



**ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

Кафедра інформаційних технологій та прикладної математики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання курсової роботи
з дисципліни
«Теорія ймовірностей і математична статистика»

Для студентів
першого (бакалаврського) рівня спеціальності 076
«Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»
ОП «Економіка будівельного підприємств»

«ЗАТВЕРДЖЕНО»

Вченою радою факультету ЕкУБ

Протокол № 1 від 7 вересня 2017 г.

Методичні вказівки розглянуті та рекомендовані до друку на засіданні кафедри ПОМ і САПР, протокол № 1 від 1 вересня 2017 г., та науково-методичної комісії факультету ЕкУБ, протокол № 1 від 5 вересня 2017 г.

Укладачі: д.т.н., професор Т.В. Ляшенко, професор кафедри ПОМ та САПР
Г.С. Карнаухова, ст. викладач кафедри ПОМ та САПР

Рецензенти: к.ф.-м.н., доцент Комлева Т.О., доцент кафедри вищої математики
к.ф.-м.н., доцент Чернишев В.Г., доцент кафедри математичних
методів аналізу економіки Одеського національного економічного
університету

Методичні вказівки містять завдання та вихідні дані до 30 варіантів курсової роботи під назвою «Сім завдань менеджера будівельної компанії», яку студент повинен виконати, використовуючи засоби теорії ймовірностей і математичної статистики. Показаний приклад виконання завдань. У додатку наведено ряд базових положень і формул.

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри прикладної та обчислювальної математики та САПР, д.ф.-м.н., професор Плотніков А.В.

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Завдання.....	6
2. Вихідні дані до завдань.....	9
3. Приклад виконання курсової роботи.....	11
Література.....	23
Додатки.....	24

ВСТУП

Курсова робота має назву

Сім завдань менеджера будівельної компанії

Для їх виконання необхідно використовувати базові поняття, положення і формули теорії ймовірностей та математичної статистики*. Це ті базові елементи даної дисципліни, без яких, з одного боку, неможливо освоїти інші засоби з величезного арсеналу імовірно-статистичних методів – тих, що можуть стати в нагоді менеджеру-аналітику. З іншого боку, як показує курсова робота, навіть ці «початки» дозволяють вирішувати багато конкретних практичних завдань.

Дані до завдань відповідно до варіанту знаходяться у відповідному рядку двох ***таблиць вихідних даних*** (Табл.1 и 2).

* Структура курсу «теорія ймовірностей і математична статистика» показана у вигляді схеми в **Додатку 1**.

Номер варіанту визначається (в залежності від вказівки викладача) або по журналу групи, або **по двозначному числу в кінці номера залікової книжки**. В останньому випадку номер варіанта – **залишок від ділення цього двозначного числа без остачі на 30** (кількість варіантів); варіанту **30** відповідають числа **00, 30, 60, 90**.

Для **завдання 7** до пари значень R_1 у рядку з номером варіанта додаються 14 пар в наступних рядках (починаючи з варіанта 17 – з переходом до перших номерів рядків), а до значення R_2 – числа в 5 наступних рядках (з переходом до перших номерів рядків, починаючи з варіанта 26).

Виконана робота повинна містити:

1. Титульний лист
(аналогічно показаному макету)
2. Номер варіанту
Для кожного з 7 завдань
3. Текст завдання
(обов'язково)
4. Дані до нього
5. Рішення
(включаючи потрібні графіки)

Міністерство освіти і науки України ОДАБА Кафедра прикладної та обчислювальної математики і САПР Сім завдань менеджера будівельної компанії КУРСОВА РОБОТА з теорії ймовірностей і математичної статистики <i>Вища та прикладна математика. Частина 3.1. Прикладна математика</i> Студента групи Мо-200 Івана Шансова Викладач професор Т.В. Чанс Одеса – 20

1. ЗАВДАННЯ

*Розрахунок ймовірностей подій за правилами додавання і множення ймовірностей (і їх наслідків)**

Завдання 1

На об'єкті монолітного будівництва подачу бетону забезпечують два працюючих паралельно змішувача і один бетононасос. Відомі ймовірності відмови змішувачів (q_1 і q_2) і насоса (q_3).

Для організації безперебійної роботи цього комплексу потрібно визначити його надійність і ймовірність простою через відмову обладнання.

Завдання 2

2.1. Конкурс на будівництво об'єкта може виграти одна з трьох компаній. Шанси компаній перемогти в конкурсі – h_1 , h_2 і $h_3 = (100 - h_1 - h_2)\%$ відповідно. Відомі ймовірності (ризики) перевищення термінів будівництва для цих компаній – f_1 , f_2 і f_3 .

Слід визначити ймовірність закінчення будівництва в строк.

2.2. Кожна із зазначених компаній буде один з 3 об'єктів.

Потрібно визначити ймовірності того, що:

- ♣ тільки один з об'єктів буде зданий в строк, ♣ хоча б один,
- ♣ всі три будуть здані в строк, ♣ ні один не буде зданий в строк.

Дерево рішень

Завдання 3

Компанія повинна вирішити: будувати невеликий завод з виробництва нового продукту, що випускається на ринок у наступному році, чи великий завод. Попит, високий чи низький, визначиться тільки після того, як завод вже буде збудовано, а продукт виготовлений. Маленький завод можна розширити, якщо попит виявиться високим.

Потрібно представити керівництву порівняльну оцінку альтернатив за критерієм EMV** (в грошових одиницях, г.о.), використовуючи дерево рішень і наступні дані:

* Див. Додаток 2.

** *Expected Monetary Value* – очікуване грошове значення – середній прибуток, який був би отриманий, якщо б дане рішення приймалося багаторазово.

- вартість великого заводу $Ст_K$ (млн. г.о.),
- вартість невеликого заводу $Ст_M$ (млн. г.о.)
- витрати на розширення виробництва $Ст_P$ (млн. г.о.);
- річний дохід великого (або розширеного) заводу при високому попиті $Д_В$
- при низькому попиті $Д_Н$ (млн. г.о.),
- малого заводу при будь-якому попиті $Д_м$ (млн. г.о.);
- оцінку відділом ринку ймовірностей високого і низького попиту – $P_В$ і $(1 - P_В)$.

Дискретна випадкова величина, біноміальний розподіл

Завдання 4

Задана ймовірність p успіху для кожної з n незалежних угод.

Потрібно:

- ♦ записати ряд і функцію розподілу числа вдалих угод, побудувати стовпчасту діаграму, полігон, графік функції розподілу;
- ♦ визначити математичне очікування числа успіхів і середнє квадратичне відхилення, показати їх на графіках;
- ♦ знайти ймовірності «не менше g », «менше h »
і «менш h , але не менше g » удач.

Безперервна випадкова величина

Завдання 5

Дана функція розподілу $F(x)$ параметра управління X , що приймає значення в інтервалі (a, b) .

Потрібно:

- знайти диференціальну функцію розподілу;
- побудувати графіки щільності та функції розподілу;
- визначити математичне очікування і середньоквадратичне відхилення, показати їх на графіках;
- знайти ймовірність попадання X в інтервал (g, h) , тобто $P(g < X < h)$ і відобразити її на графіках функції та щільності розподілу.

Завдання 6*

6.1. Встановлено, що час (T , хв) виготовлення закладної деталі для будівельних конструкцій можна вважати розподіленим нормально, з середнім μ і стандартним відхиленням σ .

