / А.Н. Бамбура. – Ростов-на-Дону: РИСИ, 1980. – С. 19–22.

26. Бамбура А.М. До аналітичного описання діаграми механічного стану бетону при одноразовому короткочасному деформуванні / А.Н. Бамбура //

Будівельні конструкції: Збірник наукових праць / А.Н. Бамбура. – К.: НДІБК, 2002. – С. 31–34.

27. Бамбура А.Н. К оценке прочности железобетонных конструкций на основе деформационного подхода и реальных диаграмм деформирования бетона и арматуры / А.Н. Бамбура. // Бетон на рубеже третьего тысячелетия: Материалы. – 2001. – С. 750–757.

28. Бамбура А.Н. К построению деформационной теории железобетона стержневых систем на экспериментальной основе / А.Н. Бамбура, А.Б. Гурковский. // Будівельні конструкції. – 2003. – №59. – С. 121–300.

29. Бамбура А.Н. Развитие методов оценки напряженно-деформированного состояния и несущей способности железобетонных конструкций на основе реальных диаграмм деформирования материалов / А.Н. Бамбура // Сборник тезисов первой Всеукраинской научно–техн. конф / А.Н. Бамбура. – К., 1996. – С. 36–39.

30. Бегун Г.Б. О распределении усилий в пространственных стержневых покрытиях / Г.Б. Бегун, В.И. Трофимов. // Строительная механика и расчет сооружений. – 1968. – №3.

31. Блейх Ф. Уравнения в конечных разностях статики сооружений / Ф. Блейх, Е. Мелан. – Харьков: ГНТИ Украины, 1936. – 380 с.

32. Бовин В.А. Разностно-вариационные методы строительной механики / В.А. Бовин. – Киев: Госстройиздат УССР, 1963. – 398 с.

33. Босаков С.В. Расчет системы перекрестных балок на двухслойном упругом основании / С.В. Босаков, Я.Д. Семенюк. // Вестник Брестского политехнического института. – 20000. – №1. – С. 14–16.

34. Босаков С.В. Расчет системы перекрестных балок на винклеровском основании методом перемещений с применением прикладного пакета "MATHEMATICA" / С.В. Босаков, О.В. Козунова // Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР) : сборник статей III Международной научно-технической конференции, Брест, 29–30 марта 2019

года / Министерство образования Республики Беларусь, Брестский государственный технический университет, Строительный факультет, ООО "Лира САПР", ООО "ПСС-SOFISTIK", ОДО "БрестКАД", ООО "Проект-наука" ; редкол.: Н. Н. Шалобыта [и др.]. – Брест: БрГТУ, 2019. – С. 16–22. – Библиогр.: с. 22 (9 назв.).

35. Босаков С.В. Расчет системы перекрестных балок на упругом клиновидном основании / С.В. Босаков, С.Д. Семенюк. // Материалы, технологии, инструменты. – 2000. – №5. – С. 17–20.

36. Бубнов И.Г. Строительная механика корабля. В 2-х частях / И.Г. Бубнов. – Санкт-Петербург: Тип. Морского министерства, 1912-1914.

37. Бурлаченко П.И. Экспериметальное исследование влияния сопротивления бетона сжатию на прочность железобетонных балок, работающих на изгиб с кручением: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.23.01 / Бурлаченко П.И. – Москва, 1959. – 20 с.

38. Вайнберг Д.В. Расчет пространственных рам / Д.В. Вайнберг, В.Г. Чудновский. – Киев: Госстройиздат УССР, 1964. – 308 с.

39. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – Москва: Мир, 1984. – 428 с.

40. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности по методу предельного равновесия / А. А. Гвоздев. – Москва: Стройиздат, 1949. – 279 с.

41. Голоскоков Д.П. Численно-аналитические методы расчета упругих тонкостенных конструкций нерегулярной структуры / Д.П. Голоскоков. – Санкт-Петербург: Изд-во А. Кардакова, 2006. – 271 с.

42. Горнов В.Н. Исследование прочности и жёсткости сборных железобетонных перекрытий из лотковых настилов // Материалы и конструкции в современной архитектуре. – М.: Стройиздат, 1950.

43. Григорьева Л.К. Исследование напряженно-деформированного состояния радиально расположенных перекрестных балок, сопряженных в одном узле / Л.К. Григорьева, М.Х. Хмайдан, В.Г. Меликова, Н.Н. Демидов. // Молодая наука. – 2017. – С. 231–237.

44. Дащенко А.Ф. Численно–аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. – Одесса: ВМВ, 2010. – В 2–х томах. – Т.1. – 416 с. – Т.2. – 512 с.

45. Демидов Н.Н. Анализ работы перекрестных балок на прямоугольных планах при различных соотношениях сторон / Н.Н. Демидов, О.Н. Ракитова. // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – №3. – С. 7–8.

46. Демидов Н. Н. Напряженно-деформированное состояние радиально расположенных перекрестных балок, сопряженных в одном центральном узле / Н. Н. Демидов. // Промышленное и гражданское строительство. – 2017. – №8. – С. 78–81.

47. Демидов Н.Н. Оптимальное проектирование перекрытий из перекрестных балок в условиях пониженной строительной высоты. / Н.Н. Демидов, И.Н. Меликова. // Вестник Московского государственного открытого университета. – 2012. – №3. – С. 59–62.

48. Демидов Н. Н. Особенности проектирования конструктивно нелинейных ортогонально перекрестных конструкций для зданий на эллиптическом плане / Н. Н. Демидов, И. Н. Меликова, О. Г. Ракитова. // Вестник Московского государственного открытого университета. – 2011. – №1. – С. 11–16.

49. Демидов Н.Н. Применение перекрестных балок при реконструкции перекрытий / Н.Н. Демидов, И.Н. Меликова, О.Н. Ракитова. // Промышленное и гражданское строительство. – 2011. – №3. – С. 51–54.

50. Демидов Н.Н. Применение предварительно напряженных перекрестных балок двух направлений из стальных прокатных двутавров / Н.Н. Демидов. // Промышленное и гражданское строительство. – 2016. – №21. – С. 81–84.

51. Динкевич С.З. Расчет циклических конструкций. Спектральный метод / С.З. Динкевич. – М.: Стройиздат, 1977. – 128 с.

52. Дроздов П.Ф. Конструирование и расчёт несущих систем многоэтажных зданий и их элементов. – М.: Стройиздат, 1977. – 223 с.

53. ДБН Б В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 73 с.

54. ДСТУ Б В.2.6-156:2010 Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування. – К.: Мінрегіонбуд України, 2010. – 127 с.

55. ДСТУ Б В.2.7-214:2009 Бетони. Методи визначення міцності за контрольними зразками. – К.: Мінрегіонбуд України, 2010. – 43 с.

56. ДСТУ Б В.2.7-217:2009 Будівельні матеріали. Бетони. Методи визначення призмової міцності, модуля пружності і коефіцієнта Пуассона. – К.: Мінрегіонбуд України, 2010. – 20 с.

57. ДСТУ 3760:2006 Прокат арматурний для залізобетонних конструкцій. Загальні технічні умови. – К.: Держспоживстандарт України, 2007. – 28 с.

58. Елагин Э.Г. Исследование работы железобетонных элементов кольцевого сечения с напрягаемой и ненапрягаемой арматурой при совместном действии изгибающего и крутящего моментов / Э. Г. Елагин // Влияние скорости нагружения, гибкости и крутящих моментов на прочность железобетонных конструкций / Э. Г. Елагин. – М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1970. – С. 196–236.

59. Жидков А.В. Применение системы ANSYS к решению задач геометрического и конечно-элементного моделирования. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Информационные системы в математике и механике» / А.В. Жидков. – Нижний Новгород, 2006. – 115 с.

60. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 542 с.

61. Калинин А.А. Расчет пространственных шарнирно-стержневых перекрестных систем методом перемещений / А.А. Калинин, Ю.Н. Бахтин // Вопросы исследования и применения в строительстве эффективных материалов и конструкций / А. А. Калинин, Ю.Н. Бахтин. – Волгоград, 1972.

62. Карабанов Б.В. Нелинейный расчет сборно-монолитных железобетонных перекрытий // Бетон и железобетон. – 2001. – №6. – С. 14–18.

63. Карпенко Н.И. Деформации железобетонных трубчатых элементов с трещинами при изгибе с кручением / Н.И. Карпенко, Э.Г. Елагин // Прочность и жесткость железобетонных конструкций / Н.И. Карпенко, Э.Г. Елагин. – М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1971. – С. 29–48.

64. Карпенко Н.И. Деформации железобетонных трубчатых элементов, подвергнутых кручению после образования трещин / Н.И. Карпенко, Э.Г. Елагин. // Бетон и железобетон. – 1970. – №3. – С. 3–12.

65. Карпенко Н.И. Жесткость и трещиностойкость элементов при совместном действии изгиба и кручения / Н.И. Карпенко, Т.П. Чистова // Предельные состояния элементов железобетонных конструкций / Н.И. Карпенко, Т.П. Чистова. – М.: Стройиздат, 1976. – С. 154–169.

66. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. / Н.И. Карпенко; – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.

67. Касаев Д.Х. Прочность бетонных и трещиностойкость железобетонных элементов прямоугольного сечения при кручении и изгибе с кручением / Д.Х. Касаев // Бетон и железобетон в третьем тысячелетии / Д.Х. Касаев. – Ростов-на-Дону, 2000. – С. 164–171.

68. Касаев Д.Х. Прочность элементов кольцевого сечения при совместном действии изгибающего и крутящего моментов / Д.Х. Касаев. // Бетон и железобетон. – 1986. – №8. – С. 25–26.

69. Касаев Д.Х. Прочность элементов прямоугольного сечения при кручении / Д.Х. Касаев. // Бетон и железобетон. – 1987. – №12. – С. 23.

70. Ковров А.В. Напряженно-деформированное состояние железобетонных пространственных рамных конструкций / А.В. Ковров, А.М. Кушнир, А.В. Ковтуненко, Н.К. Высочан. – Одесса: ОГАСА, 2015. – 214 с.

71. Колчунов В.И. Расчетная модель силового сопротивления железобетонных конструкций на кручение с изгибом / В.И. Колчунов, Н.В. Клюева, Г.А. Сафонов. // «Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения». Материалы Международных академических чтений. – 2005. – С. 95–111.

72. Колчунов В.И. Сложное сопротивление железобетонных конструкций на кручение с изгибом / В.И. Колчунов, Н.В. Клюева, Г.А. Сафонов. // Вестник центрального регионального отделения РААСН. – 2005. – №4. – С. 113–124.

73. Коржов О.В. Несущая способность и деформативность податливых узловых сопряжений стальных перекрестных балок: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.23.01 "Строительные конструкции, здания и сооружения" / Коржов О.В. – Москва, 2011. – 25 с.

74. Коуэн Г.Д. Кручение в обычном и предварительно напряженном железобетоне / Г.Д. Коуэн. – М.: Стройиздат, 1972. – 104 с.

75. Кочкарьов Д.В. Визначення ширини розкриття тріщин у центрально-розтягнутих залізобетонних елементах за багаторівневого процесу утворення тріщин / Д.В. Кочкарьов. // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2014. – №28. – С. 228–236.

76. Кочкарьов Д.В. Інженерні методи розрахунку залізобетонних статично невизначних стержневих систем / Д.В. Кочкарьов. // Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту. – 2017. – №170.

77. Кочкарьов Д.В. Лінеаризація параметрів прогинів згинальних залізобетонних елементів на основі реальних діаграм деформування матеріалів / Д.В. Кочкарьов. // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2015. – №30. – С. 166–173.

78. Кочкарьов Д.В. Нові підходи до розрахунку згинальних залізобетонних елементів за міцністю, жорсткістю та тріщиностійкістю / Д.В. Кочкарьов, В.І. Бабич. // Будівельні конструкції. – 2013. – №78. – С. 572–579.

79. Курдюмов А.А. К вопросу о расчете перекрытий, подкрепленных несколькими перекрестными связями / А.А. Курдюмов. // Сб. трудов ЛКИ. – 1955. – №15. – С. 12–25.

80. Кутуков Б.Н. Некоторые задачи статического и динамического расчета регулярных систем / Б. Н. Кутуков. // Расчет пространственных конструкций. – 1958. – №4. – С. 225–238.

81. Лантух-Лященко А.И. Развитие дискретно-континуальных методов расчета комбинированных систем: Автореф. дисс. … докт. техн. наук: 05.23.17/ КИСИ. – К., 1992. – 30 с.

82. Лессиг Н.Н. Исследование случаев разрушения по бетону железобетонных элементов прямоугольного сечения, работающих на изгиб с кручением / Н.Н. Лессиг. // Труды НИИЖБ. – 1961. – №23. – С. 223–273.

83. Лессиг Н.Н. Определение несущей способности железобетонных элементов прямоугольного сечения, работающих на изгиб с кручением / Н. Н. Лессиг. // Сб. тр. НИИЖБ. – 1959. – №5. – С. 3–28.

84. Лессиг Н.Н. Теоретические и экспериментальные исследования железобетонных балок, подверженных совместному изгибу и кручению / Н.Н. Лессиг // Расчет и конструирование железобетонных конструкций / Н.Н. Лессиг. – М.: Госстройиздат, 1958. – С. 73–86.

85. Лившиц И.Е. Особенности расчета стержневых пространственных конструкций / И.Е. Лившиц. – Л.: Стройиздат, 1968. – 240 с.

86. Лялин И.М. Экспериментальное исследование работы железобетонных балок прямоугольного сечения, подверженных совместному действию поперечной силы, изгибающего и крутящего моментов / И. М. Лялин. // Исследование прочности элементов железобетонных конструкций. – 1959. – №5.

87. Марутян А.С. Оптимизация минимальных высот стропильных и перекрестных стальных ферм, включая типа "Пятигорск" / А.С. Марутян. // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – №2. – С. 60–66.

88. Марков А.А. Прогибы и частоты собственных колебаний систем перекрестных балок на прямоугольном плане в зависимости от схемы опирания / А.А. Марков, А.В. Турков. // Промышленное и гражданское строительство. – 2014. – №10. – С. 27–29.

89. Маттес Н.В, Расчет судовых перекрытий [Текст] / Тезисы к дисс. инж. Н.В. Маттес. – 1940. – 4 с.

90. Минцковский М.Ш. Перекрестные фермы: дис. канд. техн. наук / Минцковский М.Ш. – К., 1950. – 144 с.

91. Мурашев В.И. Железобетонные конструкции. Общий курс / В.И. Мурашев, Э.Е. Сигалов, В.Н. Байков. – М.: Госстройиздат, 1962. – 638 с.

92. Мышкис А.Д. Математика для ВТУЗов. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1971. – 632 с.

93. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций. Метод конечных элементов / Ю. И. Немчинов. – К.: Будівельник, 1980. – 232 с.

94. Носов А.К. Теоретическое и экспериментальное исследование некоторых типов сквозных пластинок и пологих оболочек в виде регулярных перекрестных систем: дис. канд. техн. наук / Носов А. К. – Саратов, 1970.

95. Оробей А.Ф. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов: Учебное пособие / А.Ф. Оробей, А.В. Ковров. – Одесса, 2004. – 122 с.

96. Павліков А.М. Застосування діаграми стану бетону в розрахунках моменту утворення тріщин / А.М. Павліков. // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2010. – С. 271–276.

97. Павліков А.М. Конструювання і розрахунок монолітних ребристих перекриттів / А. М. Павліков, О. В. Гарькава. – Полтава: Полтавський національний технічний університет, 2013.

98. Павліков А.М. Нелінійна модель напружено-деформованого стану косозавантажених залізобетонних елементів у закритичній стадії: монографія / А.М. Павліков. – Полтава: ПолтНТУ, 2007. – 259 с.

99. Павліков А.М. Розрахунок площі поздовжньої арматури в згинальних елементах з використанням деформаційної моделі / А.М. Павліков. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2009. – С. 119–125.

100. Павліков А.М. Ширина розкриття нормальних тріщин у залізобетонних балках при косому згинанні / А. М. Павліков, Д. Ф. Федоров. //

Збірник наукових праць [Полтавського національного технічного університету ім. Ю. Кондратюка]. – 2012. – №5. – С. 116–121.

101. Папкович П.Ф. Строительная механика корабля / П.Ф. Папкович. – Л.: Судпромгиз, 1941. – 960 с.

102. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчислени / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 430 с.

103. Положий Г.Н. Численное решение двухмерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента / Г.Н. Положий. – К.: Издательство КГУ, 1962. – 164 с.

104. Попов В.И. Напряженно-деформированное состояние железобетонных балок прямоугольного сечения при изгибно-крутильных воздействиях: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук / Попов В. И. – М., 1985. – 18 с.

105. Постнов В.А. Изгиб и устойчивость стержней, стержневых систем, пластин и оболочек / В.А. Постнов, Д.М. Ростовцев, В.П. Суслов, В.П. Кочанов. – Л.: Судостроение, 1987. – 416 с. – (Строительная механика корабля и теория упругости: Учеб. Для вузов; т. 2).

106. Прокуров М.Ю. Расчет перекрестных балочных систем в автоматизированном режиме. / М.Ю. Прокуров. // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2011. – №1.

107. Рабинович И.М. Методы расчета рам / И. М. Рабинович. – М.: Госстройиздат, 1931-1937. – (т. 1, 2, 3).

108. Рабинович И.М. Применение теории конечных разностей к исследованию неразрезных балок / И.М. Рабинович. – М.: Изд-во Высш. техн. комитета НКПС, 1921.

109. Рауш Э. Расчет железобетона на кручение и срез / Э. Рауш. – М., Гл. ред. строит. лит., 1936.

110. Резников Р.А. Системы перекрестных балок. Методика расчета и таблицы / Р.А. Резников, К.Г. Бомштейн, Г.И. Монохина. – М.: Гипротис, 1964.

111. Ростовцев Д.М. Приближенный метод расчета перекрытий с несколькими перекрестными связями / Д. М. Ростовцев. // Труды ЛКИ. – 1962. – №38. – С. 135–144.

112. Руллэ Л.К. Исследование работы на изгиб с кручением железобетонных балок двутаврового сечения / Л.К. Руллэ // Влияние скорости нагружения, гибкости и крутящих моментов на прочность железобетонных конструкций / Л.К. Руллэ. – М.: НИИЖБ, 1970. – С. 126–153.

113. Сафонов А.Г. Расчет прочности железобетонных конструкций при кручении с изгибом: дис. канд. техн. наук / Сафонов А. Г. – Орел, 2009. – 166 с.

114. Сегаль А.И. Прочность и устойчивость судовых перекрытий / А. И. Сегаль. – М.-Л.: Речной транспорт, 1965. – 372 с.

115. Семенюк С.Д. Исследование работы пространственных сечений перекрестных балок фундаментов жилых и гражданских зданий / С. Д. Семенюк. // Наука та будівництво. – 2015. – №2. – С. 9–12.

116. Семенюк С.Д. Монолитные и сборно-монолитные фундаменты, как система перекрестных балок, при возведении и эксплуатации зданий и сооружений в сложных грунтовых условиях / С.Д. Семенюк. // Будівельні конструкції. – 2013. – №78. – С. 434–443.

117. Симеонов С.В. Общая теория расчета судовых перекрытий / С.В. Симеонов. // Труды ЛКИ. – 1959. – №26.

118. Симеонов С.В. Техническа теория на съставените строителни конструкции / С.В. Симеонов. // Строительство. – 1959. – №6. (Болг.).

119. Смирнов А.Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений / А.Ф. Смирнов. – М.: Трансжелдориздат, 1947.

120. СНиП 2.03.01–84. Бетонные и железобетонные конструкции. – М.: Госстрой СССР, 1985 – 79 с.

121. СНиП 2.05.03–84*. Мосты и трубы. – М.: ФГУП ЦПП, 2005. – 239 с.

122. Соколов О.Л. Некоторые задачи изгиба и устойчивости рамных стержней в упругой среде, составных плит и оболочек: дис. канд. техн. наук / Соколов О.Л. – Саратов, 1967. – 200 с.

123. Срібняк Н.М. Крутильна жорсткість залізобетонних елементів перекриттів з нормальними тріщинами: автореф. дис. …. канд. техн. наук 05.23.01 / Срібняк Наталія Миколаївна; Одеська державна академія будівництва та архітектури. – О., 2009. – 23 с.

124. Стрелецкий Н.С. К расчету сложных статически неопределимых систем / Н. С. Стрелецкий. – М.: Изд-во Высш. техн. комитета НКПС, 1921.

125. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

126. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 560 с.

127. Турков А.В. Прогибы и частоты собственных колебаний систем перекрестных балок на квадратном плане с учетом податливости узловых соединений. / А.В. Турков, А.А. Макаров. // Строительство и реконструкция. – 2013. – №2. – С. 57–61.

128. Улицкий Б.Е., Потапкин А.А. Пространственные расчеты мостов / Б.Е. Улицкий, А.А. Потапкин. – М.: Транспорт, 1967. – 403 с.

129. Уманский А.А. О расчете конструкций с большим числом одинаковых пролетов / А.А. Уманский. // Исследования по теории сооружений. – 1939. – №3.

130. Фомичев В.И. Прочность железобетонных элементов, подверженных изгибу с кручением, при учете пространственной работы внутренних сил и сложного напряженного состояния арматуры: дис. канд. техн. наук / Фомичев В.И. – М., 1978. – 261 с.

131. Филин А.П. Расчет многократно статически неопределимых систем при помощи ортонормированных функций / А.П. Филин, Е.С. Гребень. // Исследования по теории сооружений. – 1959. – №8.

132. Филин А.П. Расчет пространственных стержневых конструкций типа системы перекрестных связей и его применение к оболочкам при использовании электронных вычислительных машин / А.П. Филин. // Сб. трудов ЛИИЖТ. – 1962. – №192. – С. 7–83.

133. Ханъжов Б.Д. О выборе системы координатных функций при определении собственных значений перекрестных систем вариационным методом Ритца / Б. Д. Ханъжов. // Сб. трудов ВЗПИ. – 1968. – №51.

134. Чиненков Ю.В. Исследование работы железобетонных элементов при совместном действии изгиба и кручения / Ю.В. Чиненков // Исследование прочности элементов железобетонных конструкций / Ю.В. Чиненков. – М.: Госстройиздат, 1959.

135. Чистова, Т.П. Экспериментальное исследование деформативности обычных железобетонных элементов коробчатого и прямоугольного сечения при чистом кручении / Т.П. Чистова // Прочность и жесткость железобетонных конструкций. / Т.П. Чистова – М.: Стройиздат, 1971. – С. 118–135.

136. Чистова, Т.П. Элементы таврового сечения под действием изгиба и кручения / Т.П. Чистова // Влияние скорости нагружения гибкости и крутящих моментов на прочность железобетонных конструкций. / Т.П. Чистова – М.: НИИЖБ, 1970. – С. 154–176.

137. Шайкевич В.Д. Матричный способ расчета регулярных стержневых систем / В.Д. Шайкевич. // Расчет пространственных конструкци. – 1958. – №4.

138. Шайкевич В.Д. Устойчивость и свободные колебания пространственных пластичных систем / В.Д. Шайкевич. // Расчет пространственных конструкци. – 1973. – №15.

139. Юдин, В.К. Определение несущей способности элементов прямоугольного сечения, подверженных кручению с изгибом / В. К. Юдин. // Бетон и железобетон. – 1962. – №6. – С. 37–42.

140. Юдин, В.К. Работа железобетонных балок прямоугольного сечения на изгиб с кручением изгибом / В.К. Юдин. // Бетон и железобетон. – 1964. – №1. – С. 21–28.

141. Ягодин В.К. Исследования железобетонных элементов кольцевого сечения при совместном действии изгиба и кручения / В.К. Ягодин. // Труды Горьковского инженерно- строительного института им. В.П. Чкалова. – 1962. – №42. – С. 27–34.

142. Яременко А.Ф. О практическом способе определения жесткости железобетонных балок / А.Ф. Яременко, А.В. Ковров, Т.А. Синюкина. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2005. – №20. – С. 389–394.

143. Яременко О.Ф. Несуча здатність та деформативність стержневих залізобетонних елементів в складному напруженому стані / О.Ф. Яременко, Ю.О. Школа. – Одеса: Одеської державної академії будівництва та архітектури, 2010. – 136 с.

144. ACI MANUAL OF CONCRETE PRACTICE. SET:2017. Manual Of Concrete Practice - 8 Volume Set – American Concrete Institute, 2017

145. Andersen P. Experiments with Concrete in Torsion / P. Andersen. // ASCE. – 1935. – №100. – С. 949.

146. Andersen P. Rectangular Concrete Sections Under Torsion / P. Andersen. // ACI Journal. – 1937. – №9. – С. 1–12.

147. Azizov T.N. According to the calculation of reinforced concrete ceilings taking into account the change in torsional stiffness of prefabricated plates against the formation of normal cracks / T.N. Azizov, A.S. Melnyk, L.P. Vakal, A.A. Kalenchuk-Porkhanova, O.M. Orlova // Theoretical & Applied Science. – 2017. N 05 (49). S. 180-189.

148. Azizov T. Basis of calculation on torsion for reinforced concrete structures with normal cracks / T. Azizov, N. Jurkowska, D. Kochkarev // Concrete Innovations In Materials, Design And Structures. Fib Symposium 2019. Cracow 27-29 May 2019. Book of Abstracts. / T. Azizov, N. Jurkowska, D. Kochkarev. – Cracow: FIB, 2019. – С. 489–490.

149. Azizov T. Calculation of reinforced concrete ceilings with normal cracks accounting the Chebyshev approximation / [T. Azizov, O. Melnyk, O. Orlova та ін.] // 6th International Scientific Conference "Reliability and Durability of Railway Transport Engineering Structures and Buildings" Transbud-2017 / [T. Azizov, O. Melnyk, O. Orlova та ін.]. – Kharkiv, 2017.

150. Azizov T. Consideration of the Torsional Stiffness in Hollow-Core Slabs' Design [Електронний ресурс] / T. Azizov, W. Derkowski, N. Jurkowska // Materials Science Forum Trans Tech Publications Ltd, Switzerland. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.968.330.

151. Azizov T. Improving the design of the earthquake-proof suspension building [Електронний ресурс] / T. Azizov, N. Jurkowska // E3S Web of Conferences. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: https://doi.org/10.1051/e3sconf/20183601001.

152. Azizov T. The Issue of Determination of the Rigidity Characteristics of Reinforced Concrete Elements with Normal Cracks / T. Azizov, N. Sribnyak, N. Tsyganenko, O. Yurin. // International Journal of Engineering & Technology. – 2018. – №5. – С. 185–189.

153. Azizov T. The Problem of Considering of the Torsional Stiffness of Reinforced Concrete Elements While Designing Statically Indeterminate Systems / T. Azizov, N. Jurkowska. // Engineering Studies. – 2018. – №3. – С. 453–466.

154. Azizov T. Reinforced Concrete Rod Elements Stiffness Considering Concrete Nonlinear Properties / T. Azizov, D. Kochkarev, T. Galinska // International Conference Current Issues of Civil and Environmental Engineering / T. Azizov, D. Kochkarev, T. Galinska. – Lviv-Košice–Rzeszów: Springer, 2019. – С. 1–6.

155. Azizov T. Stem approximation to determine torsion deformations of reinforced concrete elements with normal cracks / T. Azizov // Sciences of Europe. – 2018. – №32. – С. 63–69.

156. Becker O. Ndherungsweise Berechnung der Eigenfrequenzen der Biegesschwingungen eines Kreuzwerkes / O. Becker // Wiss. Z. Techn. Hochschule Otto von Guericke. Magdeburg. – 1962. – №6.

157. BS EN 12390-1:2012 Testing hardened concrete. Shape, dimensions and other requirements for specimens and moulds [Електронний ресурс] // BSI. – 2012. – Режим доступу до ресурсу: https://doi.org/10.3403/30254400.

158. BS EN 12390-2:2019 Testing hardened concrete. Making and curing specimens for strength tests [Електронний ресурс] // BSI. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://doi.org/10.3403/ 30360082.

159. BS EN 12390-3:2019 Testing hardened concrete. Compressive strength of test specimens [Електронний ресурс] // BSI. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://doi.org/10.3403/30360097.

160. Bywalski C.Z. Estimation of the bending stiffness of rectangular reinforced concrete beams made of steel fibre reinforced concrete / C.Z. Bywalski, M. Kamiński //Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2011. – №. 3. – С. 553–571.

161. Chang P.J. An efficient, general method for the analysis of grillages / P.J. Chang, W.D. Pilkey. // J. Ship Res. – 1971. – №2.

162. Collins M.P Reinforced Concrete in Torsion / M.P. Collins, P.E. Walsh, F.E. Archer, A.S. Hall. – Sydney: The University of N.S.W., 1968. – 31 с.

163. Collins M.P Ultimate Strength of Reinforced Concrete Beams Subjected to Combined Torsion and Banding / M.P. Collins, P.E. Walsh, F.E. Archer, F.E. Hall // Torsion of Structure Concrete / M.P. Collins, P.E. Walsh, F.E. Archer, F.E. Hall. – Detroit: ACI, 1968. – С. 379–402.

164. Cowan H.J. Elastic theory for torsional strength of rectangular reinforced concrete beams / H.J. Cowan. // Magazine of Concrete Research. – 1950. – №2. – С. 3.

165. Cowan H.J. Experiments of the strength of reinforced and prestressed concrete beams and of concrete-encased steel joists in combined bending and torsion / H.J. Cowan, S. Armstrong. // Magazine of Concrete Research. – 1955. – №7. – С. 3–20.

166. DIN EN 1992-1-1 (2011-01) Eurocode 2: Design of concrete structures Part 1-1: General rules and rules for buildings (includes Corrigendum AC:2010). – German Institute for Standardization (Deutsches Institut für Normung), 2011. – 250 с.

167. Ernst G.C. Ultimate torsional properties of rectangular reinforced concrete beams / G.C. Ernst // ACJ Proceedings. – 1957. – №4.

168. Evans R.H. The behavior and strength of prestressed concrete and rectangular beams subjected to combined bending and torsion / R. H. Evans, M. G. Khalil. // The Structural Engineer. – 1970. – №48.

169. Gesund H. Ultimate Strength in Combined Bending and Torsion of Concrete Beams Containing Only Longitudinal Reinforcement / H. Gesund, L.A. Boston. // ACI Journal. – 1964. – №11. – С. 1453.

170. Gesund H. Ultimate Strength in Combined Bending and Torsion of Concrete Beams Containing Both Longitudinal and Transverse Reinforcement / H. Gesund, F.J. Schuette, G.R. Buchanan, G.A. Gray // ACI Journal. –1964. – №12 – С. 1509.

171. Goeben H.E. Untersuchhugen iber den Einsatz von Fachwerkplatten und Fachwerktrdgerrosten fur Dachkonstruktionen / H.E. Goeben // Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule fur Bauwesen. – 1966. – №12.

172. Good C.D. Ultimate strength of reinforced concrete beams in combined Bending and torsion / C.D. Good, M.A. Helmy. // Torsion of Structure Concrete. – 1968. – №18.

173. Graf O. Verdrehimgsversuche zur Klarung der Schubfestigkeit von Eisenbeton / O. Graf, E. Morsch // Forschhungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. – 1922. – №258. – С. 52.

174. Gutkowski W. The Hexagonal grid / W. Gutkowski, J. Obrebski // Bulletin de l'academie polonaise des science. – 1971. – №5.