Аналізуючи можливості підвищити ефективність виробництва, слід визначити:

- а) в якому діапазоні варіюють витрати часу T на цю деталь;
- б) шанси затратити менше a , від g до h та більше b хв.
(відобразити їх графічно, використовуючи нормальну криву);
- с) частку деталей, на виготовлення яких іде більш μ хв.

6.2. Потрібно також знайти і показати на графіку (під кривою розподілу) ймовірність того, що нормально розподілене зі стандартним відхиленням σ_Y значення показника якості цього виробу Y відхиляється не більше ніж на δ від номіналу.

Описова статистика, перевірка гіпотез

Завдання 7

Поточний контроль якості фірмової будівельної суміші здійснюють за значеннями міцності (R , МПа) 30 зразків матеріалу; використовується описова статистика: таблиця частот, гістограма, вибіркові середнє, дисперсія, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації.

Заміна одного з компонентів, добавки «1», новою, більш дорогою, добавкою «2», судячи з реклами, може поліпшити якість матеріалу, що окупило б додаткові вкладення.

Необхідно прийняти рішення - чи слід закуповувати і впроваджувати в технологію виробництва фірмової суміші нову дорожчу добавку.

Щоб прийняти рішення, необхідно перевірити, що друга добавка дійсно забезпечує більш високий рівень міцності.

Для перевірки використовуються дані виробничого контролю якості і результати випробування шести зразків з 2-ю добавкою.

* Необхідні для виконання завдання 6 значення функції Лапласа наведені в **Додатку 3**.

2. ВИХІДНІ ДАНІ ДО ЗАВДАНЬ

Таблиця 1

Дані до завдань 1- 4

Варіант	Завдання 1			Завдання 2					Завдання 3							Завдання 4			
	q_1	q_2	q_3	h_1	h_2	f_1	f_2	f_3	C_{TK}	C_{TM}	C_{TP}	D^B	D^H	D^M	P_B	p	n	g	h
1	0.2	0.2	0.1	20	30	0.1	0.2	0.2	16	8	10	30	15	15	0.9	0.1	4	1	3
2	0.2	0.3	0.1	30	20	0.1	0.2	0.3	15	8	9	30	15	15	0.8	0.2	4	1	3
3	0.2	0.4	0.1	10	30	0.1	0.2	0.4	15	7	9	30	15	15	0.7	0.3	4	1	3
4	0.2	0.5	0.1	10	20	0.2	0.2	0.1	14	7	8	30	15	15	0.6	0.4	4	1	3
5	0.3	0.1	0.1	10	40	0.3	0.2	0.1	13	7	8	30	15	15	0.5	0.5	4	1	3
6	0.3	0.2	0.1	10	50	0.4	0.2	0.1	13	6	7	20	10	10	0.4	0.6	4	1	3
7	0.3	0.3	0.1	10	60	0.2	0.2	0.2	12	6	7	20	10	10	0.3	0.7	4	1	3
8	0.3	0.4	0.1	10	70	0.3	0.3	0.3	11	6	6	20	10	10	0.2	0.8	4	1	3
9	0.4	0.1	0.1	10	80	0.1	0.1	0.2	11	5	6	20	10	10	0.1	0.9	4	1	3
10	0.4	0.2	0.1	20	20	0.2	0.1	0.1	10	5	6	20	10	10	0.7	1/4	4	1	3
11	0.4	0.3	0.1	20	10	0.1	0.2	0.1	9	5	5	20	10	10	0.9	3/4	4	1	3
12	0.4	0.4	0.1	20	40	0.3	0.2	0.3	9	4	5	20	10	10	0.8	1/8	4	1	3
13	0.1	0.1	0.2	20	50	0.4	0.2	0.3	8	4	5	18	9	9	0.7	3/8	4	1	3
14	0.1	0.2	0.2	20	60	0.4	0.2	0.4	7	4	4	18	9	9	0.6	5/8	4	1	3
15	0.1	0.3	0.2	20	70	0.3	0.2	0.3	7	3	4	18	9	9	0.5	7/8	4	1	3
16	0.1	0.4	0.2	30	10	0.3	0.4	0.2	6	3	3	10	5	5	0.4	0.1	5	2	4
17	0.1	0.5	0.2	30	20	0.3	0.4	0.2	16	8	10	30	15	15	0.3	0.2	5	2	4
18	0.2	0.1	0.2	30	30	0.3	0.4	0.2	15	8	9	30	15	15	0.2	0.3	5	1	3
19	0.5	0.5	0.1	30	40	0.3	0.2	0.3	15	7	9	30	15	15	0.1	0.4	5	1	3
20	0.5	0.1	0.1	30	50	0.3	0.2	0.3	14	7	8	30	15	15	0.7	0.5	5	1	3
21	0.5	0.2	0.1	30	60	0.3	0.2	0.3	13	7	8	30	15	15	0.9	0.6	5	1	3
22	0.5	0.3	0.1	50	10	0.1	0.4	0.1	13	6	7	20	10	10	0.8	0.7	5	1	3
23	0.5	0.4	0.1	50	20	0.1	0.4	0.1	12	6	7	20	10	10	0.7	0.8	5	1	3
24	0.2	0.1	0.1	50	30	0.1	0.1	0.5	11	6	6	20	10	10	0.6	0.9	5	1	3
25	0.4	0.5	0.1	50	40	0.1	0.2	0.5	11	5	6	20	10	10	0.5	1/4	5	2	4
26	0.2	0.2	0.2	40	10	0.1	0.5	0.1	10	5	6	20	10	10	0.4	3/4	5	1	3
27	0.2	0.3	0.2	40	20	0.1	0.5	0.2	9	5	5	20	10	10	0.3	1/8	5	2	4
28	0.2	0.4	0.2	40	30	0.2	0.2	0.4	9	4	5	20	10	10	0.2	3/8	5	1	3
29	0.3	0.1	0.2	40	40	0.2	0.2	0.5	8	4	5	18	9	9	0.1	5/8	5	1	3
30	0.3	0.2	0.2	60	10	0.2	0.5	0.3	7	4	4	18	9	9	0.7	7/8	5	1	3
TV	0.1	0.1	0.1	70	20	0.1	0.2	0.3	8	4	5	20	10	10	0.7	1/8	5	1	3