175. Hsu T.T.C. Torsion of reinforced concrete. / T.T.C. Hsu // – 1984.

176. Hsu T.T.C. Torsion of Structural Concrete – Behaviors of Reinforced Concrete Rectangular Members / T.T.C. Hsu // Torsion of Structural Concrete – 1968. – №18 – С. 261.

177. Hsu T.T.C. Ultimate Torque of Reinforced Rectangular Beams / T.T.C. Hsu // SD Journal. – 1968. – №2. – С. 485.

178. ISO 1920-4:2005 Testing of concrete Part 4: Strength of hardened concrete. – International Organization for Standardization, 2005 – 27p.

179. Karlsson I. Torsional stiffness of reinforced concrete members subjected to pure torsion / I. Karlsson, L. Elfgren //Magazine of Concrete Research. – 1972. – №. 80. – C. 149–156.

180. Lomeo A. Contributo al calcolo strutturale di un grigliato con con- torno incastrato / A. Lomeo // La Marina Italliana. – 1959. – № 7, 8.

181. Luís L.F.A. Behaviour of concrete beams under torsion: NSC plain and hollow beams// Bernardo L.F.A., Sérgio M. R. Lopes. Materials and Structures. July 2008, Volume 41, Issue 6, pp. 1143-1167.

182. Morsch E. Der Eisenbetonbau, sein Theorie Und Anwerdung. / E. Morsch // I Band. – 2, Hafte. – 1923.

183. Nowachi W. Two-Dimensional Problems of Orthogonal Grids. / W. Nowachi // Bulletin de l'academie Polonaise des sciences. Serie des sciences techniques. – 1975. – №5. – C. 7–13.

184. Obrqbski J.B. Analiza pewnej klasy plaskich dwuwarstowich kratownic / J.B. Obrqbski // Rosprawy inzynierskie. – 1972. – №20. – C. 129–150.

185. Pavlikov A.M. Strength Of Reinforced Concrete In Bending Elements Calculations / A.M. Pavlikov, D.V. Kochkarev, O.V. Garkava. // Збірник наукових праць. Серія: Галузеве машинобудування, будівництво. – 2017. – №48. – C. 62–71.

186. Qadeer A. The Bending Stiffness of Slabs Connecting Shear Walls / A. Qadeer, B.S. Smith // Journal Proceedings. – 1969. – №. 6. – C. 464–473.

187. Rao T.D.G. Analytical model for the torsional response of steel fiber reinforced concrete members under pure torsion / T.D.G. Rao, D.R. Seshu //Cement and Concrete Composites. – 2005. – №. 4. – C. 493–501.

188. Rausch E. Berechnung des Eisenbetons gegen Verderung und Abscheren / E. Rausch – Berlin, 1929.

189. Rozvany G.I.N. Optimal design of flexural systems: beams, grillages, slabs, plates and shells. / G.I.N. Rozvany / – Elsevier, 2016.

190. Shanmugam S.P. Seismic behavior of circular reinforced concrete bridge columns under combined loading including torsion/ Thesis for the degree Doctor of

Philosophy in Civil Engineering// Missouri University of Science and Technology. Missouri, 2009. – 338p.

191. Switka R. Dragania I funkcje wlasne regularnych ukJadow dyskretnych / R. Switka // Poznanskie towarzystwo przyjacto J nauk, wydzial nauk technicznych, prace komisji budownictwa i architecture. – 1973. – №2. – C. 4–40.

192. Switka R. Metoda rwnan roznicowych w zagadnieniach zginania i drgan kratownic regularnych / R. Switka // Jnzynieria i budownictwo. – 1972. – № 9. – C. 347–351.

ДОДАТОК А

Таблиця 1

Випробування І серії перехресно-балкових систем. Етап 1. Рівномірно розподілене навантаження навколо вузла

№ п/п	Навантаження, кН	Покази прогиномірів, мм				Прогини, мм			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	0	6,18	9,04	3,54	0	0	0	0	0
2	0,366	6,26	8,98	3,66	0,11	0,08	0,06	0,12	0,11
3	0,838	6,41	8,89	3,77	0,22	0,23	0,15	0,23	0,22
4	1,298	6,58	8,78	3,87	0,34	0,4	0,26	0,33	0,34
5	1,298	6,58	8,78	3,87	0,35	0,4	0,26	0,33	0,35
6	1,736	6,7	8,7	3,96	0,45	0,52	0,34	0,42	0,45
7	1,736	6,7	8,7	3,96	0,45	0,52	0,34	0,42	0,45
8	2,122	6,76	8,63	4,01	0,52	0,58	0,41	0,47	0,52
9	2,122	6,81	8,62	4,02	0,54	0,63	0,42	0,48	0,54
10	2,122	6,81	8,62	4,03	0,54	0,63	0,42	0,49	0,54
11	2,446	6,81	8,56	4,08	0,59	0,63	0,48	0,54	0,59
12	2,446	6,95	8,55	4,09	0,6	0,77	0,49	0,55	0,6
13	2,122	6,92	8,55	4,09	0,58	0,74	0,49	0,55	0,58
14	2,122	6,92	8,55	4,08	0,58	0,74	0,49	0,54	0,58
15	1,736	6,92	8,55	4,08	0,51	0,74	0,49	0,54	0,51
16	0,838	6,83	8,71	3,93	0,34	0,65	0,33	0,39	0,34
17	0	6,42	8,92	3,7	0,1	0,24	0,12	0,16	0,1

Таблиця 2

Випробування I серії перехресно-балкових систем. Етап 2. Навантаження, розподілене по балкам

№ п/п	Навантаження, кН	Покази прогиномірів, мм				Прогини, мм			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	0	6,38	8,94	3,65	0,08	0	0	0	0
2	0,552	6,43	8,88	3,86	0,27	0,05	0,06	0,21	0,19
3	1,116	6,49	8,76	4,14	0,39	0,11	0,18	0,49	0,31
4	1,483	6,54	8,7	4,32	0,52	0,16	0,24	0,67	0,44
5	1,856	6,61	8,62	4,37	0,59	0,23	0,32	0,72	0,51
6	2,830	7,77	8,4	4,68	0,86	1,39	0,54	1,03	0,78
7	3,771	8	8,21	4,97	1,1	1,62	0,73	1,32	1,02
8	4,340	8,16	8,08	5,14	1,24	1,78	0,86	1,49	1,16
9	4,881	8,39	7,01	5,25	1,33	2,01	1,93	1,6	1,25
10	6,534	8,6	6,46	5,76	1,84	2,22	2,48	2,11	1,76

Таблиця 3

Випробування I серії перехресно-балкових систем. Етап 3. Зосереджене навантаження у вузлах (покази ІЧ)

№ п/п	Навантаження, кН	Покази індикаторів, мм			
		1	2	3	1
1	0	0	0	0	0
2	2	0,01	0,01	0,01	0,01
3	4	0,02	0,02	0,02	0,02
4	6	0,02	0,02	0,02	0,02
5	8	0,02	0,02	0,03	0,04
6	9	0,02	0,03	0,03	0,04
7	10	0,02	0,03	0,03	0,05
8	11	0,02	0,04	0,03	0,06
9	12	0,03	0,04	0,04	0,04
10	14	0,03	0,05	0,04	0,08
11	17	0,04	0,08	0,05	0,1
12	20	0,04	0,09	0,05	0,12
13	23	0,05	0,12	0,06	0,16
14	26	0,05	0,15	0,07	0,18
15	26	0,055	0,155	0,07	0,19
16	29	0,06	0,178	0,08	0,208
17	29	0,061	0,185	0,08	0,21
18	32	0,076	0,205	0,08	0,235
19	32	0,076	0,21	0,09	0,24
20	35	0,076	0,23	0,09	0,26
21	39	0,08	-	0,1	0,3
22	44	0,09	-	0,12	0,34
23	44	-	0,12	0,35	18,78
24	48	-	0,3	0,39	19,72
25	25	-	0,1	0,31	17,96
26	48	-	0,14	0,41	20,32
27	52	-	0,145	0,555	-
28	55	-	0,155	0,48	-
29	60	-	0,165	0,646	-
30	61,5	-	-	-	-

Таблиця 4

Випробування І серії перехресно-балкових систем. Етап 3. Зосереджене навантаження у вузлах (покази прогиномірів та прогини)

№ п/п	Навантаження, кН	Покази прогиномірів, мм				Прогини, мм			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	0	9,56	3,99	13,48	8,93	0	0	0	0
2	2	9,77	4,3	13,08	9,3	0,21	0,31	0,4	0,37
3	4	10,2	4,58	12,71	9,62	0,64	0,59	0,77	0,69
4	6	10,46	4,89	12,3	9,98	0,9	0,9	1,18	1,05
5	8	10,73	5,26	11,8	10,38	1,17	1,27	1,68	1,45
6	9	10,96	5,54	11,57	10,62	1,4	1,55	1,91	1,69
7	10	11,21	5,64	11,4	10,79	1,65	1,65	2,08	1,86
8	11	11,41	5,86	11,2	10,91	1,85	1,87	2,28	1,98
9	12	11,58	6,08	10,95	11,2	2,02	2,09	2,53	2,27
10	14	11,97	6,45	10,52	11,49	2,41	2,46	2,96	2,56
11	17	12,61	7,1	9,87	12,14	3,05	3,11	3,61	3,21
12	20	13,24	7,66	9,29	13,11	3,68	3,67	4,19	4,18
13	23	13,73	8,22	8,64	13,48	4,17	4,23	4,84	4,55
14	26	14,49	8,82	8	14	4,93	4,83	5,48	5,07
15	26	14,67	9,03	8,015	14,1	5,11	5,04	5,465	5,17
16	29	15,24	9,47	7,35	14,65	5,68	5,48	6,13	5,72
17	29	15,32	9,54	7,2	14,65	5,76	5,55	6,28	5,72
18	32	15,85	10,07	6,43	15,03	6,29	6,08	7,05	6,1
19	32	15,45	10,19	6,47	15,28	5,89	6,2	7,01	6,35
20	35	15,52	10,61	5,97	15,73	5,96	6,62	7,51	6,8
21	39	16,52	11,37	5,13	16,49	6,96	7,38	8,35	7,56
22	44	18,56	11,59	4,06	16,44	9	7,6	9,42	7,51
23	44	18,78	11,85	4,83	16,65	9,22	7,86	8,65	7,72
24	48	19,72	12,58	3,07	17,38	10,16	8,59	10,41	8,45
25	25	17,96	10,56	5,19	15,21	8,4	6,57	8,29	6,28
26	48	20,32	12,96	2,68	17,72	10,76	8,97	10,8	8,79
27	52	-	-	2,01	18,29	-	-	11,47	9,36
28	55	-	-	-	-	-	-	-	-
29	60	-	-	-	-	-	-	-	-
30	61,5	-	-	-	-	-	-	-	-

Таблиця 5

Випробування II серії перехресно-балкових систем (покази ІЧ)

№ п/п	Навантаження, кН	Покази індикаторів, мм			
		1	2	3	4
1	0	0	0	0	0
2	2,5	0,005	0	0	0
3	5	0,005	0	0	-0,01
4	7,5	0,02	-0,005	0	-0,015
5	10	0,021	-0,002	1	-0,01
6	12,5	0,03	-0,02	1	0
7	15	0,04	-0,02	1	-0,02
8	17,5	0,045	-0,02	1	-0,03
9	20	0,05	-0,02	1	-0,02
10	22,5	0,06	-0,02	1	-0,04
11	25	0,065	-0,02	1	-0,07
12	27,5	0,08	-0,07	1	-0,07
13	30	0,08	-0,07	1	-0,09
14	32,5	0,1	-0,2	1	-0,11
15	35	0,12	-0,2	1	-0,12
16	37,5	0,13	-0,2	1	-0,12
17	40	-	-	-	-
18	41,5	-	-	-	-

Таблиця 6

Випробування II серії перехресно-балкових систем

(покази прогиномірів та прогини)

№ п/п	Навантаження, кН	Покази прогиномірів, мм				Прогини, мм			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	0	0,35	2,64	95,39	14,71	0	0	0	0
2	2,5	0,56	3,33	94,91	13,43	0,21	0,69	0,48	1,28
3	5	0,7	3,91	94,32	13,02	0,35	1,27	1,07	1,69
4	7,5	3,78	3,99	93,72	12,72	3,43	1,35	1,67	1,99
5	10	3,98	4,23	92,88	12,13	3,63	1,59	2,51	2,58
6	12,5	4,61	4,74	92,42	11,81	4,26	2,1	2,97	2,9
7	15	4,61	5,37	91,85	11,24	4,26	2,73	3,54	3,47
8	17,5	4,87	6,97	91,2	10,72	4,52	4,33	4,19	3,99
9	20	4,87	7,64	90,48	10,21	4,52	5	4,91	4,5
10	22,5	6,51	7,89	89,61	9,54	6,16	5,25	5,78	5,17
11	25	6,98	8,13	88,74	9,28	6,63	5,49	6,65	5,43
12	27,5	7,76	9,83	87,92	8,8	7,41	7,19	7,47	5,91
13	30	8,58	10,65	86,89	8,17	8,23	8,01	8,5	6,54
14	32,5	8,7	-	85,31	7,89	8,35	-	10,08	6,82
15	35	8,7	-	83,78	6,95	8,35	-	11,61	7,76
16	37,5	-	-	-	-	-	-	-	-
17	40	8,7	-	76,76	1,37	8,35	-	18,63	13,34
18	41,5	-	-	-	-	-	-	-	-

Таблиця 7

Випробування III серії перехресно-балкових систем (покази ІЧ)

№ п/п	Навантаження	Покази індикаторів, мм			
		1	2	3	4
1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0
2	2	0	-1	0	-1
3	4	1	-1	0	-1
4	6	1	-2	1	-2
5	8	2	-3	1	-4
6	10	2	-4,5	1	-4,5
7	12	3	-6	2	-5
8	14	3	-6	3	-6
9	16	3	-7	3	-6
10	18	3,5	-7	3	-7
11	20	4	-8	4	-8
12	22	4	-9	4	-9
13	24	5	-10	5	-10
14	26	5	-11	5	-11
15	28	5	-12	5	-11
16	0	1	-4	1	-4
17	24	6	-12	5	-11
18	28	6	-12	6	-12
19	15	4	-19	4,5	-11
20	28	6	-22	6	-13
21	30	7	-23	7	-14
22	32	7	-25	7	-14
23	34	8	-26	7	-15
24	36	8	-27	8	-16
25	38	9	-28	8	-17
26	40	9	-29	8	-18
27	42	9,5	-31	9	-19
28	44	10	-32	10	-20
29	46	11	-34	10	-22
30	48	11	-36	11	-22
31	50	11	-37	11	-23
32	52	12	-38	11	-24
33	54	12	-39	12	-25
34	56	12	-40	12	-26
35	60	14	-42	14	-28
36	24,5	8	-33	10	-19
37	24	8	-33	9	-19
38	60	14	-45	15	-31

1	2	3	4	5	6
39	62	15	-45	15	-31
40	64	15	-46	16	-32
41	66	16	-47	16	-33
42	68	16	-17	17	-3
43	70	6	-47	7	-33
44	0	7	-24	4	-10
45	35	14	-36	11	-22
46	70	21	-49	18	-35
47	72	23	-52	20	-38
48	75,5	24	-53	22	-39
49	0	8	-26	7	-12

Таблиця 8

Випробування III серії перехресно-балкових систем.