Дані до завдань 5-7

Варіант	Завдання 5					Завдання 6.1						6.2		Завдання 7		
	$F(x)$	a	b	g	h	μ	σ	a	b	g	h	σ_Y	δ	R_1		R_2
1	$x^2/100$	0	10	0	5	10	1	8	12.5	9	12	1	0.5	34.5	25.7	38.8
2	$x^2/81$	0	9	0	5	20	2	16	24	19	25	1	1	28.1	33.1	34.9
3	$x^2/64$	0	8	2	5	30	4	20	38	28	40	1	1.5	23.2	34.5	41.0
4	$x^2/49$	0	7	1	4	40	4	30	48	38	50	1	2	27.3	34.4	45.1
5	$x^2/36$	0	6	0	4	50	4	40	58	48	60	1	2.5	27.9	20.6	44.8
6	$x^2/25$	0	5	0	3	60	4	50	68	58	68	2	1	31.5	30.1	46.9
7	$x^2/16$	0	4	0	2	70	4	60	78	68	80	2	2	34.7	29.9	31.3
8	$x^2/9$	0	3	2	3	80	4	72	88	78	90	2	3	27.9	25.2	39.1
9	$x^2/4$	0	2	1	2	90	4	80	98	88	100	2	4	34.7	31.1	44.4
10	x^2	0	1	0.5	1.0	100	4	90	108	98	108	2	5	37.1	35.7	35.7
11	$x/2 + 0.5$	-1	1	-0.5	0.5	60	6	45	72	54	75	3	1.5	29.8	30.4	37.2
12	$x/4 + 0.5$	-2	2	-1.0	1.0	70	6	55	82	67	85	3	3	29.8	33.7	33.2
13	$x/6 + 0.5$	-3	3	-1.5	1.5	80	6	68	92	77	95	3	4.5	27.0	31.1	32.6
14	$x/8 + 0.5$	-4	4	-2.0	2.0	90	6	75	105	87	105	3	6	30.7	25.8	36.1
15	$x/10 + 0.5$	-5	5	-2.5	2.5	100	6	85	115	94	115	3	7.5	25.8	17.4	36.9
16	$x/12 + 0.5$	-6	6	-3.0	3.0	110	6	95	125	107	122	4	2	27.3	30.1	31.5
17	$x/14 + 0.5$	-7	7	-3.5	3.5	120	6	105	135	117	135	4	4	22.8	25.5	37.7
18	$x/16 + 0.5$	-8	8	-4.0	4.0	130	6	115	145	124	145	4	6	29.9	34.8	38.4
19	$x/18 + 0.5$	-9	9	-4.5	4.5	140	6	125	155	137	155	4	8	31.2	26.3	40.5
20	$x/20 + 0.5$	-10	10	-5.0	5.0	150	6	135	162	147	165	4	10	25.7	24.7	38.5
21	$x/22 + 0.5$	-11	11	-5.5	5.5	160	6	145	172	157	172	5	2.5	36.5	24.3	38.7
22	$x/24 + 0.5$	-12	12	-6.0	6.0	170	6	155	182	167	182	5	5	30.9	33.8	38.5
23	$x/26 + 0.5$	-13	13	-6.5	6.5	180	6	165	192	177	195	5	7.5	32.8	30.7	45.4
24	$x/28 + 0.5$	-14	14	-7.0	7.0	190	6	175	202	187	205	5	10	27.6	28.7	39.7
25	$x/30 + 0.5$	-15	15	-7.5	7.5	200	6	185	212	197	215	5	12.5	24.8	29.7	39.3
26	$x/4 - 1$	4	8	6	7	110	10	85	130	105	135	6	3	29.7	26.8	37.9
27	$x/8 - 1$	8	16	12	14	120	10	95	140	115	145	6	6	36.7	33.6	47.9
28	$x/12 - 1$	12	24	18	21	130	10	105	150	125	155	6	9	30.0	31.3	43.5
29	$x/16 - 1$	16	32	24	28	140	10	115	160	135	165	6	12	27.6	21.6	49.5
30	$x/20 - 1$	20	40	30	35	150	10	125	170	145	175	6	15	33.8	30.0	37.4
TV	$x/4 - 10$	40	44	41	43	50	2	45	54	49	53	50	25	31.9	33.7	35.0

3. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Варіант TV

Завдання 1

На об'єкті монолітного будівництва подачу бетону забезпечують два працюючих паралельно змішувача і один бетононасос. Відомі ймовірності відмови змішувачів (q_1 і q_2) і насоса (q_3).

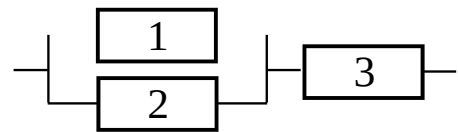
Для організації безперебійної роботи цього комплексу потрібно визначити його надійність і ймовірність простою через відмову обладнання.

$$q_1 = 0.1 \quad q_2 = 0.3 \quad q_3 = 0.1$$

Рішення

Робота комплексу відповідає роботі системи з двох послідовних блоків: «1-2» і «3».

За правилами розрахунку надійності систем:



1) ймовірність безперебійної роботи

$$P = p_{12} \cdot p_3 = (1 - q_1 \cdot q_2) \cdot (1 - q_3) = (1 - 0.1 \cdot 0.3) \cdot 0.9 = \mathbf{0.873}$$

2) ймовірність простою

$$Q = 1 - P = 1 - 0.873 = \mathbf{0.127}$$

Завдання 2

2. 1. Конкурс на будівництво об'єкту може виграти одна з трьох компаній.

Шанси компаній перемогти в конкурсі – h_1 , h_2 і $(100 - h_1 - h_2)\%$ відповідно.

Відомі ймовірності (ризика) перевищення термінів будівництва для цих компаній – f_1 , f_2 і f_3 .

Яка ймовірність закінчення будівництва в строк?

$$\begin{array}{lll} \text{Дано:} & h_1 = 70\% & h_2 = 20\% & h_3 = 10\% \\ & f_1 = 0.1 & f_2 = 0.2 & f_3 = 0.3 \end{array}$$

Рішення

Безумовна ймовірність події A – будівництва в строк – при декількох альтернативних умовах (при одній з гіпотез H) визначається за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_i P(H_i) \cdot P(A / H_i)$$

де $P(H_i)$ – ймовірності компаній виграти конкурс на будівництво,

$P(A / H_i)$ – ймовірності для компаній не перевищити термін.

$$P(A) = 0.7 \cdot (1 - 0.1) + 0.2 \cdot (1 - 0.2) + 0.1 \cdot (1 - 0.3) = 0.63 + 0.16 + 0.07 = 0.86$$

2.2. Кожна із зазначених компаній буде один з 3 об'єктів.

Потрібно визначити ймовірності того, що:

- ♣ тільки один з об'єктів буде зданий в строк,
- ♣ хоча б один,
- ♣ всі три будуть здані в строк,
- ♣ жоден не буде здано в строк.

Рішення

Позначимо ймовірності f перевищення строків символом q , ймовірності не перевищити строки – p .

$$\text{Тоді } q_1 = 0.1, q_2 = 0.2, q_3 = 0.3; \quad p_1 = 0.9, p_2 = 0.8, p_3 = 0.7$$

Використовуючи правила додавання і множення для ймовірностей подій, визначаємо:

$$\begin{aligned} P(\text{«тільки один»}) &= p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 \\ &= 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.7 = \mathbf{0.092} \end{aligned}$$

$$P(\text{«хоча б один»}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = \mathbf{0.994}$$

$$P(\text{«всі три»}) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 = \mathbf{0.504}$$

$$P(\text{«жоден»}) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = \mathbf{0.006}$$

Завдання 3

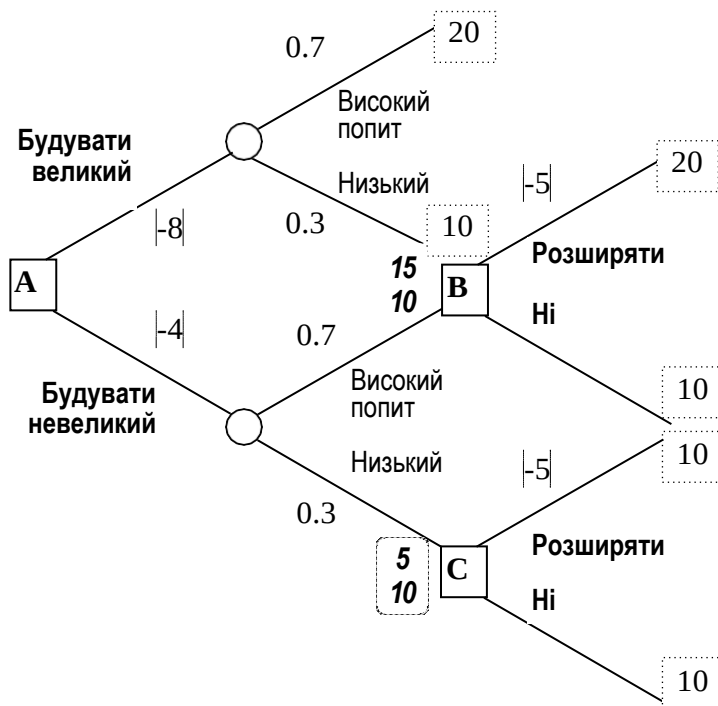
Компанія повинна вирішити: будувати невеликий завод з виробництва нового продукту, що випускається на ринок у наступному році, чи великий завод. Попит, високий чи низький, визначиться тільки після того, як завод вже буде збудовано, і продукт виготовлений. Маленький завод можна розширити, якщо попит виявиться високим.

Потрібно представити керівництву порівняльну оцінку альтернатив за критерієм EMV (в грошових одиницях, г.о.), використовуючи дерево рішень і наступні дані:

- вартість великого заводу $СТ_k$, • вартість невеликого заводу $СТ_m$,
- витрати на розширення виробництва $СТ_p$ (млн. г.о.);
- річний дохід великого (або розширеного) заводу при високому попиті $Д_v$,
- при низькому попиті $Д_n$, • малого заводу при будь-якому попиті $Д_m$ (млн. г.о.);
- оцінку відділом ринку ймовірностей високого і низького попиту – P_v і $(1 - P_v)$.

Задані: $СТ_k = 8$ $СТ_m = 4$ $СТ_p = 5$ $Д_v = 20$ $Д_m = 10$ $P_v = 0.7$

Побудовано наступне дерево рішень з вузлами альтернатив ($\square$) і ситуацій ($\circ$).



$$EMV(A_1) = 0.7 \cdot 20 + 0.3 \cdot 10 - 8 = 9 \text{ млн. г.о.}$$

$$EMV(A_2) = 0.7 \cdot 15 + 0.3 \cdot 10 - 4 = 9.5 \text{ млн. г.о.}$$

Рішення A_2 (нижня гілка) має перевагу в півмільйону г.о. $\rightarrow$ треба будувати невеликий завод. Якщо попит виявиться високим – завод треба розширяти.

Завдання 4

Задана ймовірність p успіху для кожної з n незалежних угод.

Потрібно:

- ♦ записати ряд і функцію розподілу числа вдалих угод, побудувати стовпчатую діаграму, полігон, графік функції розподілу;
- ♦ визначити математичне очікування числа успіхів і середнє квадратичне відхилення, показати їх на графіках;
- ♦ знайти ймовірності «не менше g », «менше h » і «менш h , але не менше g » успіхів.

Рішення при $p = 1/8$, $n = 5$, $g = 1$, $h = 3$

Число «успіхів» X в серії n незалежних випробувань з двома можливими результатами (успіх, невдача), при незмінній від випробування до випробування ймовірності успіху p , розподілено по біноміальному закону.

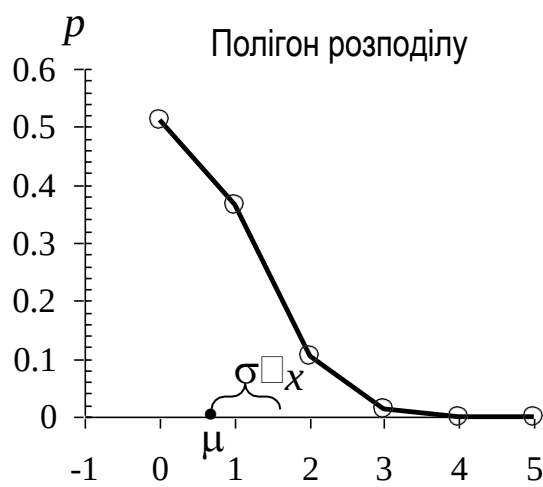
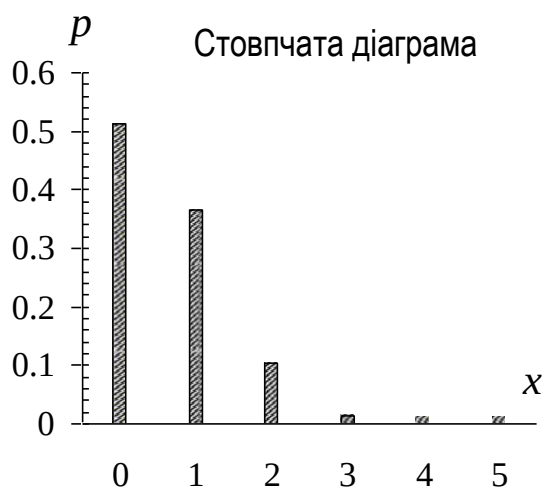
Ймовірності значень x величини X визначаються як

$$P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x},$$

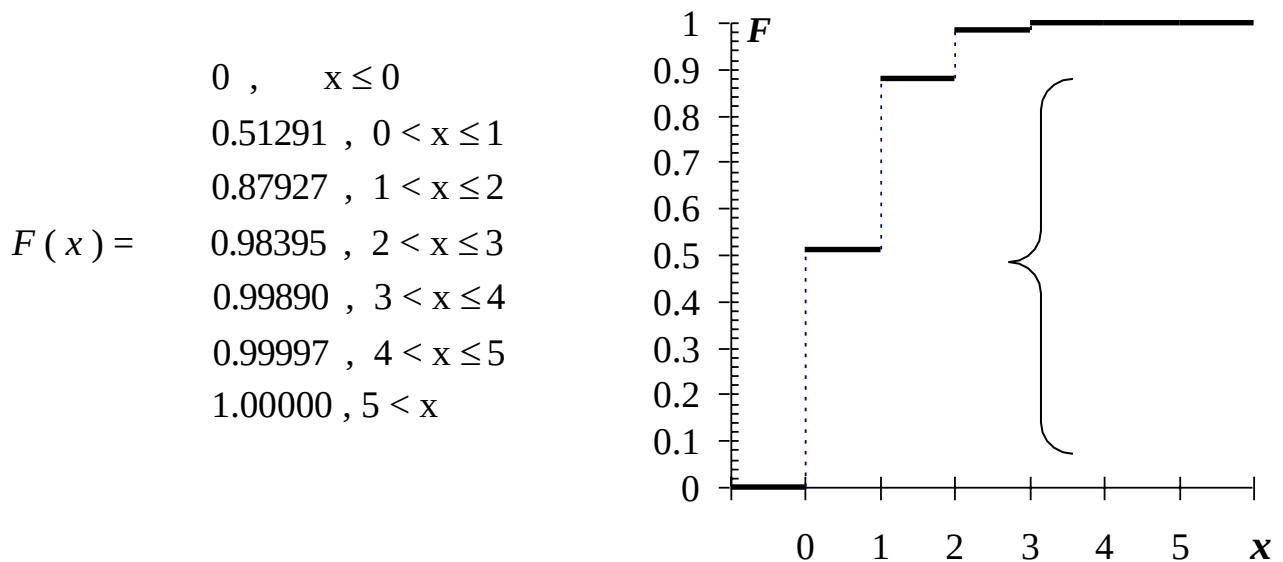
де $q = 1 - p$, $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ – число сполучень із n елементів по x .