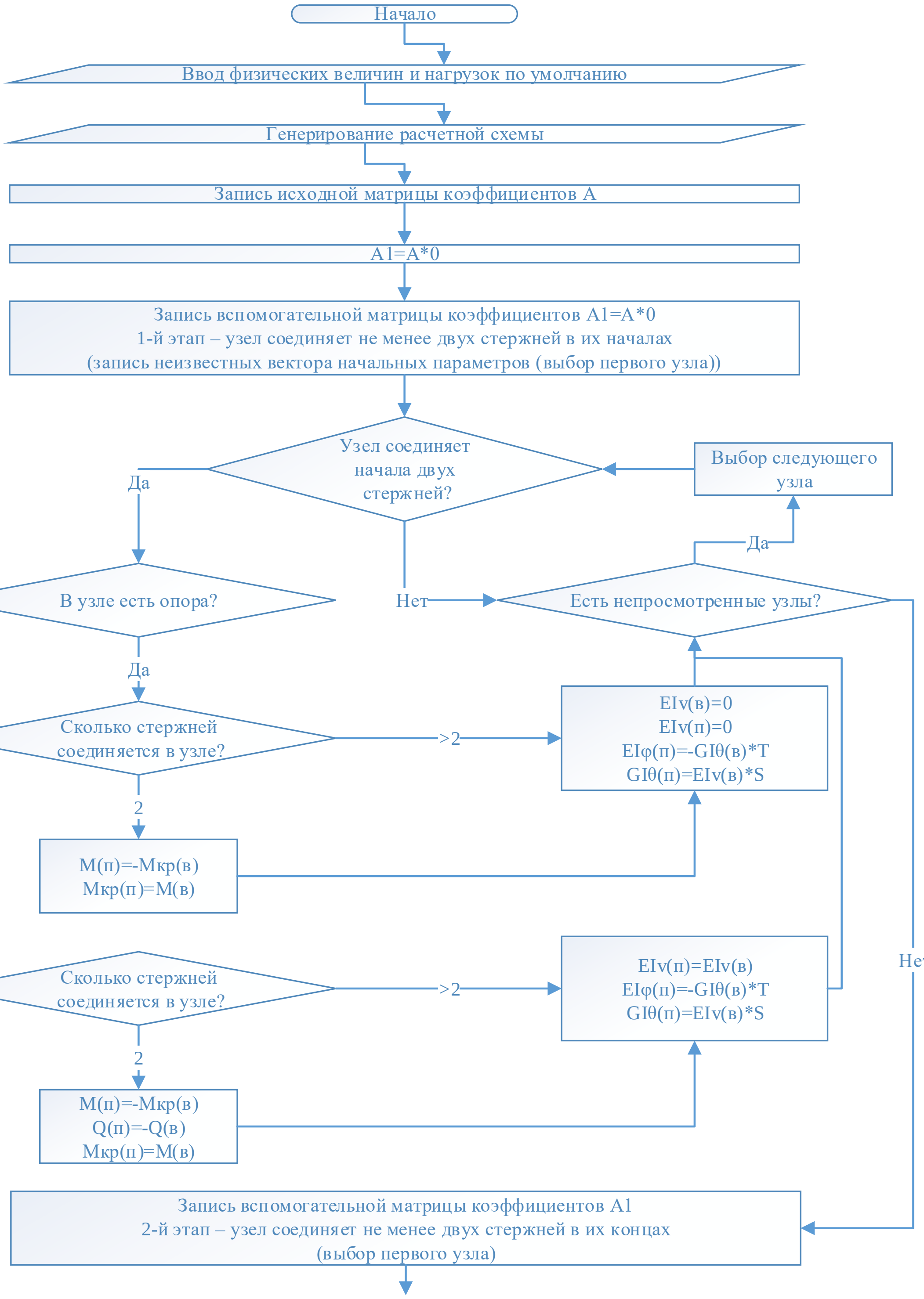
(покази прогиномірів та прогини)

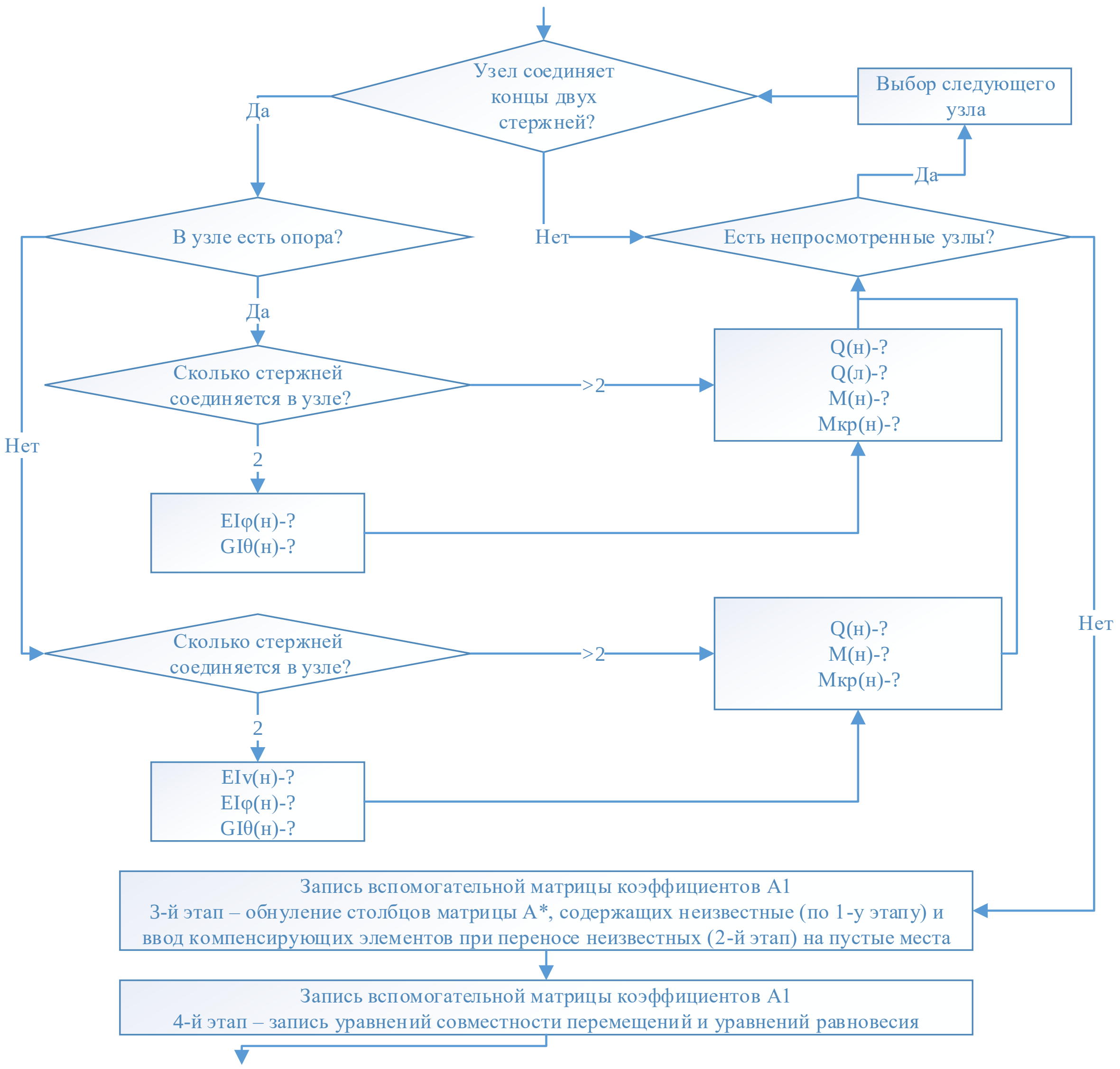
№ п/п	Навантаження, кН	Покази прогиномірів, мм				Прогини, мм			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	20,63	20,07	21,99	32,97	0	0	0	0
2	2	20,62	20,08	21,98	32,96	0,01	0,01	0,01	0,01
3	4	20,19	20,48	21,84	32,82	0,44	0,41	0,15	0,15
4	6	19,85	20,83	21,46	32,78	0,78	0,76	0,53	0,19
5	8	19,29	21,38	21,01	31,99	1,34	1,31	0,98	0,98
6	10	18,82	21,85	20,089	30,44	1,81	1,78	1,901	2,53
7	12	18,26	22,42	20,057	30,15	2,37	2,35	1,933	2,82
8	14	18,14	22,55	20,056	30,12	2,49	2,48	1,934	2,85
9	16	17,83	22,89	19,22	29,54	2,8	2,82	2,77	3,43
10	18	17,48	23,28	19	29,25	3,15	3,21	2,99	3,72
11	20	17,08	23,69	18,76	28,86	3,55	3,62	3,23	4,11
12	22	16,69	24,14	18,33	28,19	3,94	4,07	3,66	4,78
13	24	16,26	24,56	18,18	28,09	4,37	4,49	3,81	4,88
14	26	15,79	25,03	17,9	27,35	4,84	4,96	4,09	5,62
15	28	15,47	25,39	17,49	27,26	5,16	5,32	4,5	5,71
16	0	19,88	20,71	20,18	32,16	0,75	0,64	1,81	0,81
17	24	15,5	25,32	17,44	26,72	5,13	5,25	4,55	6,25
18	28	15,02	25,91	17,09	26,24	5,61	5,84	4,9	6,73
19	15	16,18	24,59	18,65	25,77	4,45	4,52	3,34	7,2
20	28	14,83	25,05	17,03	24,26	5,8	4,98	4,96	8,71
21	30	14,59	25,33	16,82	24,26	6,04	5,26	5,17	8,71
22	32	14,26	25,7	16,54	23,27	6,37	5,63	5,45	9,7
23	34	13,91	26,08	16,2	23,27	6,72	6,01	5,79	9,7
24	36	13,5	26,52	15,96	22,66	7,13	6,45	6,03	10,31
25	38	13,1	26,93	15,69	22,64	7,53	6,86	6,3	10,33
26	40	12,8	27,28	15,32	22,55	7,83	7,21	6,67	10,42
27	42	12,34	27,74	15,04	22,12	8,29	7,67	6,95	10,85
28	44	11,98	28,15	14,84	21,68	8,65	8,08	7,15	11,29
29	46	11,54	28,65	14,24	21,54	9,09	8,58	7,75	11,43
30	48	11,08	29,11	13,94	20,87	9,55	9,04	8,05	12,1
31	50	10,72	29,47	13,82	20,71	9,91	9,4	8,17	12,26
32	52	10,25	29,65	13,28	19,04	10,38	9,58	8,71	13,93
33	54	9,9	30,62	12,99	18,84	10,73	10,55	9	14,13
34	56	9,43	31,14	12,57	18,42	11,2	11,07	9,42	14,55
35	60	8,5	31,19	11,89	17,23	12,13	11,12	10,1	15,74
36	24,5	12,49	27	15,72	21,06	8,14	6,93	6,27	11,91

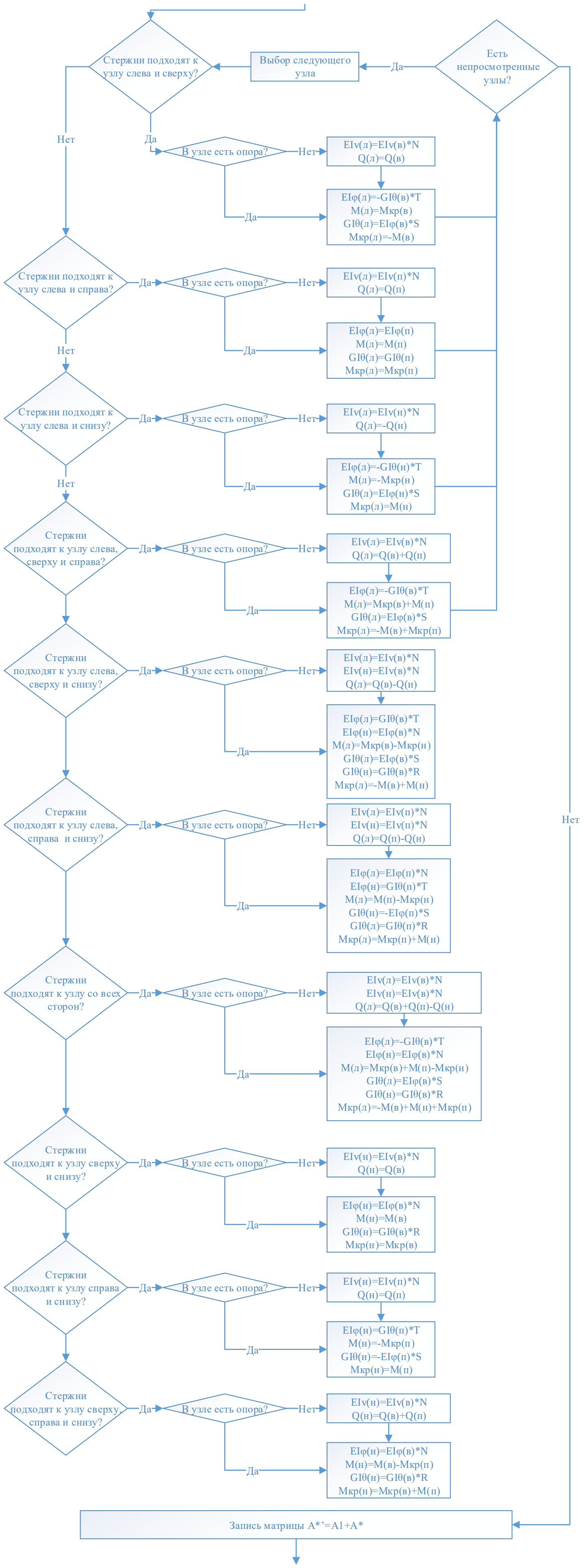
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
37	24	12,52	27	15,72	21,06	8,11	6,93	6,27	11,91
38	60	8,2	31,54	11,64	17,83	12,43	11,47	10,35	15,14
39	62	7,83	31,95	11,27	16,42	12,8	11,88	10,72	16,55
40	64	7,52	32,32	11,02	16,34	13,11	12,25	10,97	16,63
41	66	7,08	32,9	10,75	15,96	13,55	12,83	11,24	17,01
42	68	6,68	33,39	10,24	15,9	13,95	13,32	11,75	17,07
43	70	6,68	33,39	10,24	15,9	13,95	13,32	11,75	17,07
44	0	17,35	24	19,59	26,08	3,28	3,93	2,4	6,89
45	35	10,93	27,61	14,97	20,02	9,7	7,54	7,02	12,95
46	70	5,48	34,05	9,25	14,27	15,15	13,98	12,74	18,7
47	72	3,88	34,34	8,98	12,18	16,75	14,27	13,01	20,79
48	75,5	1,16	36,53	6,62	8,41	19,47	16,46	15,37	24,56
49	0	14,58	27	6,27	12,96	6,05	6,93	15,72	20,01