Ряд розподілу числа вдалих угод

	0	1	2	3	4	5	
X:	0.51291	0.36636	0.10468	0.01495	0.00107	0.00003	$\Sigma = 1$



Функція розподілу



Математичне сподівання біноміальної випадкової величини

$$\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0.125 = \mathbf{0.625}$$

Середньоквадратичне відхилення біноміальної величини

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0.125 \cdot 0.875} = \sqrt{0.547} = \mathbf{0.740}$$

Імовірність «не менше 1» успішних угод з п'яти

$$P(X \geq g) = 1 - F(g) = 1 - F(1) = 1 - 0.51291 = \mathbf{0.48709}$$

Імовірність «менше 3» удач

$$P(X < h) = F(h) = F(3) = \mathbf{0.98395}$$

Імовірність «менше 3, але не менше 1» вдалої операції

$$P(g \leq X < h) = F(h) - F(g) = F(3) - F(1) = 0.98395 - 0.51291 = \mathbf{0.47104}$$

Завдання 5

Дана функція розподілу $F(x)$ параметра управління X , що приймає значення в інтервалі (a, b) .

Потрібно:

- ♣ знайти диференціальну функцію розподілу;
- ♣ побудувати графіки щільності та функції розподілу;
- ♣ визначити математичне очікування і середньоквадратичне відхилення, показати їх на графіках;
- ♣ знайти ймовірність попадання X в інтервал (g, h) , тобто $P(g < X < h)$, і відобразити її на графіках функції та щільності розподілу.

$$F(x) = x / 4 - 10, a = 40, b = 44, g = 41, h = 43$$

Рішення

Функція розподілу параметра X записується у вигляді

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 40 \\ x/4 - 10, & 40 < x < 44 \\ 1, & 44 < x \end{cases}$$

Диференціальна функція розподілу

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 40 \\ 1/4, & 40 < x < 44 \\ 0, & 44 < x \end{cases}$$

Математичне сподівання

$$\mu = \int_a^b x f(x) dx = \int_{40}^{44} 0.25x dx = 42$$

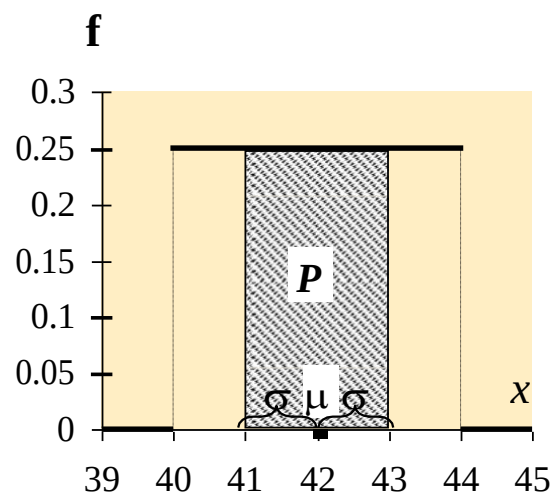
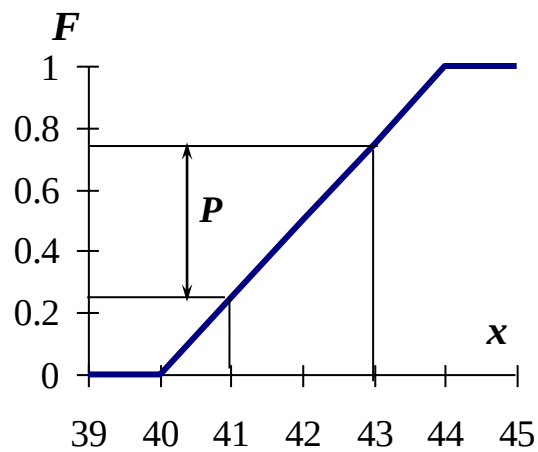
Дисперсія

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x) dx - \mu^2 = \int_{40}^{44} 0.25x^2 dx - 42^2 = 1.33$$

Середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.33} = 1.15$

Імовірність попадання X в інтервал (g, h)

$$P(g < X < h) = F(h) - F(g) = F(43) - F(41) = 0.5$$



Завдання 6

6.1. Встановлено, що час (T , хв) виготовлення закладної деталі для будівельних конструкцій можна описати нормальним розподілом з середнім μ і стандартним відхиленням σ .

При аналізі можливостей підвищення ефективності виробництва потрібно визначити:

- а) в якому діапазоні варіюють витрати часу T на цю деталь;
- б) шанси затратити менше a , від g до h та більше b хв
(відобразити їх графічно, використовуючи нормальну криву);
- с) частку деталей, на виготовлення яких йде більше μ хв.

6.2. Потрібно також знайти і показати на графіку (під кривою розподілу) ймовірність того, що нормально розподілене зі стандартним відхиленням σ_Y значення показника якості цього виробу (Y) відхиляється не більше ніж на δ від номіналу.

Дано: $\mu = 50$, $\sigma = 2$, $a = 45$, $b = 54$, $g = 49$, $h = 53$; $\sigma_Y = 50$, $\delta = 25$

Рішення

6.1 а) Оцінка діапазону значень часу на виготовлення деталі за правилом «трьох сигм» дає

$$44 < T < 56 \text{ хв.}$$

б) Ймовірності значень T менше 45, від 49 до 53, а також понад 54 хв визначаються за допомогою функції Лапласа:

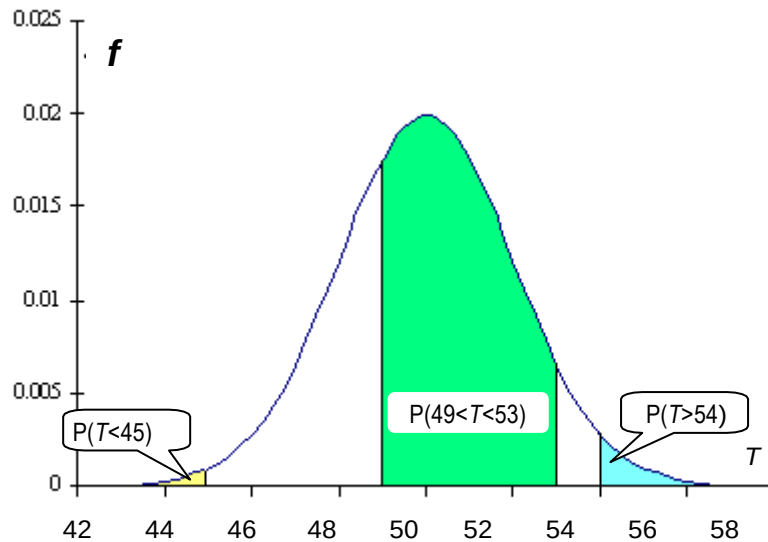
$$P(X < a) = F(a) = F(z_a = \frac{a - \mu}{\sigma}) = 0.5 + \Phi(z_a)$$

$$P(g < X < h) = F(h) - F(g) = \Phi(z_h = \frac{h - \mu}{\sigma}) - \Phi(z_g = \frac{g - \mu}{\sigma})$$

$$P(X > b) = 1 - F(b) = 1 - F(z_b = \frac{b - \mu}{\sigma}) = 0.5 - \Phi(z_b)$$

$$P(T < 45) = 0.5 + \Phi\left(\frac{45 - 50}{2}\right) = 0.5 - \Phi(2.5) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

$$\begin{aligned} P(49 < T < 53) &= \Phi((53 - 50) / 2) - \Phi((49 - 50) / 2) \\ &= \Phi(1.5) - \Phi(-0.5) = 0.4332 + 0.1915 = 0.6247 \end{aligned}$$