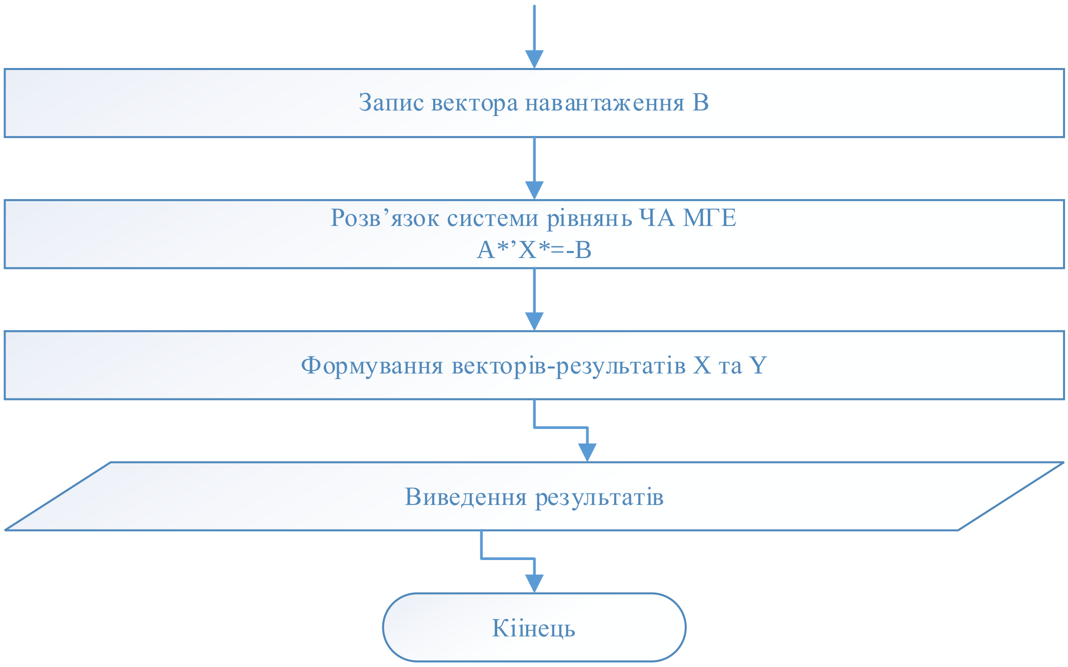
ДОДАТОК Б

Алгоритм роботи програми *CrossBeam*




Узел соединяет концы двух стержней?
Выбор следующего узла
Да
Да
Нет
В узле есть опора?
Есть непросмотренные узлы?
Да
Сколько стержней соединяется в узле?
>2
Q(н)-?
Q(л)-?
M(н)-?
Мкр(н)-?
Нет
2
EIφ(н)-?
GIθ(н)-?
Нет
Сколько стержней соединяется в узле?
>2
Q(н)-?
M(н)-?
Мкр(н)-?
2
EIv(н)-?
EIφ(н)-?
GIθ(н)-?
Запись вспомогательной матрицы коэффициентов A1
3-й этап – обнуление столбцов матрицы A*, содержащих неизвестные (по 1-у этапу) и ввод компенсирующих элементов при переносе неизвестных (2-й этап) на пустые места
Запись вспомогательной матрицы коэффициентов A1
4-й этап – запись уравнений совместности перемещений и уравнений равновесия


Стержни подходят к узлу слева и сверху?
Выбор следующего узла
Да
Есть непросмотренные узлы?
Нет
Да
В узле есть опора?
Нет
EIv(л)=EIv(в)*N
Q(л)=Q(в)
Да
EIφ(л)=-GIθ(в)*T
M(л)=Мкр(в)
GIθ(л)=EIφ(в)*S
Мкр(л)=-M(в)
Стержни подходят к узлу слева и справа?
Да
В узле есть опора?
Нет
EIv(л)=EIv(п)*N
Q(л)=Q(п)
Да
EIφ(л)=EIφ(п)
M(л)=M(п)
GIθ(л)=GIθ(п)
Мкр(л)=Мкр(п)
Нет
Стержни подходят к узлу слева и снизу?
Да
В узле есть опора?
Нет
EIv(л)=EIv(н)*N
Q(л)=-Q(н)
Да
EIφ(л)=-GIθ(н)*T
M(л)=-Мкр(н)
GIθ(л)=EIφ(н)*S
Мкр(л)=M(н)
Нет
Стержни подходят к узлу слева, сверху и справа?
Да
В узле есть опора?
Нет
EIv(л)=EIv(в)*N
Q(л)=Q(в)+Q(п)
Да
EIφ(л)=-GIθ(в)*T
M(л)=Мкр(в)+M(п)
GIθ(л)=EIφ(в)*S
Мкр(л)=-M(в)+Мкр(п)
Стержни подходят к узлу слева, сверху и снизу?
Да
В узле есть опора?
Нет
EIv(л)=EIv(в)*N
EIv(н)=EIv(в)*N
Q(л)=Q(в)-Q(н)
Да
EIφ(л)=GIθ(в)*T
EIφ(н)=EIφ(в)*N
M(л)=Мкр(в)-Мкр(н)
GIθ(л)=EIφ(в)*S
GIθ(н)=GIθ(в)*R
Мкр(л)=-M(в)+M(н)
Стержни подходят к узлу слева, справа и снизу?
Да
В узле есть опора?
Нет
EIv(л)=EIv(п)*N
EIv(н)=EIv(п)*N
Q(л)=Q(п)-Q(н)
Да
EIφ(л)=EIφ(п)*N
EIφ(н)=GIθ(п)*T
M(л)=M(п)-Мкр(н)
GIθ(н)=-EIφ(п)*S
GIθ(л)=GIθ(п)*R
Мкр(л)=Мкр(п)+M(н)
Нет
Стержни подходят к узлу со всех сторон?
Да
В узле есть опора?
Нет
EIv(л)=EIv(в)*N
EIv(н)=EIv(в)*N
Q(л)=Q(в)+Q(п)-Q(н)
Да
EIφ(л)=-GIθ(в)*T
EIφ(н)=EIφ(в)*N
M(л)=Мкр(в)+M(п)-Мкр(н)
GIθ(л)=EIφ(в)*S
GIθ(н)=GIθ(в)*R
Мкр(л)=-M(в)+M(н)+Мкр(п)
Стержни подходят к узлу сверху и снизу?
Да
В узле есть опора?
Нет
EIv(н)=EIv(в)*N
Q(н)=Q(в)
Да
EIφ(н)=EIφ(в)*N
M(н)=M(в)
GIθ(н)=GIθ(в)*R
Мкр(н)=Мкр(в)
Стержни подходят к узлу справа и снизу?
Да
В узле есть опора?
Нет
EIv(н)=EIv(п)*N
Q(н)=Q(п)
Да
EIφ(н)=GIθ(п)*T
M(н)=-Мкр(п)
GIθ(н)=-EIφ(п)*S
Мкр(н)=M(п)
Стержни подходят к узлу сверху справа и снизу?
Да
В узле есть опора?
Нет
EIv(н)=EIv(в)*N
Q(н)=Q(в)+Q(п)
Да
EIφ(н)=EIφ(в)*N
M(н)=M(в)-Мкр(п)
GIθ(н)=GIθ(в)*R
Мкр(н)=Мкр(в)+M(п)
Запись матрицы A*'=A1+A*


Запис вектора навантаження B
Розв’язок системи рівнянь ЧА МГЕ
A*’X*=-B
Формування векторів-результатів X та Y
Виведення результатів
Кінець