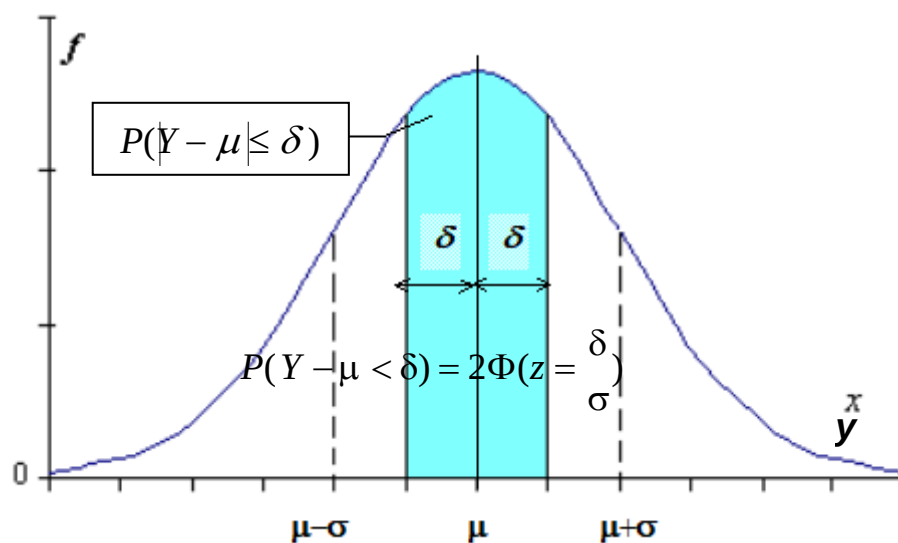
$$P(T > 54) = 0.5 - \Phi\left(\frac{54 - 50}{2}\right) = 0.5 - \Phi(2) = 0.5 - 0.4772 = \mathbf{0.0228}$$

с) Більше **50** хвилин витрачається на виготовлення **половини** деталей.

6.2. Імовірність відхилення значення нормальної величини Y не більше ніж на δ від номіналу (μ), тобто, ймовірність її попадання в симетричний відносно μ інтервал $(\mu \pm \delta)$ визначається як

$$P(|Y - \mu| < \delta) = 2\Phi\left(z = \frac{\delta}{\sigma}\right)$$

$$P(|Y - \mu| < 25) = 2\Phi(25 / 50) = 2\Phi(0.5) = 2 \cdot 0.1915 = \mathbf{0.383}$$



Завдання 7

Поточний контроль якості фірмової будівельної суміші здійснюють за значеннями міцності (R , МПа) 30 зразків матеріалу; використовується описова статистика: таблиця частот, гістограма, вибіркові середнє, дисперсія, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації. Заміна одного з компонентів (добавки 1) новою, більш дорогою добавкою (2), судячи з реклами, може поліпшити якість матеріалу, що окупило б додаткові вкладення. Потрібно прийняти рішення - чи слід закуповувати нову дорожчу добавку.

Щоб прийняти рішення, необхідно перевірити, що друга добавка дійсно забезпечує більш високий рівень міцності. Для перевірки використовуються дані виробничого контролю якості і результати випробування шести зразків з 2-ю добавкою.

Дані про міцність матеріалу з використовуваною добавкою – R_1
і з новою добавкою – R_2

R_1	31.9	29.4	33.0	36.8	24.2	31.9	34.4	21.8	28.7	27.9	22.8	28.5	21.7	28.4	25.6
	33.7	31.4	24.5	31.3	35.3	31.8	35.1	28.9	32.7	25.6	24.5	35.0	30.3	28.4	31.2

$n_1 = 30$

R_2	35.0	35.9	37.3	40.7	38.6	40.0
-------	------	------	------	------	------	------

$n_2 = 6$

Рішення

Статистическі відповідь на питання зводиться до задачі перевірки гіпотези

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ проти альтернативної гіпотези

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$,

де μ_1, μ_2 - генеральні середні першої і 2-ої сукупностей (міцностей).

Якщо H_0 приймається, вважаємо, що середні рівні міцності при першої і 2-ої добавках збігаються (відмінності статистично не значущі).

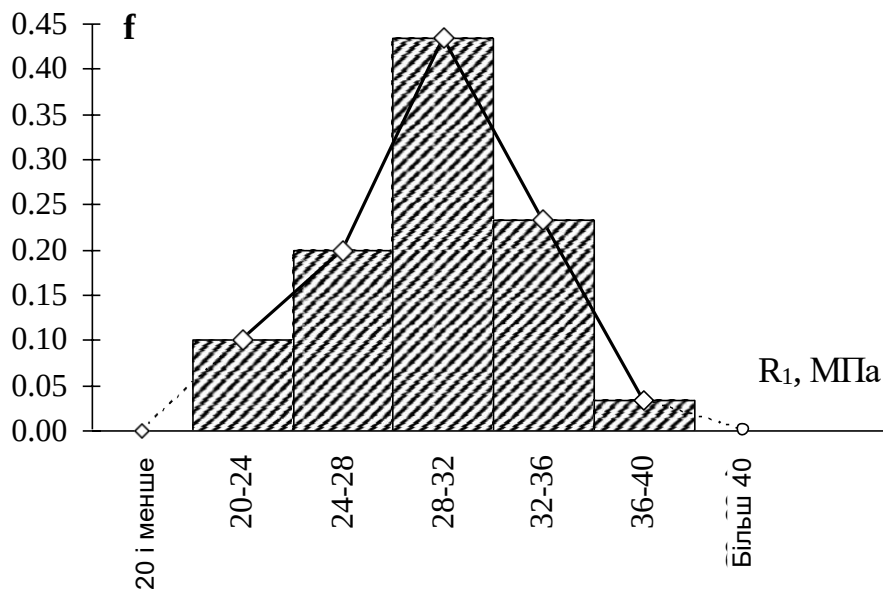
Якщо H_0 буде відкинута, допускається H_1 (відмінності значущі) - вибіркові значення R_1 і R_2 представляють різні сукупності.

Перевірка здійснюється за отриманими вибірковими даними, з наступними характеристиками.

$$R_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} R_{1i}}{n_1} = 29.6 \quad s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (R_{1i} - \bar{R}_1)^2}{n_1 - 1} = 17.94 \quad s_1 = 4.2 \quad v = \frac{s_1}{\bar{R}_1} = 14\%$$

Розподіл R_1

	Інтервали	Абсолютна частота	Відносна частота
1	20 і менше	0	0.000
2	20-24	3	0.100
3	24-28	6	0.200
4	28-32	13	0.433
5	32-36	7	0.233
6	36-40	1	0.033
7	більш 40	0	0.000
	Σ	30	1



Розподіл R_2

$$R_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} R_{2i}}{n_2} = 37.9 \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (R_{2i} - \overline{R_2})^2}{n_2 - 1} = 5.1 \quad s_2 = 2.3$$

Гіпотеза перевіряється по **t**-критерію

$$t = \frac{R_1 - \overline{R_2}}{s\{R\}\sqrt{2}}, \text{ де } s^2\{R\} - \text{узагальнена дисперсія середніх.}$$

Число ступенів свободи (f) для t і узагальнена дисперсія розраховуються з урахуванням прийнятої гіпотези однорідності дисперсій ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при ризику 5%).

$$f = n_1 + n_2 - 2,$$

$$s^2\{\bar{R}\} = s_R^2 \cdot (1/n_1 + 1/n_2) / 2$$

$$s_R^2 = [(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2] / (n_1 + n_2 - 2)$$

При $f = 34$ і двосторонньому ризику 5% критичний рівень $t_{кр} = 2.0$.

$$s_R^2 = 16.05, s^2\{\bar{R}\} = 1.60, s\{\bar{R}\} = 1.27$$

Тоді

$$t = \frac{|29.6 - 37.9|}{1.27/\sqrt{2}} = 4.66 > t_{\text{крит}} = 2.0$$

Таким чином, гіпотеза про рівність середніх рівнів міцностей матеріалів з різними добавками відхиляється. Слід прийняти альтернативну гіпотезу.

→ Дійсно, нова добавка дозволяє в середньому підвищити міцність матеріалу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зайцев Є.П. Теорія ймовірностей та математична статистика. –Київ: Аверта, 2017. 241 с.
2. Статистика. Методичні вказівки для студентів економічних спеціальностей. Укладач Ляшенко Т.В. – Одеса, 2016., 37 с.
3. Статистика. Методическое пособие для студентов экономических специальностей. Составитель Ляшенко Т.В. – Одесса, 2016. 74 с.

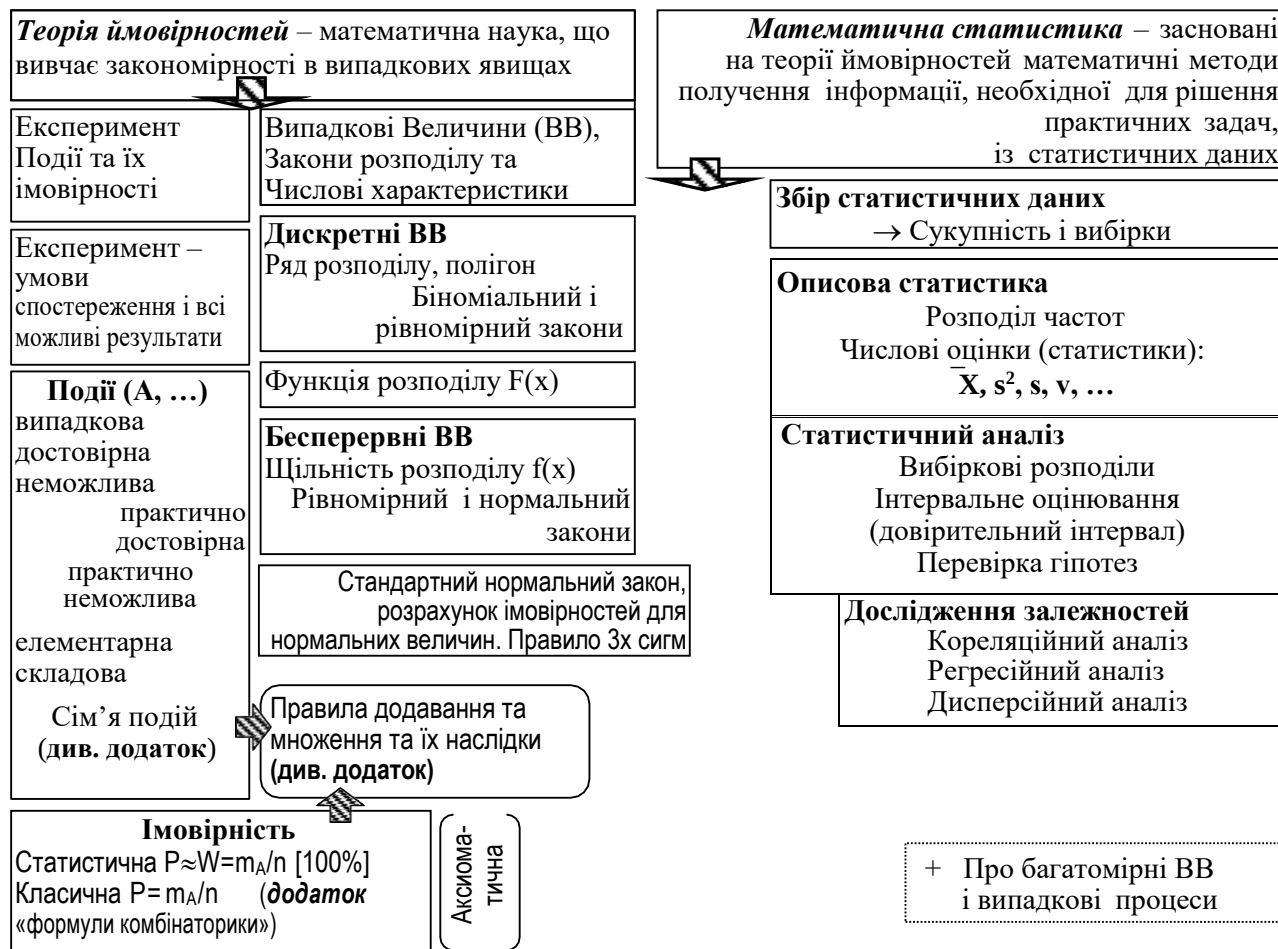
Допоміжні джерела інформації:

1. Lyashenko T.V. Elements of Probability Theory and Mathematical Statistics. – K., 1994. 267 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Структура дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика»



Додаток 2

Деякі поняття і формули для розрахунку ймовірностей подій

Формули комбінаторики

З множини $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, що складається з 3 елементів ($n = 3$), можна вибрати наступні впорядковані підмножини по 2 елементи ($m = 2$):

$$(\omega_1, \omega_2), (\omega_1, \omega_3), (\omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_1), (\omega_3, \omega_2).$$

Такі впорядковані групи називають *розміщеннями з n елементів по m*. Їх число позначається A_n^m .