ДОДАТОК В

Лістинг програми *CrossBeam*

Підпрограма MainWindow

```
function varargout = MainWindow(varargin)
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @MainWindow_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn',  @MainWindow_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn',  [] , ...
'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function MainWindow_OpeningFcn(hObject, ~, handles, varargin)

handles.output = hObject;

guidata(hObject, handles);
global glbPh glbLoads;
l=size(glbPh,1);
m=size(glbLoads,1);
if l~=0 && m~=0
    set(handles.Gen,'Enable','on');
    set(handles.Add,'Enable','on');
    set(handles.Del,'Enable','on');
    set(handles.Regen,'Enable','on');
end

function varargout = MainWindow_OutputFcn(~, ~, handles)

varargout{1} = handles.output;

function Gen_Callback(~, ~, ~)
clear;
SchemeGen;

function Add_Callback(~, ~, ~)
AddRod;

function Del_Callback(~, ~, ~)
DelRod;

function zoom_Callback(~, ~, ~)
zoom;

function pan_Callback(~, ~, ~)
pan;

function DefPhys_Callback(~, ~, handles)
DefPhys;
```

```
delete(handles.figure1);

function DefLoads_Callback(~, ~, handles)
DefLoads;
delete(handles.figure1);

function RodProp_Callback(~, ~, ~)

function Calc_Callback(~, ~, handles)
global FULL number Xstar ZerosUnk Nodes NodesLen;
A=zeros(number*6,number*6);
for i=0:number-1
    A(6*i+1,6*i+1)=1;
    A(6*i+1,6*i+2)=FULL(i+1,7);
    A(6*i+1,6*i+3)=-FULL(i+1,7)^2/2;
    A(6*i+1,6*i+4)=-FULL(i+1,7)^3/6;
    A(6*i+2,6*i+2)=1;
    A(6*i+2,6*i+3)=-FULL(i+1,7);
    A(6*i+2,6*i+4)=-FULL(i+1,7)^2/2;
    A(6*i+3,6*i+3)=1;
    A(6*i+3,6*i+4)=FULL(i+1,7);
    A(6*i+4,6*i+4)=1;
    A(6*i+5,6*i+5)=1;
    A(6*i+5,6*i+6)=FULL(i+1,7);
    A(6*i+6,6*i+6)=1;
end;

for i=1:number
    FirstNodes(i,1)=FULL(i,1);
    FirstNodes(i,2)=FULL(i,3);
    FirstNodes(number+i,1)=FULL(i,2);
    FirstNodes(number+i,2)=FULL(i,4);
end
Nodes=unique(FirstNodes,'rows');
NodesLen=size(Nodes,1);
clear FirstNodes;
for i=1:NodesLen:
for j=1:number
if Nodes(i,1) == FULL(j,1) && Nodes(i,2) == FULL(j,3)
            Nodes(i,3)=FULL(j,5);
if FULL(j,1)-FULL(j,2) == 0
                Nodes(i,5)=j;
else
                Nodes(i,6)=j;
end
end
if Nodes(i,1) == FULL(j,2) && Nodes(i,2) == FULL(j,4
            Nodes(i,3)=FULL(j,6);
if FULL(j,1)-FULL(j,2) == 0
                Nodes(i,7)=j;
else
                Nodes(i,4)=j;
end
end
end
end
A1=A*0;
ZerosUnk=0;
for i=1:NodesLen
if Nodes(i,3)==0
for j=5:6
if Nodes(i,j)~=0
                ZerosUnk(end+i,1)=6*Nodes(i,j)-5
end
```

```
end
if Nodes(i,4)==0 && Nodes(i,7)==0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)~=0¨
            A1(:,6*Nodes(i,5))=-A(:,6*Nodes(i,6)-3);
            A1(:,6*Nodes(i,5)-3)=A(:,6*Nodes(i,6));
            ZerosUnk(end+i,1)=6*Nodes(i,6)-3;
            ZerosUnk(end+i,1)=6*Nodes(i,6);
end
if Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)~=0
            A1(:,6*Nodes(i,5)-1)=-A(:,6*Nodes(i,6)-
4)*FULL(Nodes(i,6),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            A1(:,6*Nodes(i,5)-4)=A(:,6*Nodes(i,6)-
1)*FULL(Nodes(i,6),9)/FULL(Nodes(i,5),8);%Teta-->Fi
            ZerosUnk(end+i,1)=6*Nodes(i,6)-4;
            ZerosUnk(end+i,1)=6*Nodes(i,6)-1;
end
end
if Nodes(i,3)==1
if Nodes(i,4)==0 && Nodes(i,7)==0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)~=0
            A1(:,6*Nodes(i,5))=-A(:,6*Nodes(i,6)-3);
            A1(:,6*Nodes(i,5)-3)=A(:,6*Nodes(i,6));
            A1(:,6*Nodes(i,5)-2)=-A(:,6*Nodes(i,6)-2);
            ZerosUnk(end+i,1)=6*Nodes(i,6)-3;
            ZerosUnk(end+i,1)=6*Nodes(i,6);
            ZerosUnk(end+i,1)=6*Nodes(i,6)-2;
end
if Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)~=0
            A1(:,6*Nodes(i,5)-1)=-A(:,6*Nodes(i,6)-
4)*FULL(Nodes(i,6),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            A1(:,6*Nodes(i,5)-4)=A(:,6*Nodes(i,6)-
1)*FULL(Nodes(i,6),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            A1(:,6*Nodes(i,5)-5)=A(:,6*Nodes(i,6)-
5)*FULL(Nodes(i,6),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
            ZerosUnk(end+i,1)=6*Nodes(i,6)-4;
            ZerosUnk(end+i,1)=6*Nodes(i,6)-5;
            ZerosUnk(end+i,1)=6*Nodes(i,6)-1;
end
end
end
ZerosUnk=unique(ZerosUnk);
ZerosUnk(1)=[];
k=0;
for i=1:NodesLen
if Nodes(i,3)==0
if Nodes(i,4)~=0
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,4)-2;
end
if Nodes(i,7)~=0
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,7)-2;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,7)~=0 && Nodes(i,5)==0 && Nodes(i,6)==0
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,7)-4;
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,7)-1;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,7)~=0
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,7)-3;
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,7);
end
end
```

```
if Nodes(i,3)~=0        if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,7)~=0 && Nodes(i,5)==0 &&
Nodes(i,6)==0
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,7)-4;
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,7)-1;
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,7)-5;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,7)~=0
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,7)-3;
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,7);
            k=k+1;
            ZerosUnk(k,2)=6*Nodes(i,7)-2;
end
end
end
ZerosUnk=sort(ZerosUnk);
for i=1:size(ZerosUnk,1)
    A(:,ZerosUnk(i,1))=0;
    A1(ZerosUnk(i,2),ZerosUnk(i,1))=-1;
end
for i=1:NodesLen
    k=0;
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)==0 && Nodes(i,7)==0
        k=1;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)==0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)==0
        k=2;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)==0 && Nodes(i,6)==0 && Nodes(i,7)~=0
        k=3;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)==0
        k=4;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)==0 && Nodes(i,7)~=0
        k=5;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)==0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)~=0
        k=6;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)~=0
        k=7;
end
if Nodes(i,4)==0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)==0 && Nodes(i,7)~=0
        k=8;
end
if Nodes(i,4)==0 && Nodes(i,5)==0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)~=0
        k=9;
end
if Nodes(i,4)==0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)~=0
        k=10;
end
switch k
case 1
            A1(6*Nodes(i,4)-4,6*Nodes(i,5)-
1)=FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            A1(6*Nodes(i,4)-3,6*Nodes(i,5))=-1;
            A1(6*Nodes(i,4)-1,6*Nodes(i,5)-4)=-
FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            A1(6*Nodes(i,4),6*Nodes(i,5)-3)=1;
```

```
if Nodes(i,3)~=0
                A1(6*Nodes(i,4)-5,6*Nodes(i,5)-5)=-
FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                A1(6*Nodes(i,4)-2,6*Nodes(i,5)-2)=-1;
end
case 2
            A1(6*Nodes(i,4)-4,6*Nodes(i,6)-4)=-
FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
            A1(6*Nodes(i,4)-3,6*Nodes(i,6)-3)=-1;
            A1(6*Nodes(i,4)-1,6*Nodes(i,6)-1)=-
FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,6),9);
            A1(6*Nodes(i,4),6*Nodes(i,6))=-1;
if Nodes(i,3)~=0
                A1(6*Nodes(i,4)-5,6*Nodes(i,6)-5)=-
FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
                A1(6*Nodes(i,4)-2,6*Nodes(i,6)-2)=-1;
end
case 3
            A1(6*Nodes(i,4)-4,ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7)-
1,1))=FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,7),9);
            A1(6*Nodes(i,4)-3,ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7),1))=1;
            A1(6*Nodes(i,4)-1,ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7)-4,1))=-
FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,7),8);
            A1(6*Nodes(i,4),ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7)-3,1))=-1;
if Nodes(i,3)~=0
                A1(6*Nodes(i,4)-5,ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,4)-7,1))=-
FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,7),8);
                A1(6*Nodes(i,4)-2,ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,4)-7,1))=1;
end
case 4
            A1(6*Nodes(i,4)-4,6*Nodes(i,5)-
1)=FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            A1(6*Nodes(i,4)-3,6*Nodes(i,5))=-1;
            A1(6*Nodes(i,4)-1,6*Nodes(i,5)-4)=-
FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            A1(6*Nodes(i,4),6*Nodes(i,5)-3)=1;
            A1(6*Nodes(i,4)-3,6*Nodes(i,6)-3)=-1;
            A1(6*Nodes(i,4),6*Nodes(i,6))=-1;
if Nodes(i,3)~=0
                A1(6*Nodes(i,4)-5,6*Nodes(i,5)-5)=-
FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                A1(6*Nodes(i,4)-2,6*Nodes(i,5)-2)=-1;
                A1(6*Nodes(i,4)-2,6*Nodes(i,6)-2)=-1;
end
case 5
            A1(6*Nodes(i,4)-4,6*Nodes(i,5)-
1)=FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            A1(6*Nodes(i,7)-4,6*Nodes(i,5)-4)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
            A1(6*Nodes(i,4)-3,ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7),1))=1;
            A1(6*Nodes(i,4)-3,6*Nodes(i,5))=-1;
            A1(6*Nodes(i,4)-1,6*Nodes(i,5)-4)=-
FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            A1(6*Nodes(i,7)-1,6*Nodes(i,5)-1)=-
FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,5),9);
            A1(6*Nodes(i,4),ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7)-3,1))=-1;
            A1(6*Nodes(i,4),6*Nodes(i,5)-3)=1;
if Nodes(i,3)~=0
                A1(6*Nodes(i,4)-5,6*Nodes(i,5)-5)=-
FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                A1(6*Nodes(i,7)-5,6*Nodes(i,5)-5)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                A1(6*Nodes(i,4)-2,ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7)-2,1))=1;
                A1(6*Nodes(i,4)-2,6*Nodes(i,5)-2)=-1;
```

```
end
case 6
            A1(6*Nodes(i,4)-4,6*Nodes(i,6)-4)=-
FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
            A1(6*Nodes(i,7)-4,6*Nodes(i,6)-1)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,6),9);
            A1(6*Nodes(i,4)-3,ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7),1))=1;
            A1(6*Nodes(i,4)-3,6*Nodes(i,6)-3)=-1;
            A1(6*Nodes(i,4)-1,6*Nodes(i,6)-1)=-
FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,6),9);
            A1(6*Nodes(i,7)-1,6*Nodes(i,6)-
4)=FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,6),8);
            A1(6*Nodes(i,4),ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7)-3,1))=-1;
            A1(6*Nodes(i,4),6*Nodes(i,6))=-1;
if Nodes(i,3)~=0
                A1(6*Nodes(i,4)-5,6*Nodes(i,6)-5)=-
FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
                A1(6*Nodes(i,7)-5,6*Nodes(i,6)-5)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
                A1(6*Nodes(i,4)-2,ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7)-2,1))=1;
                A1(6*Nodes(i,4)-2,6*Nodes(i,6)-2)=-1;
end
case 7
            A1(6*Nodes(i,4)-4,6*Nodes(i,5)-
1)=FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            A1(6*Nodes(i,7)-4,6*Nodes(i,5)-4)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
            A1(6*Nodes(i,4)-3,ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7),1))=1;
            A1(6*Nodes(i,4)-3,6*Nodes(i,5))=-1;
            A1(6*Nodes(i,4)-3,6*Nodes(i,6)-3)=-1;
            A1(6*Nodes(i,4)-1,6*Nodes(i,5)-4)=-
FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            A1(6*Nodes(i,7)-1,6*Nodes(i,5)-1)=-
FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,5),9);
            A1(6*Nodes(i,4),ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7)-3,1))=-1;
            A1(6*Nodes(i,4),6*Nodes(i,5)-3)=1;
            A1(6*Nodes(i,4),6*Nodes(i,6))=-1;
if Nodes(i,3)~=0
                A1(6*Nodes(i,4)-5,6*Nodes(i,5)-5)=-
FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                A1(6*Nodes(i,7)-5,6*Nodes(i,5)-5)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                A1(6*Nodes(i,4)-2,ZerosUnk(ZerosUnk(:,2)==6*Nodes(i,7)-2,1))=1;
                A1(6*Nodes(i,4)-2,6*Nodes(i,5)-2)=-1;
                A1(6*Nodes(i,4)-2,6*Nodes(i,6)-2)=-1;
end
case 8
            A1(6*Nodes(i,7)-4,6*Nodes(i,5)-4)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
            A1(6*Nodes(i,7)-3,6*Nodes(i,5)-3)=-1;
            A1(6*Nodes(i,7)-1,6*Nodes(i,5)-1)=-
FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,5),9);
            A1(6*Nodes(i,7),6*Nodes(i,5))=-1
if Nodes(i,3)~=0
                A1(6*Nodes(i,7)-5,6*Nodes(i,5)-5)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                A1(6*Nodes(i,7)-2,6*Nodes(i,5)-2)=-1;
end
case 9
            A1(6*Nodes(i,7)-4,6*Nodes(i,6)-1)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,6),9);
            A1(6*Nodes(i,7)-3,6*Nodes(i,6))=1;
            A1(6*Nodes(i,7)-1,6*Nodes(i,6)-
4)=FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,6),8);
```

```
            A1(6*Nodes(i,7),6*Nodes(i,6)-3)=-1;
if Nodes(i,3)~=0
                A1(6*Nodes(i,7)-5,6*Nodes(i,6)-5)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
                A1(6*Nodes(i,7)-2,6*Nodes(i,6)-2)=-1;
end
case 10
            A1(6*Nodes(i,7)-4,6*Nodes(i,5)-4)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
            A1(6*Nodes(i,7)-3,6*Nodes(i,5)-3)=-1;
            A1(6*Nodes(i,7)-3,6*Nodes(i,6))=1;
            A1(6*Nodes(i,7)-1,6*Nodes(i,5)-1)=-
FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,5),9);
            A1(6*Nodes(i,7),6*Nodes(i,5))=-1;
            A1(6*Nodes(i,7),6*Nodes(i,6)-3)=-1;
if Nodes(i,3)~=0
                A1(6*Nodes(i,7)-5,6*Nodes(i,5)-5)=-
FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                A1(6*Nodes(i,7)-2,6*Nodes(i,5)-2)=-1;
                A1(6*Nodes(i,7)-2,6*Nodes(i,6)-2)=-1;
end
end
end

for i=1:number
    B(6*i-5,1)=FULL(i,10)*((FULL(i,7)-FULL(i,11))^2)/2+FULL(i,12)*((FULL(i,7)-
FULL(i,13))^3)/6+FULL(i,14)*((FULL(i,7)-FULL(i,15))^4)/24-
FULL(i,14)*((FULL(i,7)-FULL(i,16))^4)/24;
    B(6*i-4,1)=FULL(i,10)*(FULL(i,7)-FULL(i,11))+FULL(i,12)*((FULL(i,7)-
FULL(i,13))^2)/2+FULL(i,14)*((FULL(i,7)-FULL(i,15))^3)/6-FULL(i,14)*((FULL(i,7)-
FULL(i,16))^3)/6;
    B(6*i-3,1)=-(FULL(i,10)+FULL(i,12)*(FULL(i,7)-
FULL(i,13))+FULL(i,14)*((FULL(i,7)-FULL(i,15))^2)/2-FULL(i,14)*((FULL(i,7)-
FULL(i,16))^2)/2);
    B(6*i-2,1)=-(FULL(i,12)+FULL(i,14)*(FULL(i,7)-FULL(i,15))-
FULL(i,14)*(FULL(i,7)-FULL(i,16)));
    B(6*i-1,1)=FULL(i,17)*(FULL(i,7)-FULL(i,18))+FULL(i,19)*((FULL(i,7)-
FULL(i,20))^2)/2-FULL(i,19)*((FULL(i,7)-FULL(i,21))^2)/2;
    B(6*i,1)=FULL(i,17)+FULL(i,19)*(FULL(i,7)-FULL(i,20))-FULL(i,19)*(FULL(i,7)-
FULL(i,21));
end

A=A+A1;

B=-1*B;
Xstar=A\B;
set(handles.Results,'Enable','on');

function Regen_Callback(~, ~, ~)
global FULL number
cla;
m(1)=min(FULL(:,1));
m(2)=min(FULL(:,3));
m(3)=max(FULL(:,2));
m(4)=max(FULL(:,4));
line(m(1)-1,m(2)-1);
line(m(3)+1,m(4)+1);
for i=1:number;
    x(1)=FULL(i,1);
    x(2)=FULL(i,2);
    y(1)=FULL(i,3);
    y(2)=FULL(i,4);
    line(x,y,'marker','o');
    text((x(1)+x(2))./2,(y(1)+y(2))./2,int2str(i),'BackgroundColor','w');
```

```
    hold;
end;

function Results_Callback(~, ~, ~)
global Xstar Nodes NodesLen ZerosUnk FULL number X Y;
Y=Xstar*0;
X=Y;
for i=1:size(ZerosUnk,1)
    Y(ZerosUnk(i,2),1)=Xstar(ZerosUnk(i,1),1);
end
for i=1:NodesLen
    k=0;
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)==0 && Nodes(i,7)==0
        k=1;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)==0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)==0
        k=2;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)==0 && Nodes(i,6)==0 && Nodes(i,7)~=0
        k=3;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)==0
        k=4;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)==0 && Nodes(i,7)~=0
        k=5;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)==0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)~=0
        k=6;
end
if Nodes(i,4)~=0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)~=0
        k=7;
end
if Nodes(i,4)==0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)==0 && Nodes(i,7)~=0
        k=8;
end
if Nodes(i,4)==0 && Nodes(i,5)==0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)~=0
        k=9;
end
if Nodes(i,4)==0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)~=0
        k=10;
end
if Nodes(i,4)==0 && Nodes(i,5)~=0 && Nodes(i,6)~=0 && Nodes(i,7)==0
        k=11;
end
switch k
case 1
            X(6*Nodes(i,5)-4,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-4,1);%EIfi
            X(6*Nodes(i,5)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-3,1);%M
            X(6*Nodes(i,5)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-2,1);
            X(6*Nodes(i,5)-1,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-1,1);
            X(6*Nodes(i,5),1)=Xstar(6*Nodes(i,5),1);
            Y(6*Nodes(i,4)-4,1)=-X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            Y(6*Nodes(i,4)-3,1)=X(6*Nodes(i,5),1);
            Y(6*Nodes(i,4)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
4,1)*FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            Y(6*Nodes(i,4),1)=-X(6*Nodes(i,5)-3,1);
if Nodes(i,3)~=0
                X(6*Nodes(i,5)-5,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-5,1);
                Y(6*Nodes(i,4)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                Y(6*Nodes(i,4)-2,1)=X(6*Nodes(i,5)-2,1);
end
```

```
case 2
            X(6*Nodes(i,6)-4,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-4,1);
            X(6*Nodes(i,6)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-3,1);
            X(6*Nodes(i,6)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-2,1);
            X(6*Nodes(i,6)-1,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-1,1);
            X(6*Nodes(i,6),1)=Xstar(6*Nodes(i,6),1);
            Y(6*Nodes(i,4)-4,1)=X(6*Nodes(i,6)-
4,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
            Y(6*Nodes(i,4)-3,1)=X(6*Nodes(i,6)-3,1);
            Y(6*Nodes(i,4)-1,1)=X(6*Nodes(i,6)-
1,1)*FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,6),9);
            Y(6*Nodes(i,4),1)=-X(6*Nodes(i,6),1);
if Nodes(i,3)~=0
                X(6*Nodes(i,6)-5,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-5,1);
                Y(6*Nodes(i,4)-5,1)=X(6*Nodes(i,6)-
5,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
                Y(6*Nodes(i,4)-2,1)=X(6*Nodes(i,6)-2,1);
end
case 3
            Y(6*Nodes(i,4)-4,1)=-Y(6*Nodes(i,7)-
1,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,7),9);
            Y(6*Nodes(i,4)-3,1)=-Y(6*Nodes(i,7),1);
            Y(6*Nodes(i,4)-1,1)=Y(6*Nodes(i,7)-
4,1)*FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,7),8);
            Y(6*Nodes(i,4),1)=-Y(6*Nodes(i,7)-3,1);
if Nodes(i,3)~=0
                Y(6*Nodes(i,4)-5,1)=Y(6*Nodes(i,7)-
5,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,7),8);%EIv
                Y(6*Nodes(i,4)-2,1)=-Y(6*Nodes(i,7)-2,1);
end
case 4
            X(6*Nodes(i,5)-4,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-4,1);
            X(6*Nodes(i,5)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-3,1);
            X(6*Nodes(i,5)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-2,1);
            X(6*Nodes(i,5)-1,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-1,1);
            X(6*Nodes(i,5),1)=Xstar(6*Nodes(i,5),1);
            X(6*Nodes(i,6)-4,1)=-X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,6),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            X(6*Nodes(i,6)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-3,1);
            X(6*Nodes(i,6)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-2,1);
            X(6*Nodes(i,6)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
4,1)*FULL(Nodes(i,6),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            X(6*Nodes(i,6),1)=Xstar(6*Nodes(i,6),1);
            Y(6*Nodes(i,4)-4,1)=-X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            Y(6*Nodes(i,4)-3,1)=X(6*Nodes(i,5),1)+X(6*Nodes(i,6)-3,1);
            Y(6*Nodes(i,4)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
4,1)*FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            Y(6*Nodes(i,4),1)=-X(6*Nodes(i,5)-3,1)+X(6*Nodes(i,6),1);
if Nodes(i,3)~=0
                X(6*Nodes(i,5)-5,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-5,1);
                X(6*Nodes(i,6)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,6),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                Y(6*Nodes(i,4)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                Y(6*Nodes(i,4)-2,1)=X(6*Nodes(i,6)-2,1)+X(6*Nodes(i,5)-2,1);
end
case 5
            X(6*Nodes(i,5)-4,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-4,1);
            X(6*Nodes(i,5)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-3,1);
            X(6*Nodes(i,5)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-2,1);
            X(6*Nodes(i,5)-1,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-1,1);
            X(6*Nodes(i,5),1)=Xstar(6*Nodes(i,5),1);
```

```
            Y(6*Nodes(i,7)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,5),9);
            Y(6*Nodes(i,4)-4,1)=-X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            Y(6*Nodes(i,4)-3,1)=X(6*Nodes(i,5),1)-Y(6*Nodes(i,7),1);
            Y(6*Nodes(i,4)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
4,1)*FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            Y(6*Nodes(i,4),1)=-X(6*Nodes(i,5)-3,1)+Y(6*Nodes(i,7)-3,1);
if Nodes(i,3)~=0
                X(6*Nodes(i,5)-5,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-5,1);
                Y(6*Nodes(i,4)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                Y(6*Nodes(i,7)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                Y(6*Nodes(i,4)-2,1)=Y(6*Nodes(i,5)-2,1)-X(6*Nodes(i,7)-2,1);%Q
end
case 6
            X(6*Nodes(i,6)-4,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-4,1);
            X(6*Nodes(i,6)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-3,1);
            X(6*Nodes(i,6)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-2,1);
            X(6*Nodes(i,6)-1,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-1,1);
            X(6*Nodes(i,6),1)=Xstar(6*Nodes(i,6),1);
            Y(6*Nodes(i,4)-4,1)=X(6*Nodes(i,6)-
4,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
            Y(6*Nodes(i,4)-3,1)=X(6*Nodes(i,6)-3,1)-X(6*Nodes(i,7),1);
            Y(6*Nodes(i,4)-1,1)=X(6*Nodes(i,6)-
1,1)*FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,6),9);
            Y(6*Nodes(i,4),1)=X(6*Nodes(i,6),1)+Y(6*Nodes(i,7)-3,1);
            Y(6*Nodes(i,7)-4,1)=X(6*Nodes(i,6)-
1,1)*FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,6),9);
            Y(6*Nodes(i,7)-3,1)=X(6*Nodes(i,4),1)-X(6*Nodes(i,6),1);
            Y(6*Nodes(i,7)-1,1)=X(6*Nodes(i,6)-
4,1)*FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,6),8);
            Y(6*Nodes(i,7),1)=-X(6*Nodes(i,4)-3,1)+X(6*Nodes(i,6)-3,1);
if Nodes(i,3)~=0
                X(6*Nodes(i,6)-5,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-5,1);
                Y(6*Nodes(i,4)-5,1)=X(6*Nodes(i,6)-
5,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
                Y(6*Nodes(i,7)-5,1)=X(6*Nodes(i,6)-
5,1)*FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
                Y(6*Nodes(i,4)-2,1)=Y(6*Nodes(i,6)-2,1)-X(6*Nodes(i,7)-2,1);
end
case 7
            X(6*Nodes(i,5)-4,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-4,1);
            X(6*Nodes(i,5)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-3,1);
            X(6*Nodes(i,5)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-2,1);
            X(6*Nodes(i,5)-1,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-1,1);
            X(6*Nodes(i,5),1)=Xstar(6*Nodes(i,5),1);
            X(6*Nodes(i,6)-4,1)=-X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,6),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            X(6*Nodes(i,6)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-3,1);
            X(6*Nodes(i,6)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-2,1);
            X(6*Nodes(i,6)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
4,1)*FULL(Nodes(i,6),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            X(6*Nodes(i,6),1)=Xstar(6*Nodes(i,6),1);
            Y(6*Nodes(i,4)-4,1)=-X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            Y(6*Nodes(i,4)-3,1)=X(6*Nodes(i,5),1)+X(6*Nodes(i,6)-3,1)-
X(6*Nodes(i,7),1);
            Y(6*Nodes(i,4)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
4,1)*FULL(Nodes(i,4),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            Y(6*Nodes(i,4),1)=-X(6*Nodes(i,5)-
3,1)+X(6*Nodes(i,6),1)+Y(6*Nodes(i,7)-3,1);
```

```
            Y(6*Nodes(i,7)-4,1)=X(6*Nodes(i,5)-
4,1)*FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            Y(6*Nodes(i,7)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
if Nodes(i,3)~=0
                X(6*Nodes(i,5)-5,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-5,1);
                Y(6*Nodes(i,4)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,4),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                X(6*Nodes(i,6)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,6),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                Y(6*Nodes(i,7)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                Y(6*Nodes(i,4)-2,1)=Y(6*Nodes(i,6)-2,1)-X(6*Nodes(i,7)-2,1);
end
case 8
            X(6*Nodes(i,5)-4,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-4,1);
            X(6*Nodes(i,5)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-3,1);
            X(6*Nodes(i,5)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-2,1);
            X(6*Nodes(i,5)-1,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-1,1);
            X(6*Nodes(i,5),1)=Xstar(6*Nodes(i,5),1);
            Y(6*Nodes(i,7)-4,1)=X(6*Nodes(i,5)-
4,1)*FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
            Y(6*Nodes(i,7)-3,1)=X(6*Nodes(i,5)-3,1);
            Y(6*Nodes(i,7)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,5),9);
            Y(6*Nodes(i,7),1)=-X(6*Nodes(i,5),1);
if Nodes(i,3)~=0
                X(6*Nodes(i,5)-5,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-5,1);
                Y(6*Nodes(i,7)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                Y(6*Nodes(i,7)-2,1)=X(6*Nodes(i,5)-2,1);
end
case 9
            X(6*Nodes(i,6)-4,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-4,1);
            X(6*Nodes(i,6)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-3,1);
            X(6*Nodes(i,6)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-2,1);
            X(6*Nodes(i,6)-1,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-1,1);
            X(6*Nodes(i,6),1)=Xstar(6*Nodes(i,6),1);
            Y(6*Nodes(i,7)-4,1)=X(6*Nodes(i,6)-
1,1)*FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,7),9);
            Y(6*Nodes(i,7)-3,1)=-X(6*Nodes(i,6),1);
            Y(6*Nodes(i,7)-1,1)=-X(6*Nodes(i,6)-
4,1)*FULL(Nodes(i,6),9)/FULL(Nodes(i,7),8);
            Y(6*Nodes(i,7),1)=X(6*Nodes(i,6)-3,1);
if Nodes(i,3)~=0
                X(6*Nodes(i,5)-5,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-5,1);
                Y(6*Nodes(i,7)-5,1)=X(6*Nodes(i,6)-
5,1)*FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,6),8);
                Y(6*Nodes(i,7)-2,1)=X(6*Nodes(i,6)-2,1);
end
case 10
            X(6*Nodes(i,5)-4,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-4,1);
            X(6*Nodes(i,5)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-3,1);
            X(6*Nodes(i,5)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-2,1);
            X(6*Nodes(i,5)-1,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-1,1);
            X(6*Nodes(i,5),1)=Xstar(6*Nodes(i,5),1);
            X(6*Nodes(i,6)-4,1)=-X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,6),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            X(6*Nodes(i,6)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-3,1);
            X(6*Nodes(i,6)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-2,1);
            X(6*Nodes(i,6)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
4,1)*FULL(Nodes(i,6),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            X(6*Nodes(i,6),1)=Xstar(6*Nodes(i,6),1);
```

```
            Y(6*Nodes(i,7)-4,1)=X(6*Nodes(i,5)-
4,1)*FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
            Y(6*Nodes(i,7)-3,1)=X(6*Nodes(i,5)-3,1)-X(6*Nodes(i,5),1);
            Y(6*Nodes(i,7)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,7),9)/FULL(Nodes(i,5),9);
            Y(6*Nodes(i,7),1)=X(6*Nodes(i,5),1)+X(6*Nodes(i,6)-3,1);
if Nodes(i,3)~=0
                X(6*Nodes(i,5)-5,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-5,1);
                X(6*Nodes(i,6)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,6),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                Y(6*Nodes(i,7)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,7),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                Y(6*Nodes(i,7)-2,1)=X(6*Nodes(i,5)-2,1)+X(6*Nodes(i,6)-2,1);%Q
end
case 11
            X(6*Nodes(i,5)-4,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-4,1);
            X(6*Nodes(i,5)-3,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-3,1);
            X(6*Nodes(i,5)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-2,1);
            X(6*Nodes(i,5)-1,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-1,1);
            X(6*Nodes(i,5),1)=Xstar(6*Nodes(i,5),1);
            X(6*Nodes(i,6)-4,1)=-X(6*Nodes(i,5)-
1,1)*FULL(Nodes(i,6),8)/FULL(Nodes(i,5),9);
            X(6*Nodes(i,6)-3,1)=-X(6*Nodes(i,5),1);
            X(6*Nodes(i,6)-2,1)=Xstar(6*Nodes(i,6)-2,1);
            X(6*Nodes(i,6)-1,1)=X(6*Nodes(i,5)-
4,1)*FULL(Nodes(i,6),9)/FULL(Nodes(i,5),8);
            X(6*Nodes(i,6),1)=X(6*Nodes(i,5)-3,1);
if Nodes(i,3)~=0
                X(6*Nodes(i,5)-5,1)=Xstar(6*Nodes(i,5)-5,1);
                X(6*Nodes(i,6)-5,1)=X(6*Nodes(i,5)-
5,1)*FULL(Nodes(i,6),8)/FULL(Nodes(i,5),8);
                X(6*Nodes(i,6)-2,1)=-X(6*Nodes(i,5)-2,1);
end
end
end
for i=1:6*number
if abs(X(i,1))<0.0000000001
        X(i,1)=0;
end
if abs(Y(i,1))<0.0000000001
        Y(i,1)=0;
end
end
display(X);
display(Y);
Res;
```

Підпрограма AddRod

```
function varargout = AddRod(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @AddRod_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn',  @AddRod_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn',  [] , ...
'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
```

```
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function AddRod_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)

handles.output = hObject;

guidata(hObject, handles);
global FULL number;
for i=1:number
    temp(i)=i;
end;
set(handles.RodNum,'String',temp);
set(handles.x1,'String',FULL(1,1));
set(handles.x2,'String',FULL(1,2));
set(handles.y1,'String',FULL(1,3));
set(handles.y2,'String',FULL(1,4));
set(handles.z1,'Value',FULL(1,5)+1);
set(handles.z2,'Value',FULL(1,6)+1);
set(handles.EIz,'String',FULL(1,8));
set(handles.GIp,'String',FULL(1,9));
set(handles.Mz,'String',FULL(1,10));
set(handles.a,'String',FULL(1,11));
set(handles.Fy,'String',FULL(1,12));
set(handles.b,'String',FULL(1,13));
set(handles.qy,'String',FULL(1,14));
set(handles.c,'String',FULL(1,15));
set(handles.d,'String',FULL(1,16));
set(handles.Mx,'String',FULL(1,17));
set(handles.e,'String',FULL(1,18));
set(handles.mx,'String',FULL(1,19));
set(handles.f,'String',FULL(1,20));
set(handles.g,'String',FULL(1,21));

function varargout = AddRod_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)

varargout{1} = handles.output;

function x1_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,1)=str2double(get(handles.x1,'String'));

function x1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function y1_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,3)=str2double(get(handles.y1,'String'));

function y1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function x2_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,2)=str2double(get(handles.x2,'String'));

function x2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function y2_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,4)=str2double(get(handles.y2,'String'));

function y2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function z2_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL number;
i=get(handles.z2,'Value');
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,6)=i-1;
x=FULL(j,2);
y=FULL(j,4);
for k=1:number;
if FULL(k,1)==x & FULL(k,3)==y
        FULL(k,5)=i-1;
end;
if FULL(k,2)==x & FULL(k,4)==y
        FULL(k,6)=i-1;
end;
end;

function z2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function z1_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL number;
i=get(handles.z1,'Value');
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,5)=i-1;
x=FULL(j,1);
y=FULL(j,3);
for k=1:number;
if FULL(k,1)==x & FULL(k,3)==y
        FULL(k,5)=i-1;
end;
if FULL(k,2)==x & FULL(k,4)==y
        FULL(k,6)=i-1;
end;
end;

function z1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
```

```
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function RodNum_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
i=get(handles.RodNum,'Value');
set(handles.x1,'String',FULL(i,1));
set(handles.x2,'String',FULL(i,2));
set(handles.y1,'String',FULL(i,3));
set(handles.y2,'String',FULL(i,4));
set(handles.z1,'Value',FULL(i,5)+1);
set(handles.z2,'Value',FULL(i,6)+1);
set(handles.EIz,'String',FULL(i,8));
set(handles.GIp,'String',FULL(i,9));
set(handles.Mz,'String',FULL(i,10));
set(handles.a,'String',FULL(i,11));
set(handles.Fy,'String',FULL(i,12));
set(handles.b,'String',FULL(i,13));
set(handles.qy,'String',FULL(i,14));
set(handles.c,'String',FULL(i,15));
set(handles.d,'String',FULL(i,16));
set(handles.Mx,'String',FULL(i,17));
set(handles.e,'String',FULL(i,18));
set(handles.mx,'String',FULL(i,19));
set(handles.f,'String',FULL(i,20));
set(handles.g,'String',FULL(i,21));

function RodNum_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function EIz_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,8)=str2double(get(handles.EIz,'String'));

function EIz_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function GIp_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,9)=str2double(get(handles.GIp,'String'));

function GIp_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function Mz_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
```

```
FULL(j,10)=str2double(get(handles.Mz,'String'));

function Mz_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function Fy_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,12)=str2double(get(handles.Fy,'String'));

function Fy_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function qy_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,14)=str2double(get(handles.qy,'String'));

function qy_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function c_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,15)=str2double(get(handles.c,'String'));

function c_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function d_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,16)=str2double(get(handles.d,'String'));

function d_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function a_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,11)=str2double(get(handles.a,'String'));

function a_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
```

```
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function b_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,13)=str2double(get(handles.b,'String'));

function b_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function Mx_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,17)=str2double(get(handles.Mx,'String'));

function Mx_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function e_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,18)=str2double(get(handles.e,'String'));

function e_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function mx_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,19)=str2double(get(handles.mx,'String'));

function mx_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function f_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,20)=str2double(get(handles.f,'String'));

function f_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function g_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
j=get(handles.RodNum,'Value');
FULL(j,21)=str2double(get(handles.g,'String'));

function g_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function Add_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL number;
number=number+1;
for i=1:number
    temp(i)=i;
end;
for j=1:21
    FULL(number,j)=FULL(1,j);
end;
set(handles.RodNum,'String',temp);
set(handles.RodNum,'Value',number);
set(handles.x1,'String',FULL(number,1));
set(handles.x2,'String',FULL(number,2));
set(handles.y1,'String',FULL(number,3));
set(handles.y2,'String',FULL(number,4));
set(handles.z1,'Value',FULL(number,5)+1);
set(handles.z2,'Value',FULL(number,6)+1);
set(handles.EIz,'String',FULL(number,8));
set(handles.GIp,'String',FULL(number,9));
set(handles.Mz,'String',FULL(number,10));
set(handles.a,'String',FULL(number,11));
set(handles.Fy,'String',FULL(number,12));
set(handles.b,'String',FULL(number,13));
set(handles.qy,'String',FULL(number,14));
set(handles.c,'String',FULL(number,15));
set(handles.d,'String',FULL(number,16));
set(handles.Mx,'String',FULL(number,17));
set(handles.e,'String',FULL(number,18));
set(handles.mx,'String',FULL(number,19));
set(handles.f,'String',FULL(number,20));
set(handles.g,'String',FULL(number,21));

function Done_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;
row_power=FULL(:,1)-FULL(:,2);
Vert=FULL(row_power==0,:);
clear row_power;
Vert=sortrows(Vert,3);
Vert=sortrows(Vert,1);
row_power=FULL(:,3)-FULL(:,4);
Hor=FULL(row_power==0,:);
Hor=sortrows(Hor,1);
Hor=sortrows(Hor,3);
FULL=[Vert; Hor];
clear row_powerVertHor;
delete(handles.figure1);
```

Підпрограма DefLoads

```
function varargout = DefLoads(varargin)
```

```
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @DefLoads_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn',  @DefLoads_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn',  [] , ...
'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function DefLoads_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)

handles.output = hObject;

guidata(hObject, handles);
global glbLoads;
k=length(glbLoads);
if k==0
glbLoads=[0 0 6 0 0];
end;
    set(handles.Mz,'String',num2str(glbLoads(1)));
    set(handles.Fy,'String',num2str(glbLoads(2)));
    set(handles.qy,'String',num2str(glbLoads(3)));
    set(handles.Mx,'String',num2str(glbLoads(4)));
    set(handles.mx,'String',num2str(glbLoads(5)));

function varargout = DefLoads_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)

varargout{1} = handles.output;

function Mz_Callback(hObject, eventdata, handles)

function Mz_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function Fy_Callback(hObject, eventdata, handles)

function Fy_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function qy_Callback(hObject, eventdata, handles)

function qy_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function Mx_Callback(hObject, eventdata, handles)

function Mx_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function mx_Callback(hObject, eventdata, handles)

function mx_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
global glbLoads;
glbLoads(1)=str2double(get(handles.Mz,'String'));
glbLoads(2)=str2double(get(handles.Fy,'String'));
glbLoads(3)=str2double(get(handles.qy,'String'));
glbLoads(4)=str2double(get(handles.Mx,'String'));
glbLoads(5)=str2double(get(handles.mx,'String'));
MainWindow;
delete(handles.figure1);
```