Якщо $m = n$, то розміщення називають *перестановкою з n елементів*; число *перестановок* позначається P_n . Перестановки з 2 елементів: $(\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_1)$; з 3 елементів:

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3), (\omega_1, \omega_3, \omega_2), (\omega_2, \omega_1, \omega_3), (\omega_2, \omega_3, \omega_1), (\omega_3, \omega_1, \omega_2), (\omega_3, \omega_2, \omega_1).$$

Якщо підмножини не впорядковані (не важливий порядок розташування в них елементів), то це *поєднання з n елементів по m* . Такі як:

$$(\omega_1, \omega_2), (\omega_1, \omega_3), (\omega_2, \omega_3).$$

Поєднання відрізняються один від одного хоча б одним елементом, а розміщення - або елементами, або їх порядком. Число *сполучень* позначається C_n^m .

Воно розраховується за формулою

$$C_n^m = A_n^m / P_m = n! / (n - m)! / m! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1) / m!$$

Число перестановок $P_m = m!$

$$\text{Число розміщень } A_n^m = n! / (n - m)! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1).$$

$$\text{Для } n = 3 \text{ и } m = 2: C_3^2 = 3 \cdot 2 / 2 = 3, A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Правило множення. Якщо потрібно виконати одне за іншим k дій, які можуть бути здійснені відповідно $n_1, n_2, \dots, n_k$ способами, то всі k дій разом можуть бути виконані $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Правило додавання. Якщо два взаємовиключні один одного дії можуть виконуватися відповідно m і n способами, то виконати одне будь-яке з цих дій можна $m + n$ способами.

Елементи алгебри подій (відносини в сімействі подій)

Визначення

Добуток (перетин) двох подій A і B - це подія (C), яке полягає в спільному наступі і A , і B .

$$C = A \cdot B \text{ або } C = A \cap B$$

Сума (об'єднання) двох подій A і B - це подія (D), що складається в наступі або A , або B , або обох разом (хоча б одного з них).

$$D = A + B \text{ або } D = A \cup B$$

Події називаються несумісними (непересічними), якщо поява однієї з них виключає появу іншої, тобто, їх перетин - неможлива подія:

$$A \cdot B = \emptyset.$$

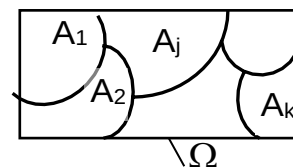
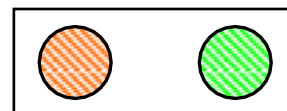
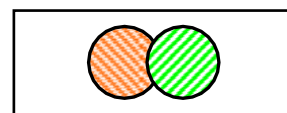
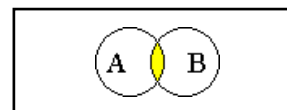
Поняття суми і добутку двох подій узагальнюються на будь-яку кількість подій A_j :

$$\sum_j A_j \text{ і } \prod_j A_j.$$

Події $A_j, j = 1 \dots k$, називають єдиною можливими, якщо хоча б одне з них обов'язково відбудеться, тобто, якщо їх сума -

достовірною подія: $\sum_j A_j = \Omega$.

Діаграми Венна



Події утворюють повну групу, якщо в експерименті обов'язково настане одне й тільки одне з них. Неспільні єдино можливі події утворюють повну групу.

Протилежною (додатковою) події A називають подію $\bar{A}$, що складається в тому, що A не настає.

$\bar{A}$ і A утворюють повну групу: $A \cdot \bar{A} = \emptyset$, $A + \bar{A} = \Omega$.

Елементарні події утворюють повну групу.



Правила додавання та множення ймовірностей і їх наслідки

Ймовірність суми двох несумісних подій (тобто, однієї з них) дорівнює сумі їх ймовірностей: $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если $A \cdot B = \emptyset$

Ймовірність настання однієї з попарно несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P\left(\sum_{j=1}^k A_j\right) = \sum_{j=1}^k P(A_j)$$

Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_k$ створюють *повну групу*, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$\sum_j P(A_j) = 1, \text{ якщо } \sum_j A_j = \Omega \text{ и } A_i \cdot A_j = \emptyset, i \neq j$$

Сума ймовірностей *протилежних* подій

дорівнює одиниці: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$$p = 1 - q$$

Дві події називають *незалежними*, якщо настання однієї з них не змінює ймовірності другої

Умовна ймовірність, $P(A/B)$ чи $P_B(A)$, є ймовірність події A , вирахована при умові, що подія B мала місце. Ймовірність незалежної події – *безумовна (абсолютна)*

Ймовірність добутку двох подій (тобто, їх сумісного настання) дорівнює ймовірності однієї з них, помноженої на умовну ймовірність другої при умові, що перша мала місце:

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B), \quad P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Ймовірність сумісного настання незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей: $P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k)$

Ймовірність настання хоча б однієї з декількох незалежних подій дорівнює одиниці без добутку ймовірностей протилежних подій:

$$P(A = A_1 + A_2 + \dots + A_k) = 1 - p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot p(\bar{A}_k)$$

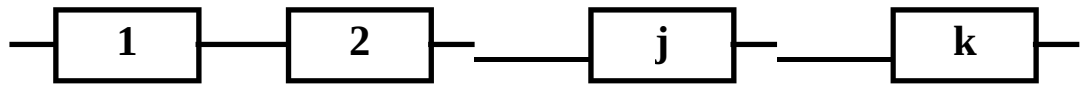
Ймовірність настання хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх сумісного настання:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Ймовірність суми декількох подій не перевищує суми їх ймовірностей:

$$P(A + B) \leq P(A) + P(B)$$

Надійність (імовірність безвідмовної роботи) системи незалежних послідовних елементів – «системи без резервування»:



$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_j \cdot \dots \cdot p_k,$$

де p_j – надійність j -го елементу.

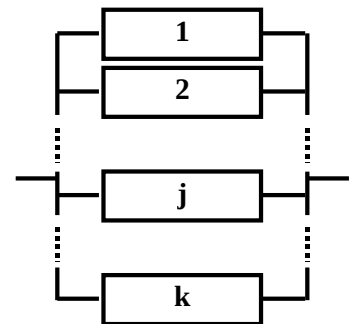
Імовірність відмови системи без резервування: $Q = 1 - p_1 p_2 \dots p_j \dots p_k$

Імовірність відмови системи незалежних елементів, що працюють паралельно – «системи з резервуванням»

$$Q = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_j \cdot \dots \cdot q_k$$

Надійність системи з резервуванням

$$P = 1 - Q = 1 - q_1 q_2 \dots q_j \dots q_k$$



В практичних розрахунках надійності та ймовірності відмови найбільш зручно визначити:

- 1) для послідовної системи – спочатку P , потім Q
- 2) для паралельної системи – спочатку Q , потім P

Якщо подія A може відбутися в кожному з n незалежних випробувань з імовірністю p , то ймовірність її настання рівно k раз в даній серії випробувань виражається **формулою Бернуллі**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Якщо про умови експерименту можна зробити k припущень, що виключають одне одного – гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_k$, і подія A може мати місце при одній з цих гіпотез, то ймовірність події A визначається

за **формулою повної ймовірності** і:

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(H_j) \cdot P(A/H_j)$$

Якщо до експерименту ймовірності гіпотез були $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_k)$ і в результаті експерименту подія A напустила, то «нові» умовні ймовірності гіпотез розраховуються за **формулою Байєса**:

$$P(H_j/A) = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{\sum_{j=1}^k P(H_j)P(A/H_j)}$$

Додаток 3. Фрагмент таблиці значень функції Лапласа

z	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Φ(z)	0.1915	0.3413	0.4332	0.4772	0.4938	0.4986