Підпрограма DefPhys

```
function varargout = DefPhys(varargin)
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @DefPhys_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn',  @DefPhys_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn',  [] , ...
'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function DefPhys_OpeningFcn(hObject, ~, handles, varargin)

handles.output = hObject;

guidata(hObject, handles);
global glbPh
k=length(glbPh);
if k==0
    glbPh=[30000 13043.5 0.15 0.3 0.2 0.00045 0.0002 0.00065];
end;
set(handles.E,'String',num2str(glbPh(1)));
set(handles.G,'String',num2str(glbPh(2)));
set(handles.nu,'String',num2str(glbPh(3)));
set(handles.h,'String',num2str(glbPh(4)));
```

```
set(handles.b,'String',num2str(glbPh(5)));
set(handles.Iz,'String',num2str(glbPh(6)));
set(handles.Iy,'String',num2str(glbPh(7)));
set(handles.Ip,'String',num2str(glbPh(8)));

function varargout = DefPhys_OutputFcn(~, ~, handles)

varargout{1} = handles.output;

function E_CreateFcn(hObject, ~, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function G_CreateFcn(hObject, ~, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function nu_CreateFcn(hObject, ~, ~)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function Iz_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function Iy_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function Ip_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function h_Callback(hObject, eventdata, handles)

function h_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function b_Callback(~, eventdata, handles)

function b_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
```

```
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function btnCalculate_Callback(hObject, eventdata, handles)
global glbPhys glbPh;
E=str2double(get(handles.E,'String'));
nu=str2double(get(handles.nu,'String'));
b=str2double(get(handles.b,'String'));
h=str2double(get(handles.h,'String'));
G=E./(2.*(1+nu));
Iz=b.*h.^3./12;
Iy=h.*b.^3./12;
Ip=Iz+Iy;
glbPhys(1)=E.*Iz;
glbPhys(2)=G.*Ip;
set(handles.G,'String',G);
set(handles.Iz,'String',Iz);
set(handles.Iy,'String',Iy);
set(handles.Ip,'String',Ip);
glbPh = [E G nu h b Iz Iy Ip];

function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
MainWindow;
delete(handles.figure1);

function E_Callback(hObject, eventdata, handles)
```

Підпрограма DelRod

```
function varargout = DelRod(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @DelRod_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn',  @DelRod_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn',  [] , ...
'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function DelRod_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)

handles.output = hObject;

guidata(hObject, handles);
global number;
for i=1:number
    temp1(i)=i;
end;
set(handles.RodN,'String',temp1);
set(handles.RodN,'Value',number);

function varargout = DelRod_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
```

```
function RodN_Callback(hObject, eventdata, handles)

function RodN_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function btnDelete_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL number;
i=get(handles.RodN,'Value');
FULL(i,:)=[];
number=size(FULL,1);
for i=1:number
    temp1(i)=i;
end;
set(handles.RodN,'String',temp1);
set(handles.RodN,'Value',number);

function Done_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FULL;

row_power=FULL(:,1)-FULL(:,2);
Vert=FULL(row_power==0,:);
clear row_power;
Vert=sortrows(Vert,3);
Vert=sortrows(Vert,1);
row_power=FULL(:,3)-FULL(:,4);
Hor=FULL(row_power==0,:);
Hor=sortrows(Hor,1);
Hor=sortrows(Hor,3);
FULL=[Vert; Hor];
clear row_powerVertHor;
delete(handles.figure1);
```

Підпрограма Res

```
function varargout = Res(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @Res_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn',  @Res_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn',  [] , ...
'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function Res_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)

handles.output = hObject;

guidata(hObject, handles);
```

```
global X Y number;
for i=1:number
    temp(i)=i;
end;
set(handles.RodNum,'String',temp);
i=get(handles.RodNum,'Value');
set(handles.edit1,'String',X(6*i-5,1));
set(handles.edit7,'String',Y(6*i-5,1));
set(handles.edit2,'String',X(6*i-4,1));
set(handles.edit8,'String',Y(6*i-4,1));
set(handles.edit3,'String',X(6*i-3,1));
set(handles.edit9,'String',Y(6*i-3,1));
set(handles.edit4,'String',X(6*i-2,1));
set(handles.edit10,'String',Y(6*i-2,1));
set(handles.edit5,'String',X(6*i-1,1));
set(handles.edit11,'String',Y(6*i-1,1));
set(handles.edit6,'String',X(6*i,1));
set(handles.edit12,'String',Y(6*i,1));

function varargout = Res_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)

varargout{1} = handles.output;

function RodNum_Callback(hObject, eventdata, handles)
global X Y;
i=get(handles.RodNum,'Value');
set(handles.edit1,'String',X(6*i-5,1));
set(handles.edit7,'String',Y(6*i-5,1));
set(handles.edit2,'String',X(6*i-4,1));
set(handles.edit8,'String',Y(6*i-4,1));
set(handles.edit3,'String',X(6*i-3,1));
set(handles.edit9,'String',Y(6*i-3,1));
set(handles.edit4,'String',X(6*i-2,1));
set(handles.edit10,'String',Y(6*i-2,1));
set(handles.edit5,'String',X(6*i-1,1));
set(handles.edit11,'String',Y(6*i-1,1));
set(handles.edit6,'String',X(6*i,1));
set(handles.edit12,'String',Y(6*i,1));

function RodNum_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit5_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit5_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit6_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit6_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit7_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit7_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit8_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit8_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit9_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit9_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit10_Callback(hObject, eventdata, handles)
```

```
function edit10_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit11_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit11_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit12_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit12_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function Untitled_1_Callback(hObject, eventdata, handles)
```

Підпрограма SchemeGen

```
function varargout = SchemeGen(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @SchemeGen_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn',  @SchemeGen_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn',  [] , ...
'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function SchemeGen_OpeningFcn(hObject, ~, handles, varargin)

handles.output = hObject;

guidata(hObject, handles);

function varargout = SchemeGen_OutputFcn(~, eventdata, handles)

varargout{1} = handles.output;

function NRight_Callback(~, eventdata, handles)

function NRight_CreateFcn(hObject, ~, ~)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
```

```
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function NTop_Callback(hObject, eventdata, handles)

function NTop_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function MenuRight_Callback(hObject, eventdata, handles)
global DimRight;
i=get(handles.MenuRight,'Value');
set(handles.LRight,'String',DimRight(i));

function MenuRight_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function MenuTop_Callback(hObject, eventdata, handles)
global DimTop;
j=get(handles.MenuTop,'Value');
set(handles.LTop,'String',DimTop(j));

function MenuTop_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function LRight_Callback(hObject, eventdata, handles)
global DimRight;
i=get(handles.MenuRight,'Value');
DimRight(i)=str2double(get(handles.LRight,'String'));

function LRight_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function LTop_Callback(hObject, eventdata, handles)
global DimTop;
j=get(handles.MenuTop,'Value');
DimTop(j)=str2double(get(handles.LTop,'String'));

function LTop_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function Refresh_Callback(hObject, eventdata, handles)
global DimRight DimTop;
TempRight=str2double(get(handles.NRight,'String'));
TempTop=str2double(get(handles.NTop,'String'));
```

```
DimRight=zeros(TempRight,1);
DimTop=zeros(TempTop,1);
LR=str2double(get(handles.LRight,'String'));
LT=str2double(get(handles.LTop,'String'));
for i=1:TempRight
   temp1(i)=i;
end
for i=1:TempTop
   temp2(i)=i;
end
set(handles.MenuRight,'String',temp1);
set(handles.MenuTop,'String',temp2);
set(handles.MenuRight,'Enable','on');
set(handles.MenuTop,'Enable','on');
for i=1:TempRight
    DimRight(i)=LR;
end;
for i=1:TempTop
    DimTop(i)=LT;
end;
set(handles.LRight,'String',DimRight(1));
set(handles.LTop,'String',DimTop(1));

function Done_Callback(hObject, eventdata, handles)
global DimRight DimTop FULL glbPhys number glbLoads;
T=length(DimTop);
R=length(DimRight);
number=(T+1)*R+(R+1)*T;
FULL=zeros(number,21);
k=0;
for i=1:T
FULL(i,1)=0;
FULL(i,2)=0;
end
for i=1:R
for j=1:T
        FULL(T*i+j,1)=FULL(T*i,1)+DimRight(i);
        FULL(T*i+j,2)=FULL(T*i+j,1);
end;
end;
for i=0:R
    FULL(T*i+1,3)=0;
    FULL(T*i+1,4)=DimTop(1);
end;
for i=0:R
for j=1:(T-1)
        FULL(T*i+j+1,3)=FULL(T*i+j,4);
        FULL(T*i+j+1,4)=FULL(T*i+j+1,3)+DimTop(j+1);
end;
end;
for i=1:R
FULL(T*(R+1)+i,3)=0;
FULL(T*(R+1)+i,4)=0;
end
for i=1:T
for j=1:R
        FULL(T*(R+1)+i*R+j,3)=FULL(T*(R+1)+i*R,3)+DimTop(i);
        FULL(T*(R+1)+i*R+j,4)=FULL(T*(R+1)+i*R+j,3);
end;
end;
for i=0:T
    FULL(T*(R+1)+R*i+1,1)=0;
    FULL(T*(R+1)+R*i+1,2)=DimRight(1);
end;
```

```
for i=0:T
for j=1:(R-1)
        FULL(T*(R+1)+R*i+j+1,1)=FULL(T*(R+1)+R*i+j,2);
        FULL(T*(R+1)+R*i+j+1,2)=FULL(T*(R+1)+R*i+j+1,1)+DimRight(j+1);
end;
end;
for i=1:number
    FULL(i,7)=sqrt((FULL(i,2)-FULL(i,1))^2+(FULL(i,4)-FULL(i,3))^2);
    FULL(i,8)=glbPhys(1);
    FULL(i,9)=glbPhys(2);
    FULL(i,10)=glbLoads(1);
    FULL(i,11)=FULL(i,7)./2;
    FULL(i,12)=glbLoads(2);
    FULL(i,13)=FULL(i,7)./2;
    FULL(i,14)=glbLoads(3);
    FULL(i,15)=0;
    FULL(i,16)=FULL(i,7);
    FULL(i,17)=glbLoads(4);
    FULL(i,18)=FULL(i,7)./2;
    FULL(i,19)=glbLoads(5);
    FULL(i,20)=0;
    FULL(i,21)=FULL(i,7);
end
delete(handles.figure1);
```

ДОДАТОК Г

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ «ПРОВІДНИЙ ПРОЕКТНИЙ ІНСТИТУТ «ГІПРОПРОМ»

ТОВ «ППІ «ГІПРОПРОМ»

74-а, вул. Патріотична
м. Запоріжжя, 69005, Україна
Факс: (061)717-01-02
E-mail: secrgipr@ukr.net
Телефон: (061)717-01-01
ЄДРПОУ 32343302
ІПН 323433008249
Р-рах. № UA31305749 0000026006000010707 в
АТ «БАНК КРЕДИТ ДНІПРО»
м. Запоріжжя
МФО 305749

ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ «ВЕДУЩИЙ ПРОЕКТНЫЙ ИНСТИТУТ «ГИПРОПРОМ»

ООО «ВПИ «ГИПРОПРОМ»

74-а, ул. Патриотическая
г. Запорожье, 69005, Украина
Факс: (061)717-01-02
E-mail: secrgipr@ukr.net
Телефон: (061)717-01-01
ЕГРПОУ 32343302
ИНН 323433008249
Р-счет № UA31305749 00000 26006000010707 в
АО «БАНК КРЕДИТ ДНЕПР»
г. Запорожье
МФО 305749

02.09.2020р. № 12/30

Довідка про впровадження

Матеріали дисертації Шиляєва Олексія Сергійовича "Напружено-деформований стан залізобетонних перехресно-балкових систем" були використані під час виконання проектних робіт по проекту: «Реконструкция группы черновых клетей стана широкополосного 1700 ЛПЦ 1700 ММК ИМ ИЛЬИЧА» м. Маріуполь.

Головний інженер інституту М.В. Фесенко

ДОДАТОК Д

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Статті у наукових фахових виданнях України

1. Яременко О.Ф. Розрахунок нерозрізних залізобетонних балок із застосуванням повних діаграм деформацій матеріалів / О.Ф. Яременко, А.Я. Будзул, О.С. Шиляєв. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2010. – №39. – С. 366–372.

2. Яременко О.Ф. Сучасний стан в сфері розширення та посилення мостових прогонових конструкцій накладною ребристою плитою / О.Ф. Яременко, В.Г. Кваша, О.С. Шиляєв. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2012. – №46. – С. 394–398.

3. Шиляев А.С. Программная реализация алгоритмов численно-аналитического метода граничных элементов / А.С. Шиляев. // Вісник Київського національного університету технології та дизайну. – 2015. – №92. – С. 11–17.

4. Ковров А.В. Идентификация систем с перекрестными связями с использованием теории графов / А.В. Ковров, А.М. Чучмай, А.С. Шиляев. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2015. – №60. – С. 435–439.

5. Сур'янінов М.Г. Згин і кручення систем з перехресними зв’язками / М.Г. Сур'янінов, О.М. Чучмай, О.С. Шиляєв. // Міжвузівський збірник "НАУКОВІ НОТАТКИ", Луцьк. – 2017. – №58. – С. 295–300.

6. Сур'янінов М.Г. Чисельна реалізація розв'язку завдання про вигин і крутіння систем з перехресними зв'язками / М.Г. Сур'янінов, О.М. Чучмай, О.С. Шиляєв. // Міжвузівський збірник "НАУКОВІ НОТАТКИ", Луцьк. – 2017. – №59. – С. 257–262.

7. Корнеева И.Б. Компьютерные исследования напряженно-деформированного состояния плиты перекрытия из сталефибробетона /

И.Б. Корнеева, Н.Г. Сурьянинов, А.С. Шиляев. // Вісник Хмельницького національного університету. – 2018. – №257. – С. 271–276.

Статті у наукових періодичних виданнях інших держав

8. Surianinov M. Numerical and analytical boundary element method application In ribbed slab analysis / M. Surianinov, O. Chuchmai, O. Shyliaiev. // Tehnički glasnik. – 2015. – №4. – С. 432–436.

9. Сурьянинов Н.Г. Адаптация алгоритма численно-аналитического метода граничных элементов к расчету перекрестнобалочных систем / Н.Г. Сурьянинов, А.С. Шиляев. // International Academy Journal. Web of Scholar. – 2018. – №7. – С. 9–14.

10. Surianinov M. Investigation of Free Vibrations of Three-Layered Circular Shell Supported by Annular Ribs of Rigidity / M. Surianinov, T. Yemelianova, O. Shyliaiev. // Materials Science Forum. – 2019. – №968. – С. 437–443.

11. Surianinov M. Calculation of plate-beam systems by method of boundary elements / M. Surianinov, O. Shyliaiev. // International Journal of Engineering & Technology. – 2018. – №7 (2.23). – С. 238–241.

12. Сурьянинов Н.Г. Экспериментальные исследования и компьютерное моделирование железобетонной балки при пожаре / Н.Г. Сурьянинов, Ю.А. Отрош, А.С. Шиляев. // Natural and Technical Sciences. – 2018. – VI (22), Вип. 186 – С. 76–79.

13. Neutov S. Influence of long-term compressive stresses on strength of concrete and steel-fiber concrete prismatic element / S. Neutov, M. Sydorchuk, O. Shyliaiev. // MATEC Web of Conferences. – 2018. – №230. – С. 1–6.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

14. Yemelianova T.A. Free Vibrations Of Three-layered Closed Shell Supported By Longitudinal Stiffness Ribs [Електронний ресурс] / T.A. Yemelianova, M.H. Surianinov, O.S. Shyliaiev // 6TH International Congress on Technology -

Engineering - Kuala Lumpur - Malaysia (2018-07-19). – 2018. – Режим доступу до ресурсу: http://procedia.org/cpi/ICONTES-6-2111403.

15. Аніскін А. Розрахунок систем перехресних балок з використанням ПК ANSYS / А. Аніскін, О.С. Шиляєв // Тези 5 міжнародної конференції Актуальні проблеми інженерної механіки, Одеса, 22-25 травня / А. Аніскін, О.С. Шиляєв. – Одеса: Одеська державна академія будівництва та архітектури, 2018. – С. 245–247.

Відомості про апробацію результатів дисертації:

1. 3-я Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки», Одеса, 2016 р.;
2. 4-а Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки», Одеса, 2017 р.;
3. 5-а Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки», Одеса, 2018 р.;
4. Міжнародна конференціїя з новітніх досліджень в матеріалах та інженерії, Вішакхапатнам, Індія, 2018 р.;
5. 6-й Міжнародний конгрес з технології – Інженерії та Науки, Куала-Лумпур, Малайзія, 2018 р.;
6. Науково-технічні конференції професорсько-викладацького складу Одеської державної академії будівництва та архітектури у 2010...2018 рр.